Corrigé du sujet de mathématiques

Baccalauréat général, enseignement de spécialité, Asie 2026 (jour 1)

Sujet 26-MATJ1JA1

Voici une proposition de corrigé, exercice par exercice. Tous les calculs ont été refaits et vérifiés, et chaque résultat demandé est justifié. Les pistes de méthode sont signalées au fil de l'eau, pour comprendre le raisonnement et pas seulement retenir le résultat.

Exercice 1 (5 points)

Contexte : à chaque tir, le tireur atteint le centre avec une probabilité qui dépend du tir précédent : 4/5 s'il vient de réussir, 1/3 sinon. Au premier tir, cette probabilité vaut 1/2. On note $p_n = P(T_n)$.

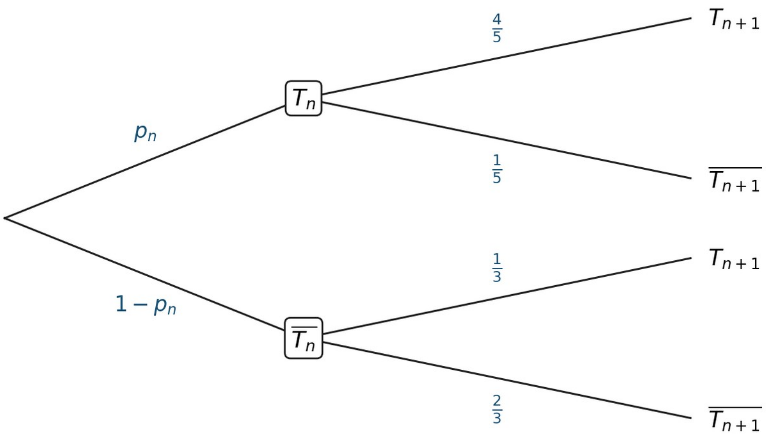
1. Valeur de p_1 et montrer que $p_2 = 17/30$.

$p_1 = 1/2$ (probabilité donnée pour le premier tir).
Pour p_2, on distingue selon le résultat du premier tir (formule des probabilités totales) :

$p_2 = P(T_1) \times P_{T_1}(T_2) + P(\bar{T}_1) \times P_{\bar{T}_1}(T_2) = (1/2)(4/5) + (1/2)(1/3)$.
$p_2 = 2/5 + 1/6 = 12/30 + 5/30 = 17/30$.

2. Compléter l'arbre de probabilité.

Le premier niveau distingue T_n (probabilité p_n) et $\bar{T}_n$ (probabilité $1 - p_n$). Les branches suivantes reprennent les taux de l'énoncé : depuis T_n, on réussit avec 4/5 (et on échoue avec 1/5) ; depuis $\bar{T}_n$, on réussit avec 1/3 (et on échoue avec 2/3).



3. Montrer que $p_{n+1} = (7/15)\, p_n + 1/3$.

On applique la formule des probabilités totales avec la partition $(T_n, \bar{T}_n)$:

$p_{n+1} = P(T_n) \times P_{T_n}(T_{n+1}) + P(\bar{T}_n) \times P_{\bar{T}_n}(T_{n+1}) = p_n \times (4/5) + (1 - p_n) \times (1/3)$.
$p_{n+1} = (4/5)\, p_n + 1/3 - (1/3)\, p_n = (12/15 - 5/15)\, p_n + 1/3 = (7/15)\, p_n + 1/3$.

4. Étude de la suite (u_n) définie par $u_n = p_n - 5/8$.

a. Montrer que (u_n) est géométrique de raison 7/15.

On calcule u_{n+1} à partir de la relation de récurrence :

$u_{n+1} = p_{n+1} - 5/8 = (7/15)\, p_n + 1/3 - 5/8$.
Or $1/3 - 5/8 = 8/24 - 15/24 = -7/24$, et $(7/15) \times (5/8) = 35/120 = 7/24$. Donc :

$u_{n+1} = (7/15)\, p_n - 7/24 = (7/15)(p_n - 5/8) = (7/15)\, u_n$.
La suite (u_n) est donc géométrique de raison 7/15.

b. Expression de u_n en fonction de n.

Le premier terme est $u_1 = p_1 - 5/8 = 1/2 - 5/8 = -1/8$. Comme la suite est géométrique de raison 7/15 :

$u_n = u_1 \times (7/15)^{n-1} = -(1/8)(7/15)^{n-1}$.

c. Expression de p_n en fonction de n.

$p_n = u_n + 5/8 = 5/8 - (1/8)(7/15)^{n-1}$.

5. Limite de (p_n) et interprétation.

Comme $0 < 7/15 < 1$, on a $(7/15)^{n-1} \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc :

$\lim (n \to +\infty)\, p_n = 5/8 = 0{,}625$.
Sur le long terme, la probabilité que le tireur atteigne le centre se stabilise autour de 5/8, soit environ 62,5 % de réussite quel que soit le numéro du tir.

