Corrigé du sujet de mathématiques

Baccalauréat général, enseignement de spécialité, Amérique du Nord 2026 (jour 1)

Sujet 26-MATJ1AN1

Voici une proposition de corrigé, exercice par exercice. Les calculs ont été refaits et vérifiés, et chaque résultat attendu est justifié. Les pistes de méthode sont signalées au fil de l'eau pour t'aider à comprendre le raisonnement, pas seulement le résultat.

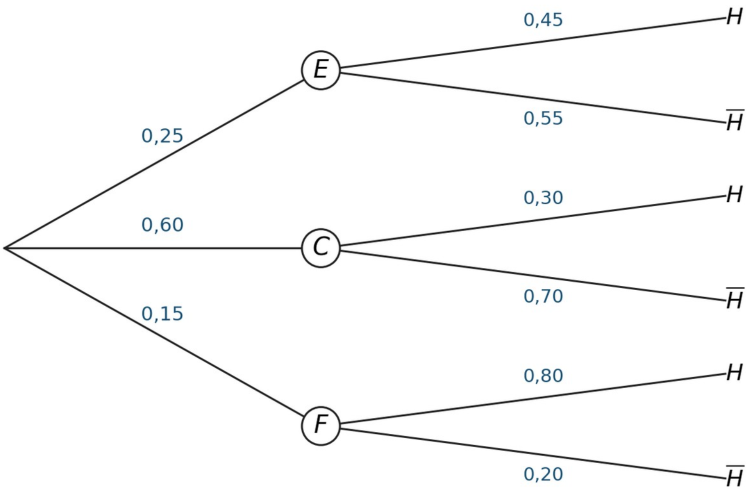
Exercice 1 (6 points)

Partie A

1. Compléter l'arbre de probabilités.

L'énoncé donne directement les proportions d'abonnements et les taux d'activation de l'option. Le reste se déduit par complément ou avec la définition d'une probabilité conditionnelle.

On a $P(E) = 0{,}25$ et $P(F) = 0{,}15$, donc $P(C) = 1 - 0{,}25 - 0{,}15 = 0{,}60$.
Branches issues de E : $P_E(H) = 0{,}45$ et $P_E(\bar{H}) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$.
Branches issues de C : $P_C(H) = 0{,}30$ et $P_C(\bar{H}) = 0{,}70$.
Pour F, on connaît $P(F \cap H) = 0{,}12$. Or $P(F \cap H) = P(F) \times P_F(H)$, donc $P_F(H) = 0{,}12 / 0{,}15 = 0{,}80$ et $P_F(\bar{H}) = 0{,}20$.



2. Valeur exacte de $P(E \cap H)$.

$P(E \cap H) = P(E) \times P_E(H) = 0{,}25 \times 0{,}45 = 0{,}1125$.

3. Montrer que $P(H) = 0{,}4125$.

L'événement H peut survenir avec n'importe quel abonnement de départ. Comme E, C et F forment une partition de l'univers, on applique la formule des probabilités totales.

$P(H) = P(E \cap H) + P(C \cap H) + P(F \cap H)$
$P(H) = 0{,}1125 + 0{,}60 \times 0{,}30 + 0{,}12 = 0{,}1125 + 0{,}18 + 0{,}12 = 0{,}4125$.

4. Sachant que l'abonné a activé l'option, probabilité qu'il ait choisi « Étudiant ».

$P_H(E) = P(E \cap H) / P(H) = 0{,}1125 / 0{,}4125 \approx 0{,}273$.

Partie B

1. Paramètres de la loi binomiale.

On répète 8 fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues (l'option est activée ou non). Le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, la probabilité de succès reste 0,4125 à chaque fois. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0{,}4125$.

2. Probabilité qu'aucun des huit abonnés n'ait activé l'option.

$P(X = 0) = (1 - 0{,}4125)^8 = 0{,}5875^8 \approx 0{,}014$.

3. a. Montrer que $q_n = 1 - 0{,}5875^n$.

« Au moins un » est le contraire de « aucun ». Pour un échantillon de n abonnés indépendants, aucun n'active l'option avec la probabilité $0{,}5875^n$ (chaque abonné n'active pas avec la probabilité $1 - 0{,}4125 = 0{,}5875$).

$q_n = 1 - P(\text{aucun}) = 1 - 0{,}5875^n$.

3. b. Plus petite valeur de n telle que $q_n \geq 0{,}999$.

