

Corrigé du sujet de mathématiques

Baccalauréat général, enseignement de spécialité, Centres étrangers 2026 (jour 1)
Sujet 26-MATJ1G11

Voici une proposition de corrigé, exercice par exercice. Tous les calculs ont été refaits et vérifiés, et chaque résultat demandé est justifié. Les pistes de méthode sont signalées au fil de l'eau, pour comprendre le raisonnement et pas seulement retenir le résultat.

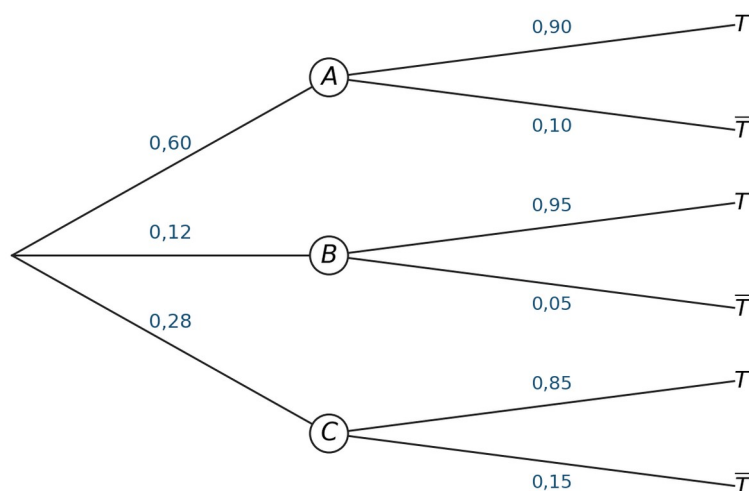
Exercice 1 (5 points)

Données : le stock contient 60 % de lames du fournisseur A, 12 % du fournisseur B et le reste du fournisseur C. Les taux de conformité sont 90 % pour A, 95 % pour B et 85 % pour C.

Partie A

1. Compléter l'arbre de probabilité.

Le reste du stock vient de C, donc $P(C) = 1 - 0,60 - 0,12 = 0,28$. Sur chaque fournisseur, la probabilité d'une lame non conforme est le complément du taux de conformité (par exemple $P_{A}(\bar{T}) = 1 - 0,90 = 0,10$).



2. Déterminer $P(A \cap T)$ et interpréter.

$$P(A \cap T) = P(A) \times P_{A}(T) = 0,60 \times 0,90 = 0,54.$$

Autrement dit, 54 % des lames du stock proviennent de A et sont conformes : si l'on prélève une lame au hasard, la probabilité qu'elle vienne de A et passe le test vaut 0,54.

3. Démontrer que $P(T) = 0,892$.

Les événements A, B et C forment une partition. Avec la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T) = 0,54 + 0,12 \times 0,95 + 0,28 \times 0,85.$$

$$P(T) = 0,54 + 0,114 + 0,238 = 0,892.$$

4. Sachant que la lame n'est pas conforme, probabilité qu'elle vienne de B (au millième).

On cherche une probabilité conditionnelle. La lame est non conforme avec la probabilité $P(\bar{T}) = 1 - 0,892 = 0,108$, et $P(B \cap \bar{T}) = P(B) \times P_{B}(\bar{T}) = 0,12 \times 0,05 = 0,006$.

$$P_{\bar{T}}(B) = P(B \cap \bar{T}) / P(\bar{T}) = 0,006 / 0,108 = 1/18 \approx 0,056.$$

Partie B

1. Paramètres de la loi binomiale.

On prélève 75 lames de façon indépendante, le tirage étant assimilé à un tirage avec remise. Chaque lame est non conforme avec la probabilité 0,108. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 75$ et $p = 0,108$.

2. Probabilité que 6 lames exactement soient non conformes (au millième).

$$P(X = 6) = C(75, 6) \times 0,108^6 \times 0,892^{69} \approx 0,120.$$

3. L'équipementier a-t-il raison ?

« Strictement plus de 8 » signifie $X \geq 9$. On calcule à la calculatrice :

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) \approx 1 - 0,578 \approx 0,422.$$

Cette probabilité, environ 0,422, est bien inférieure à 0,5. L'équipementier a donc raison.