6. Compléter la fonction Python seuil.

On part de p = 0,5 (c'est p_1) et n = 1. Tant que p reste sous 0,6, on passe au terme suivant grâce à la relation de récurrence et on incrémente n. La boucle s'arrête au premier terme atteignant 0,6.

```
def seuil():
    n = 1
    p = 0.5
    while p < 0.6:
        n = n + 1
        p = 7/15 * p + 1/3
    return n
```

7. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $p_n \geq 0{,}6$.

On part de l'expression de p_n :

$p_n \geq 0{,}6 \iff 5/8 - (1/8)(7/15)^{n-1} \geq 3/5 \iff (1/8)(7/15)^{n-1} \leq 5/8 - 3/5$.
Or $5/8 - 3/5 = 25/40 - 24/40 = 1/40$, donc l'inéquation devient :

$(7/15)^{n-1} \leq 8/40 = 1/5$.
On passe au logarithme népérien. Comme $\ln(7/15) < 0$, l'inégalité change de sens :

$(n - 1) \ln(7/15) \leq \ln(1/5) \iff n - 1 \geq \ln(1/5) / \ln(7/15) \approx 2{,}11$.
n est entier, donc $n - 1 \geq 3$, soit $n \geq 4$. L'inéquation $p_n \geq 0{,}6$ est vérifiée pour tout entier $n \geq 4$, ce qui confirme la valeur 4 renvoyée par la fonction seuil.

Exercice 2 (5 points)

Vrai ou faux. Chaque réponse est justifiée.

1. Affirmation 1 : vraie. $f(x) = (x - 1) / \sqrt{x^2 - 1}$ sur $]1 ; +\infty[$ a pour limite 1 en $+\infty$.

Pour $x > 1$, on factorise sous la racine : $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, donc $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x - 1} \times \sqrt{x + 1}$. On simplifie :

$f(x) = (x - 1) / (\sqrt{x - 1}\, \sqrt{x + 1}) = \sqrt{x - 1} / \sqrt{x + 1} = \sqrt{(x - 1)/(x + 1)}$.
Quand $x \to +\infty$, $(x - 1)/(x + 1) \to 1$, donc $f(x) \to \sqrt{1} = 1$. L'affirmation est vraie.

2. Affirmation 2 : vraie. Pour (w_n) avec $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = w_n + 2n + 3$, on a $w_n = (n + 1)^2$.

On montre la propriété par récurrence.

Initialisation. $(0 + 1)^2 = 1 = w_0$: vraie au rang 0.
Hérédité. Si $w_n = (n + 1)^2$, alors $w_{n+1} = (n + 1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$.
C'est bien $((n + 1) + 1)^2$. La propriété est héréditaire, donc vraie pour tout n : l'affirmation est vraie.

3. Affirmation 3 : vraie. Pour X suivant la loi binomiale de paramètres 3 et p, $P(X = 1) = 3p - 6p^2 + 3p^3$.

$P(X = 1) = C(3, 1) \times p^1 \times (1 - p)^2 = 3p(1 - p)^2$.
$3p(1 - 2p + p^2) = 3p - 6p^2 + 3p^3$.
On retrouve exactement l'expression proposée : l'affirmation est vraie.

4. Affirmation 4 : fausse. Pour $v_n = \int_0^1 e^{nx}\,dx$, on n'a pas $v_n = e^n/n$.

Une primitive de $x \mapsto e^{nx}$ est $x \mapsto e^{nx}/n$ (avec $n \geq 1$). On calcule l'intégrale :

$v_n = [e^{nx}/n]_0^1 = (e^n - e^0)/n = (e^n - 1)/n$.
On obtient $(e^n - 1)/n$ et non e^n/n. L'affirmation est fausse.

5. Affirmation 5 : fausse. On colorie chaque case parmi 16 en rouge, jaune ou noir.

Chaque case reçoit l'une des 3 couleurs, indépendamment des autres. Le nombre de coloriages est donc $3 \times 3 \times \ldots \times 3$ (16 facteurs), soit 3^{16}.

Le coefficient binomial « 3 parmi 16 » (le nombre proposé, avec 16 au-dessus de 3) vaut seulement 560 : il compte le choix de 3 cases parmi 16, ce qui n'a rien à voir avec un coloriage. L'affirmation est fausse.

Exercice 3 (5 points)

Points : A(0 ; 0 ; 1), B(1 ; 2 ; 3), C(3 ; 3 ; 1), E(2 ; −2 ; 2), F(3 ; 0 ; 4), G(5 ; 1 ; 2).

1. a. Montrer que B, C et E ne sont pas alignés.