$q_n \geq 0{,}999 \iff 0{,}5875^n \leq 0{,}001$.
On passe au logarithme népérien. Comme ln(0,5875) est négatif, l'inégalité change de sens à la division :

$n \times \ln(0{,}5875) \leq \ln(0{,}001) \iff n \geq \ln(0{,}001) / \ln(0{,}5875) \approx 12{,}99$.
n est entier, donc $n \geq 13$. On vérifie : $q_{12} \approx 0{,}9983$ (un peu trop faible) et $q_{13} \approx 0{,}9990$.
La plus petite valeur est donc $n = 13$.

Partie C

1. Les six valeurs possibles de Y.

Le tarif dépend de l'abonnement (5, 10 ou 16 €) et de l'option, qui ajoute 2 € quand elle est activée. On obtient :

5 et 7 (Étudiant sans/avec option), 10 et 12 (Classique), 16 et 18 (Famille).

2. Loi de probabilité de Y.

Chaque montant correspond à un couple (abonnement, option). Par exemple, payer 5 € c'est être « Étudiant » sans l'option : $P(Y = 5) = P(E) \times 0{,}55 = 0{,}1375$.

y_i	5	7	10	12	16	18
$P(Y = y_i)$	0,1375	0,1125	0,42	0,18	0,03	0,12

La somme des probabilités vaut bien $0{,}1375 + 0{,}1125 + 0{,}42 + 0{,}18 + 0{,}03 + 0{,}12 = 1$.

3. Montrer que $E(Y) = 10{,}475$ et interpréter.

$E(Y) = 5 \times 0{,}1375 + 7 \times 0{,}1125 + 10 \times 0{,}42 + 12 \times 0{,}18 + 16 \times 0{,}03 + 18 \times 0{,}12$
$E(Y) = 0{,}6875 + 0{,}7875 + 4{,}2 + 2{,}16 + 0{,}48 + 2{,}16 = 10{,}475$.

Concrètement : si on suit un grand nombre d'abonnés, chacun paie en moyenne 10,475 € par mois, soit environ 10,48 € par abonné.

4. Variance de Y (calculatrice).

La calculatrice donne $V(Y) \approx 13{,}70$. On peut le retrouver avec $E(Y^2) = 123{,}43$ et la formule $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 123{,}43 - 10{,}475^2 \approx 13{,}70$.

5. a. Variance de Z.

L'écart-type de Z vaut 2, donc $V(Z) = 2^2 = 4$.

5. b. Justifier l'affirmation sur l'intervalle]6 ; 12[.

On reconnaît un encadrement autour de l'espérance, ce qui appelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|Z - E(Z)| \geq a) \leq V(Z) / a^2$.

Ici $E(Z) = 9$ et l'intervalle $]6 ; 12[$ s'écrit $]9 - 3 ; 9 + 3[$, donc $a = 3$:

$P(|Z - 9| \geq 3) \leq V(Z) / 3^2 = 4 / 9$.
En passant à l'événement contraire : $P(6 < Z < 12) = P(|Z - 9| < 3) \geq 1 - 4/9 = 5/9 \approx 0{,}556$. La probabilité est donc bien supérieure à 50 %, l'affirmation est justifiée.

Exercice 2 (4 points)

Partie A : étude d'un modèle discret

1. Nombre de perches-soleil au 1er janvier 2026.

$u_1 = 4 - 4/u_0 = 4 - 4/4 = 3$, soit 3 000 perches-soleil au 1er janvier 2026.

2. a. Justifier que h est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

$h(x) = 4 - 4/x$. On dérive : $h'(x) = 4/x^2$. Pour tout $x > 0$, on a $x^2 > 0$ donc $h'(x) > 0$. La fonction h est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

2. b. Montrer que, pour tout n, $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.

On raisonne par récurrence. Notons P(n) la propriété : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.

Initialisation. $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$, donc $2 \leq 3 \leq 4 \leq 4$: P(0) est vraie.
Hérédité. Supposons P(n) vraie, c'est-à-dire $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$. Comme h est croissante sur $]0 ; +\infty[$, l'ordre est conservé par h :
$h(2) \leq h(u_{n+1}) \leq h(u_n) \leq h(4)$.
Or $h(2) = 4 - 2 = 2$ et $h(4) = 4 - 1 = 3$, et par définition $h(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $h(u_n) = u_{n+1}$. On obtient donc $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3 \leq 4$, ce qui est P(n+1).

Conclusion. Par récurrence, pour tout entier naturel n : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.

2. c. En déduire que la suite converge.

L'encadrement précédent montre que la suite est décroissante ($u_{n+1} \leq u_n$) et minorée par 2. Toute suite décroissante et minorée converge, donc (u_n) converge vers une limite, notée ℓ.