Partie C

1. Espérance et variance de M_n .

Les variables X_1, \dots, X_n suivent toutes la même loi que X , avec $E(X) = np = 75 \times 0,108 = 8,1$ et $V(X) = np(1 - p) = 75 \times 0,108 \times 0,892 = 7,2252$. Par linéarité de l'espérance :

$$E(M_n) = (1/n)(E(X_1) + \dots + E(X_n)) = E(X) = 8,1.$$

Les variables sont indépendantes, donc la variance d'une somme est la somme des variances :

$$V(M_n) = (1/n^2)(V(X_1) + \dots + V(X_n)) = V(X)/n = 7,2252 / n.$$

2. Justifier que $P(|M_n - 8,1| \geq 2) \leq 1,8063 / n$.

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à M_n , avec $E(M_n) = 8,1$ et $a = 2$:

$$P(|M_n - 8,1| \geq 2) \leq V(M_n) / 2^2 = (7,2252 / n) / 4 = 1,8063 / n.$$

3. Valeur de n à partir de laquelle $P(|M_n - 8,1| < 2) \geq 0,95$.

En passant à l'événement contraire :

$$P(|M_n - 8,1| < 2) = 1 - P(|M_n - 8,1| \geq 2) \geq 1 - 1,8063 / n.$$

Il suffit donc que $1 - 1,8063 / n \geq 0,95$, soit $1,8063 / n \leq 0,05$, c'est-à-dire $n \geq 1,8063 / 0,05 = 36,126$. La valeur $n = 37$ convient.

Interprétation : dès 37 compétitions, la moyenne du nombre de lames non conformes par échantillon a au moins 95 % de chances de se situer entre 6,1 et 10,1, donc tout près de la valeur attendue 8,1.

Exercice 2 (5 points)

Vrai ou faux. Chaque réponse est justifiée et les questions sont indépendantes.

1. Affirmation 1 : vraie. $f(x) = 4e^{-x} + \cos(x) + \sin(x)$ est solution de (E) : $y' + y = 2\cos(x)$.

On dérive f puis on calcule $f'(x) + f(x)$:

$$f'(x) = -4e^{-x} - \sin(x) + \cos(x).$$

$$f'(x) + f(x) = (-4e^{-x} - \sin x + \cos x) + (4e^{-x} + \cos x + \sin x) = 2\cos(x).$$

f vérifie bien l'équation (E) : l'affirmation est vraie.

2. Affirmation 2 : vraie. Les courbes de $f(x) = 2x$ et $g(x) = \sin(x)$ ont un seul point d'intersection.

Les abscisses des points d'intersection vérifient $2x = \sin(x)$. On étudie $h(x) = 2x - \sin(x)$:

$$h'(x) = 2 - \cos(x) \geq 2 - 1 = 1 > 0.$$

h est strictement croissante sur \mathbb{R} , donc elle s'annule au plus une fois. Comme $h(0) = 0$, l'unique solution est $x = 0$: les deux courbes se coupent au seul point $O(0 ; 0)$.

L'affirmation est vraie.

3. Affirmation 3 : fausse. La suite $v_n = (2n + \sin(n)) / (n + 1)$ diverge.

Pour tout n , $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc on encadre :

$$(2n - 1)/(n + 1) \leq v_n \leq (2n + 1)/(n + 1).$$

Les deux suites encadrantes tendent vers 2. Par le théorème des gendarmes, $v_n \rightarrow 2$: la suite converge, elle ne diverge donc pas. L'affirmation est fausse.

4. Affirmation 4 : vraie. Pour $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$, on a $u_n = n^2$.

On procède par récurrence.

Initialisation. $u_1 = 1 = 1^2$: vraie au rang 1.

Hérédité. Si $u_n = n^2$, alors $u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.

La propriété est héréditaire, donc $u_n = n^2$ pour tout $n \geq 1$: l'affirmation est vraie.

5. Affirmation 5 : vraie. Pour $u_n = e^{-n}$ et $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, on a $\lim S_n = e/(e - 1)$.

S_n est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $e^{-1} = 1/e$, avec $0 < 1/e < 1$:

$$S_n = (1 - (1/e)^{n+1}) / (1 - 1/e).$$

Comme $(1/e)^{n+1} \rightarrow 0$, on obtient $S_n \rightarrow 1/(1 - 1/e) = e/(e - 1)$. L'affirmation est vraie.

Exercice 3 (4 points)

Repère : $(A ; A\vec{B}, A\vec{D}, A\vec{E})$, cube d'arête 1. On a donc $A(0 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 1 ; 0)$, $E(0 ; 0 ; 1)$, $F(1 ; 0 ; 1)$ et $H(0 ; 1 ; 1)$.