On compare les vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{BE}$:

$\vec{BC} = (2 ; 1 ; -2)$ et $\vec{BE} = (1 ; -4 ; -1)$.
Ils ne sont pas colinéaires (les coordonnées ne sont pas proportionnelles : $2/1 \neq 1/(-4)$). Les points B, C et E ne sont donc pas alignés.

1. b. Justifier que $\vec{AF}$ est normal au plan (BCE).

$\vec{AF} = (3 ; 0 ; 3)$.
$\vec{AF} \cdot \vec{BC} = 3\times2 + 0\times1 + 3\times(-2) = 0$ et $\vec{AF} \cdot \vec{BE} = 3\times1 + 0\times(-4) + 3\times(-1) = 0$.
$\vec{AF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCE), donc il est normal à ce plan.

1. c. En déduire une équation cartésienne de (BCE).

Avec le vecteur normal $\vec{AF} = (3 ; 0 ; 3)$, que l'on peut simplifier en (1 ; 0 ; 1), le plan a une équation de la forme $x + z + d = 0$. Le point B(1 ; 2 ; 3) lui appartient :

$1 + 3 + d = 0 \iff d = -4$. D'où l'équation : $x + z - 4 = 0$.

2. a. Montrer que G n'appartient pas au plan (BCE).

Pour G(5 ; 1 ; 2) : $x + z - 4 = 5 + 2 - 4 = 3 \neq 0$. Donc $G \notin (BCE)$.

2. b. Montrer que $\vec{BE}$, $\vec{BC}$ et $\vec{AG}$ ne sont pas coplanaires.

On a $\vec{AG} = (5 ; 1 ; 1)$. Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur déterminant est nul. On calcule :

$\det(\vec{BE}, \vec{BC}, \vec{AG}) = 1\times(1\times1 - (-2)\times1) + 4\times(2\times1 - (-2)\times5) - 1\times(2\times1 - 1\times5)$
$= 1\times3 + 4\times12 - 1\times(-3) = 3 + 48 + 3 = 54 \neq 0$.
Le déterminant n'est pas nul, donc les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

2. c. En déduire que (AG) et (BCE) sont sécants.

$\vec{BE}$ et $\vec{BC}$ dirigent le plan (BCE). Comme $\vec{AG}$ n'est pas coplanaire avec eux, le vecteur directeur $\vec{AG}$ de la droite (AG) n'appartient pas au plan vectoriel de (BCE) : la droite (AG) n'est pas parallèle au plan. Une droite non parallèle à un plan le coupe, donc (AG) et (BCE) sont sécants.

3. a. Représentation paramétrique de (AG).

(AG) passe par $A(0 ; 0 ; 1)$ et est dirigée par $\vec{AG} = (5 ; 1 ; 1)$. Un point $M(x ; y ; z)$ vérifie $\vec{AM} = t\,\vec{AG}$:

$x = 5t,\ \ y = t,\ \ z = 1 + t,\quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$.

3. b. Coordonnées du point P.

P est sur (AG) et sur (BCE). On reporte $x = 5t$, $y = t$, $z = 1 + t$ dans $x + z - 4 = 0$:

$5t + (1 + t) - 4 = 0 \iff 6t - 3 = 0 \iff t = 1/2$.
Donc $P(5/2 ; 1/2 ; 3/2)$.

3. c. Montrer que P est le milieu de [EC].

On calcule le milieu de [EC] avec $E(2 ; -2 ; 2)$ et $C(3 ; 3 ; 1)$:

$((2 + 3)/2 ; (-2 + 3)/2 ; (2 + 1)/2) = (5/2 ; 1/2 ; 3/2) = P$.
P est bien le milieu de [EC].

4. Intersection des plans (BCE) et (ACG).

On cherche d'abord une équation de (ACG). Un vecteur normal est $\vec{AC} \wedge \vec{AG}$, avec $\vec{AC} = (3 ; 3 ; 0)$ et $\vec{AG} = (5 ; 1 ; 1)$:

$\vec{AC} \wedge \vec{AG} = (3 ; -3 ; -12)$, que l'on simplifie en $(1 ; -1 ; -4)$.
Le plan (ACG) a donc une équation de la forme $x - y - 4z + d = 0$; avec $A(0 ; 0 ; 1)$, on trouve $d = 4$, soit $x - y - 4z + 4 = 0$.

Les deux plans ont des vecteurs normaux non colinéaires : ils sont sécants selon une droite. Il reste à reconnaître cette droite. Les points C et E appartiennent à (BCE) par définition. On vérifie qu'ils appartiennent aussi à (ACG) :

$C(3 ; 3 ; 1) : 3 - 3 - 4 + 4 = 0$ et $E(2 ; -2 ; 2) : 2 + 2 - 8 + 4 = 0$.
C et E sont donc communs aux deux plans. L'intersection de (BCE) et (ACG) est la droite (CE).