2. d. Justifier que $\ell = 2$.

h est continue sur $]0 ; +\infty[$ et $u_{n+1} = h(u_n)$, donc la limite ℓ vérifie $\ell = h(\ell)$:

$\ell = 4 - 4/\ell \iff \ell^2 - 4\ell + 4 = 0 \iff (\ell - 2)^2 = 0 \iff \ell = 2$.
De plus, comme $u_n \geq 2$ pour tout n, on a $\ell \geq 2$, ce qui est cohérent. Donc $\ell = 2$.

2. e. Le modèle prévoit-il une élimination de l'espèce ?

Non. La suite tend vers 2, soit 2 000 individus, et non vers 0. Le modèle prévoit une stabilisation de la population, pas son élimination.

3. a. Compléter le script Python.

On part de u = 4 (le terme u_0) avec n = 0. Tant que le terme reste supérieur ou égal à s, on calcule le terme suivant et on incrémente n. La boucle s'arrête au premier terme strictement inférieur à s.

```
def population(s) :
    u = 4
    n = 0
    while u >= s :
        u = 4 - 4/u
        n = n + 1
    return n
```

3. b. Valeur renvoyée par population(2.2) et interprétation.

On calcule les termes successifs : $u_0 = 4$; $u_1 = 3$; $u_2 \approx 2{,}667$; $u_3 = 2{,}5$; $u_4 = 2{,}4$; $u_5 \approx 2{,}333$; $u_6 \approx 2{,}286$; $u_7 = 2{,}25$; $u_8 \approx 2{,}222$; $u_9 = 2{,}2$; $u_{10} \approx 2{,}182$.

Le terme u_9 vaut exactement 2,2 : la condition $u \geq 2{,}2$ est encore vérifiée, la boucle continue. Le premier terme strictement inférieur à 2,2 est u_{10}. La commande renvoie donc 10.

Interprétation : c'est à partir de l'année 2025 + 10 = 2035 que le nombre de perches-soleil passe pour la première fois sous la barre des 2 200 individus.

Partie B : étude d'un modèle continu

1. Ensemble des solutions de (E) : $y' + y = 2$.

On écrit (E) sous la forme $y' = -y + 2$, soit $y' = ay + b$ avec $a = -1$ et $b = 2$. Les solutions sont les fonctions :

$t \mapsto K\,e^{-t} - b/a = K\,e^{-t} + 2$, avec K réel quelconque.

2. En déduire $p(t) = 2\,e^{-t} + 2$.

p est une solution de (E), donc $p(t) = K\,e^{-t} + 2$. La condition $p(0) = 4$ donne $K + 2 = 4$, soit $K = 2$. D'où $p(t) = 2\,e^{-t} + 2$ sur $[0 ; +\infty[$.

3. Élimination de l'espèce à long terme ?

Quand $t \to +\infty$, $e^{-t} \to 0$, donc $p(t) \to 2$. La population se stabilise autour de 2 000 individus, comme avec le modèle discret. Là encore, le modèle ne prévoit pas l'élimination de l'espèce.

Exercice 3 (5 points)

Partie A

1. Coordonnées des points A et D.

ABCD est un carré de centre O, donc O est le milieu des diagonales [AC] et [BD]. On a alors $A = -C$ et $D = -B$:

$A(-1 ; -1 ; 0)$ et $D(1 ; -1 ; 0)$.

Vérification : le milieu de [CD] est bien $I(1 ; 0 ; 0)$ et le milieu de [BC] est $J(0 ; 1 ; 0)$, conformément au repère.

2. Produit scalaire $\vec{SC} \cdot \vec{SB}$.

$\vec{SC} = C - S = (1 ; 1 ; -2)$ et $\vec{SB} = B - S = (-1 ; 1 ; -2)$.
$\vec{SC} \cdot \vec{SB} = (1)(-1) + (1)(1) + (-2)(-2) = -1 + 1 + 4 = 4$.

3. Mesure de l'angle $\widehat{BSC}$ au dixième de degré.

$\|\vec{SC}\| = \|\vec{SB}\| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$.
$\cos(\widehat{BSC}) = (\vec{SC} \cdot \vec{SB}) / (\|\vec{SC}\| \times \|\vec{SB}\|) = 4 / (\sqrt{6} \times \sqrt{6}) = 4/6 = 2/3$.

$\widehat{BSC} = \arccos(2/3) \approx 48{,}2°$.

Partie B

1. a. Justifier que $\vec{n}(0 ; 2 ; 1)$ est normal au plan (SBC).