1. Coordonnées de I, J et K.

I est le milieu de [EF], J celui de [EH] et K celui de [AE] :

$$I(1/2 ; 0 ; 1), \quad J(0 ; 1/2 ; 1), \quad K(0 ; 0 ; 1/2).$$

2. a. Produit scalaire $A\vec{I} \cdot A\vec{J}$.

$$A\vec{I} = (1/2 ; 0 ; 1) \quad \text{et} \quad A\vec{J} = (0 ; 1/2 ; 1).$$

$$A\vec{I} \cdot A\vec{J} = (1/2)(0) + (0)(1/2) + (1)(1) = 1.$$

2. b. Mesure de l'angle \widehat{IAJ} au dixième de degré.

$$\|A\vec{I}\| = \|A\vec{J}\| = \sqrt{(1/4 + 1)} = \sqrt{5} / 2.$$

$$\cos(\widehat{IAJ}) = (A\vec{I} \cdot A\vec{J}) / (\|A\vec{I}\| \|A\vec{J}\|) = 1 / (5/4) = 4/5.$$

$$\widehat{IAJ} = \arccos(4/5) \approx 36,9^\circ.$$

3. a. Démontrer que $K\vec{C}$ est normal au plan (AIJ).

$$K\vec{C} = C - K = (1 ; 1 ; -1/2).$$

$$K\vec{C} \cdot A\vec{I} = 1 \times (1/2) + 1 \times 0 + (-1/2) \times 1 = 0 \quad \text{et} \quad K\vec{C} \cdot A\vec{J} = 1 \times 0 + 1 \times (1/2) + (-1/2) \times 1 = 0.$$

$K\vec{C}$ est orthogonal à $A\vec{I}$ et $A\vec{J}$, deux vecteurs non colinéaires du plan (AIJ) : il en est donc un vecteur normal.

3. b. Équation cartésienne du plan (AIJ).

Avec le vecteur normal $(1 ; 1 ; -1/2)$, une équation est $x + y - (1/2)z + d = 0$. Le point $A(0 ; 0 ; 0)$ appartient au plan, donc $d = 0$:

$$x + y - (1/2)z = 0.$$

4. a. Coordonnées du projeté orthogonal L de C sur (AIJ).

La droite (CL) passe par C(1 ; 1 ; 0) et est dirigée par le vecteur normal $K\vec{C}$. Un point s'écrit $(1 + t ; 1 + t ; -t/2)$. On l'injecte dans l'équation du plan :

$$(1 + t) + (1 + t) - (1/2)(-t/2) = 0 \iff 2 + 2t + t/4 = 0 \iff (9/4)t = -2 \iff t = -8/9.$$

L(1/9 ; 1/9 ; 4/9).

4. b. En déduire la distance de C au plan (AIJ).

$C\vec{L} = L - C = (-8/9 ; -8/9 ; 4/9)$, donc $CL = (1/9)\sqrt{(64 + 64 + 16)} = (1/9)\sqrt{144} = 12/9 = 4/3$.
La distance de C au plan (AIJ) vaut 4/3.

5. a. Représentation paramétrique de (IM).

Avec I(1/2 ; 0 ; 1) et M(1 ; m ; 1), on a $I\vec{M} = (1/2 ; m ; 0)$. Un point de (IM) s'écrit I + s $I\vec{M}$:

$$x = (1/2)s + 1/2, \quad y = ms, \quad z = 1, \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

5. b. (IM) et (KC) sont-elles coplanaires quelle que soit m ?

La droite (KC) est dirigée par $K\vec{C} = (1 ; 1 ; -1/2)$. Les deux droites sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $I\vec{M}$, $K\vec{C}$ et $K\vec{I} = (1/2 ; 0 ; 1/2)$ sont coplanaires, c'est-à-dire si leur déterminant est nul. Le calcul donne :

$$\det(I\vec{M}, K\vec{C}, K\vec{I}) = 1/4 - (3/4)m.$$

Ce déterminant s'annule uniquement pour $m = 1/3$. Les droites (IM) et (KC) ne sont donc coplanaires que dans ce cas précis : on ne peut pas l'affirmer pour toute valeur de m. La réponse est non.

Exercice 4 (6 points)

Rappel : $f(x) = \ln(x) / x^2$ sur $]0 ; +\infty[$.

Partie A

1. a. Limites de f aux bornes de $]0 ; +\infty[$.

En 0 : $\ln(x) \rightarrow -\infty$ et $x^2 \rightarrow 0^+$, donc $f(x) \rightarrow -\infty$. En $+\infty$: par croissances comparées, x^2 l'emporte sur $\ln(x)$, donc $f(x) \rightarrow 0$.

$$\lim_{(x \rightarrow 0^+)} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{(x \rightarrow +\infty)} f(x) = 0.$$

1. b. Interprétation graphique.

La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe, et la droite $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale en $+\infty$.