Exercice 4 (5 points)

Étude de la fonction g

Rappel : $g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$ sur $[0 ; 2\pi]$.

1. a. Montrer que $g'(x) = -x\sin(x)$.

On dérive le produit $x\cos(x)$ puis $-\sin(x)$:

$g'(x) = (1 \times \cos x + x \times (-\sin x)) - \cos x = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin(x)$.

1. b. Justifier le tableau de variations de g.

Sur $[0 ; 2\pi]$, $x \geq 0$, donc $g'(x) = -x \sin(x)$ a le signe opposé à celui de $\sin(x)$:

sur $]0 ; \pi[$, $\sin(x) > 0$ donc $g'(x) < 0$: g est décroissante sur $[0 ; \pi]$;
sur $]\pi ; 2\pi[$, $\sin(x) < 0$ donc $g'(x) > 0$: g est croissante sur $[\pi ; 2\pi]$.
On calcule les valeurs aux bornes : $g(0) = 0 \times 1 - 0 = 0$; $g(\pi) = \pi \times (-1) - 0 = -\pi$; $g(2\pi) = 2\pi \times 1 - 0 = 2\pi$. Cela justifie le tableau (g part de 0, descend jusqu'à $-\pi$ en π, puis remonte jusqu'à 2π).

1. c. Montrer qu'il existe un unique réel α de $[\pi ; 2\pi]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Sur $[\pi ; 2\pi]$, g est continue et strictement croissante. De plus $g(\pi) = -\pi < 0$ et $g(2\pi) = 2\pi > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à une fonction strictement monotone, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[\pi ; 2\pi]$.

1. d. En déduire le tableau de signes de g sur $[0 ; 2\pi]$.

Sur $[0 ; \pi]$, g décroît de 0 à $-\pi$: $g(0) = 0$ puis $g(x) < 0$ sur $]0 ; \pi]$. Sur $[\pi ; 2\pi]$, g croît de $-\pi$ à 2π en s'annulant en α : $g(x) < 0$ sur $[\pi ; \alpha[$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha ; 2\pi]$. Au total :

$g(x) < 0$ sur $]0 ; \alpha[$, $g(0) = g(\alpha) = 0$, $g(x) > 0$ sur $]\alpha ; 2\pi]$.

Étude de la fonction f

Rappel : $f(x) = \sin(x) / x$ sur $]0 ; 2\pi]$.

2. a. Montrer que $f'(x) = g(x) / x^2$.

f est un quotient. On dérive (avec $u = \sin x$, $v = x$) :

$f'(x) = (\cos(x) \times x - \sin(x) \times 1) / x^2 = (x \cos x - \sin x) / x^2 = g(x) / x^2$.

2. b. Signe de f' sur $]0 ; 2\pi]$.

$x^2 > 0$ sur $]0 ; 2\pi]$, donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$. D'après la question 1.d :

$f'(x) < 0$ sur $]0 ; \alpha[$, $f'(\alpha) = 0$, $f'(x) > 0$ sur $]\alpha ; 2\pi]$.

2. c. Sens de variation de f sur $]0 ; 2\pi]$.

f est décroissante sur $]0 ; \alpha]$ puis croissante sur $[\alpha ; 2\pi]$: elle atteint son minimum en α.

2. d. Limite de f en 0.

On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0 :

$f(x) = \sin(x)/x = (\sin(x) - \sin(0)) / (x - 0) \to \sin'(0) = \cos(0) = 1$ quand $x \to 0$.
Donc $\lim_{(x \to 0)} f(x) = 1$.

3. Pour $0 < r < s < \pi$, montrer que $r/s < \sin(r)/\sin(s)$.

α appartient à $[\pi ; 2\pi]$, donc $\alpha \geq \pi$. Sur $]0 ; \pi[$, qui est inclus dans $]0 ; \alpha[$, on a $f' < 0$: f est strictement décroissante sur $]0 ; \pi[$. Comme $0 < r < s < \pi$:

$f(r) > f(s)$, c'est-à-dire $\sin(r)/r > \sin(s)/s$.
On multiplie par $r s > 0$, ce qui donne $s \sin(r) > r \sin(s)$. Enfin on divise par $s \sin(s) > 0$ (car $0 < s < \pi$ donne $\sin(s) > 0$) :

$\sin(r)/\sin(s) > r/s$, soit $r/s < \sin(r)/\sin(s)$.

Pour aller plus loin

Pour reprendre les points qui coincent, des Cours particuliers de maths à Paris permettent de travailler à son rythme, sujet après sujet.

Et pour réviser de façon intensive avant l’épreuve, un Stage terminale générale reprend les notions clés pendant les vacances.