Il suffit que $\vec{n}$ soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, par exemple $\vec{SB}$ et $\vec{SC}$:

$\vec{n} \cdot \vec{SB} = 0\times(-1) + 2\times1 + 1\times(-2) = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{SC} = 0\times1 + 2\times1 + 1\times(-2) = 0$.
$\vec{SB}$ et $\vec{SC}$ ne sont pas colinéaires (B, S, C non alignés), donc $\vec{n}$ est normal au plan (SBC).

1. b. Équation cartésienne du plan (SBC).

Le plan a une équation de la forme $0x + 2y + z + d = 0$. Le point S(0 ; 0 ; 2) lui appartient :

$2\times0 + 2 + d = 0 \iff d = -2$. D'où l'équation : $2y + z - 2 = 0$.

2. a. Représentation paramétrique de la droite (OH).

H est le projeté orthogonal de O sur (SBC), donc (OH) est perpendiculaire au plan : elle est dirigée par le vecteur normal $\vec{n}(0 ; 2 ; 1)$ et passe par O(0 ; 0 ; 0). Un point M(x ; y ; z) de (OH) vérifie $\vec{OM} = t\,\vec{n}$, soit :

$x = 0$, $y = 2t$, $z = t$, avec $t \in \mathbb{R}$.

2. b. Coordonnées de H.

H appartient à (OH) et au plan (SBC). On reporte $x = 0$, $y = 2t$, $z = t$ dans $2y + z - 2 = 0$:

$2(2t) + t - 2 = 0 \iff 5t = 2 \iff t = 2/5$.
Donc H(0 ; 4/5 ; 2/5).

2. c. En déduire la distance de O au plan (SBC).

$\vec{OH} = (0 ; 4/5 ; 2/5)$, donc $OH = \sqrt{(4/5)^2 + (2/5)^2} = \sqrt{16/25 + 4/25} = \sqrt{20/25} = \sqrt{20} / 5 = 2\sqrt{5} / 5$.
La distance de O au plan (SBC) est donc $2\sqrt{5} / 5$ cm.

Partie C

1. a. Volume de la pyramide SABCD.

La base ABCD est un carré de côté 2, donc d'aire $2^2 = 4$. Le sommet S(0 ; 0 ; 2) est à la verticale de O : la hauteur est OS = 2.

$V(SABCD) = (1/3) \times 4 \times 2 = 8/3$ cm³.

1. b. En déduire que le volume de OCBS est 2/3 cm³.

Les diagonales du carré découpent la base en quatre triangles isométriques. Le triangle OBC est l'un d'eux, donc son aire vaut le quart de celle de ABCD : 4/4 = 1. La pyramide OCBS a ce triangle pour base et le même sommet S à la hauteur OS = 2.

$V(OCBS) = (1/3) \times 1 \times 2 = 2/3$ cm³ (c'est aussi le quart de V(SABCD)).

2. Aire du triangle SBC.

On prend [BC] comme base : BC = 2. J(0 ; 1 ; 0) est le milieu de [BC]. Comme $\vec{SJ} = (0 ; 1 ; -2)$ et $\vec{BC} = (2 ; 0 ; 0)$ vérifient $\vec{SJ} \cdot \vec{BC} = 0$, la hauteur issue de S est $SJ = \sqrt{0 + 1 + 4} = \sqrt{5}$.

$\text{Aire}(SBC) = (1/2) \times BC \times SJ = (1/2) \times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5}$ cm².

3. Retrouver la distance de O au plan (SBC).

On exprime le volume de OCBS avec la face SBC comme base et la distance cherchée $d = d(O, (SBC))$ comme hauteur :

$V(OCBS) = (1/3) \times \text{Aire}(SBC) \times d \iff 2/3 = (1/3) \times \sqrt{5} \times d.$
$d = (2/3) \times (3 / \sqrt{5}) = 2 / \sqrt{5} = 2\sqrt{5} / 5$ cm.

On retrouve bien le résultat de la partie B.

Exercice 4 (5 points)

Rappel : $f(x) = 5 \ln(x^2 + 1) - 3x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Conjecture sur la convexité.

D'après le graphique, la courbe semble tourner sa concavité vers le haut entre $x = -1$ et $x = 1$, et vers le bas en dehors. On conjecture donc que f est convexe sur $[-1 ; 1]$ et concave sur $]-\infty ; -1]$ et sur $[1 ; +\infty[$, avec deux points d'inflexion en $x = -1$ et $x = 1$.

2. Limite de f en $-\infty$.

Quand $x \to -\infty$: $x^2 + 1 \to +\infty$ donc $5 \ln(x^2 + 1) \to +\infty$; et $-3x \to +\infty$. La somme de deux termes tendant vers $+\infty$ donne :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$

3. a. Montrer l'écriture proposée pour $x > 0$.

Pour $x > 0$, on factorise x^2 dans le logarithme : $x^2 + 1 = x^2(1 + 1/x^2)$. Comme $\ln(x^2) = 2 \ln x$ pour $x > 0$:

$5 \ln(x^2 + 1) = 5[2 \ln x + \ln(1 + 1/x^2)] = 10 \ln x + 5 \ln(1 + 1/x^2).$
On reporte dans f puis on factorise par x les deux termes $10 \ln x - 3x$:

$f(x) = 10 \ln x - 3x + 5 \ln(1 + 1/x^2) = x(10 \ln x / x - 3) + 5 \ln(1 + 1/x^2).$

3. b. Limite de f en $+\infty$.

Par croissances comparées, $\ln x / x \to 0$ quand $x \to +\infty$, donc $10 \ln x / x - 3 \to -3$. Comme $x \to +\infty$, le produit $x(10 \ln x / x - 3) \to -\infty$. Par ailleurs $1 + 1/x^2 \to 1$, donc $5 \ln(1 + 1/x^2) \to 0$. On en déduit :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$

4. a. Montrer que $f'(x) = (-3x^2 + 10x - 3)/(x^2 + 1)$.

La dérivée de $\ln(x^2 + 1)$ est $2x/(x^2 + 1)$. Donc :

$f'(x) = 5 \times 2x/(x^2 + 1) - 3 = 10x/(x^2 + 1) - 3.$
On met au même dénominateur :

$f'(x) = (10x - 3(x^2 + 1))/(x^2 + 1) = (-3x^2 + 10x - 3)/(x^2 + 1).$

4. b. Variations de f sur $\mathbb{R}$.

Le dénominateur $x^2 + 1$ est strictement positif, donc $f'(x)$ a le signe du trinôme $-3x^2 + 10x - 3$. Son discriminant vaut $\Delta = 100 - 36 = 64$, ses racines sont $x = 1/3$ et $x = 3$. Comme le coefficient de x^2 est négatif, le trinôme est positif entre les racines.

f est décroissante sur $]-\infty ; 1/3]$, croissante sur $[1/3 ; 3]$, décroissante sur $[3 ; +\infty[$.
f admet donc un minimum local en $x = 1/3$ et un maximum local en $x = 3$.

5. a. Valider ou rejeter la conjecture.

$f''(x) = (-10x^2 + 10)/(x^2 + 1)^2 = 10(1 - x^2)/(x^2 + 1)^2$. Le dénominateur est positif, donc $f''(x)$ a le signe de $1 - x^2$:

$1 - x^2 > 0$ sur $]-1 ; 1[$: f est convexe sur $[-1 ; 1]$.
$1 - x^2 < 0$ sur $]-\infty ; -1[$ et $]1 ; +\infty[$: f est concave sur $]-\infty ; -1]$ et sur $[1 ; +\infty[$.
Cela valide la conjecture de la question 1, avec des points d'inflexion en $x = -1$ et $x = 1$.

5. b. Équation réduite de la tangente en A (abscisse 1).

$f(1) = 5 \ln 2 - 3$ et $f'(1) = (-3 + 10 - 3)/(1 + 1) = 4/2 = 2$.
$T : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(x - 1) + 5 \ln 2 - 3$, soit $y = 2x + 5 \ln 2 - 5$.

5. c. En déduire que, pour tout $x \geq 1$, $\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln 2 - 1$.

Sur $[1 ; +\infty[$, f est concave : sa courbe reste sous chacune de ses tangentes, en particulier sous la tangente T tracée en A. Donc, pour tout $x \geq 1$:

$f(x) \leq 2x + 5 \ln 2 - 5$, c'est-à-dire $5 \ln(x^2 + 1) - 3x \leq 2x + 5 \ln 2 - 5$.
On ajoute 3x aux deux membres, puis on divise par 5 :

$5 \ln(x^2 + 1) \leq 5x + 5 \ln 2 - 5 \implies \ln(x^2 + 1) \leq x + \ln 2 - 1$.

Pour aller plus loin

Pour reprendre les points qui coincent, un Prof particulier de maths permet de travailler à son rythme, sujet après sujet.

Et pour réviser de façon intensive avant l'épreuve, le Stage intensif terminale reprend les notions clés pendant les vacances.