2. Montrer que $f'(x) = (1 - 2\ln(x)) / x^3$.

On dérive le quotient (ou le produit $\ln(x) \times x^{-2}$) :

$$f'(x) = (1/x) \times x^{-2} + \ln(x) \times (-2x^{-3}) = (1 - 2\ln(x)) / x^3.$$

3. Tableau de variation de f.

Comme $x^3 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $1 - 2\ln(x)$, positif lorsque $\ln(x) < 1/2$, soit $x < \sqrt{e}$:

f est croissante sur $]0 ; \sqrt{e}]$ puis décroissante sur $[\sqrt{e} ; +\infty[$.

Le maximum est atteint en \sqrt{e} : $f(\sqrt{e}) = \ln(\sqrt{e}) / (\sqrt{e})^2 = (1/2) / e = 1/(2e)$.

Aux bornes, f tend vers $-\infty$ en 0 et vers 0 en $+\infty$.

4. Équation réduite de la tangente Δ en A (abscisse 1).

$$f(1) = \ln(1)/1 = 0 \quad \text{et} \quad f'(1) = (1 - 2\ln 1)/1 = 1.$$

$$\Delta : y = f(1)(x - 1) + f(1) = x - 1.$$

5. Vérifier que $f'(x) = (-5 + 6\ln(x)) / x^4$.

On dérive $f'(x) = (1 - 2\ln(x)) x^{-3}$:

$$f''(x) = (-2/x) x^{-3} + (1 - 2\ln(x))(-3x^{-4}) = x^{-4}(-2 - 3 + 6\ln(x)) = (-5 + 6\ln(x)) / x^4.$$

6. a. Convexité de f et points d'inflexion.

$x^4 > 0$, donc $f''(x)$ a le signe de $-5 + 6\ln(x)$, positif lorsque $\ln(x) > 5/6$, soit $x > e^{5/6}$:

f est concave sur $]0 ; e^{5/6}]$ et convexe sur $[e^{5/6} ; +\infty[$.

f'' s'annule en changeant de signe en $x = e^{5/6}$: la courbe admet un point d'inflexion de coordonnées $(e^{5/6} ; (5/6)e^{-5/3})$.

6. b. En déduire que $x - 1 \geq \ln(x)/x^2$ sur $]0 ; e^{5/6}]$.

Sur $]0 ; e^{5/6}]$, f est concave, donc sa courbe reste sous chacune de ses tangentes.

Comme 1 appartient à cet intervalle, la courbe est en particulier sous la tangente Δ tracée en A. Donc, pour tout x de $]0 ; e^{5/6}]$:

$$f(x) \leq x - 1, \text{ c'est-à-dire } \ln(x)/x^2 \leq x - 1, \text{ soit } x - 1 \geq \ln(x)/x^2.$$

7. Justifier l'inégalité aussi sur $[e^{5/6} ; +\infty[$.

Sur cet intervalle, on n'a plus la concavité, mais on majore directement. Le maximum de f vaut $1/(2e)$, donc $f(x) \leq 1/(2e) < 1$ pour tout x . Par ailleurs $e^{5/6} \geq 2$ (car $5/6 \geq \ln 2$), donc pour $x \geq e^{5/6}$ on a $x \geq 2$, d'où $x - 1 \geq 1$. On obtient :

$$x - 1 \geq 1 > 1/(2e) \geq f(x) = \ln(x)/x^2.$$

L'inégalité $x - 1 \geq \ln(x)/x^2$ reste donc vraie sur $[e^{5/6} ; +\infty[$.

Partie B

Rappel : $I_n = \int_1^n (\ln(x)/x^2) dx$, pour n entier naturel non nul.

1. Interprétation graphique de I_n .

Sur $[1 ; n]$, on a $\ln(x) \geq 0$ et $x^2 > 0$, donc $f(x) \geq 0$. I_n représente alors l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites verticales $x = 1$ et $x = n$.

2. Montrer que (I_n) est croissante.

On compare deux termes consécutifs :

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} (\ln(x)/x^2) dx.$$

Sur $[n ; n+1]$, avec $n \geq 1$, on a $x \geq 1$ donc $\ln(x) \geq 0$ et l'intégrande est positif. L'intégrale est donc positive, soit $I_{n+1} \geq I_n$: la suite est croissante.

3. Compléter le script Python.

Les rectangles ont une largeur 1. Le premier, sur $[1 ; 2]$, a pour hauteur le maximum $1/(2e)$. Sur chaque intervalle $[i ; i+1]$ suivant, f est décroissante, donc la hauteur est $f(i) = \ln(i)/i^2$. On ajoute donc $\ln(i)/i^2$ à chaque tour de boucle :

```
from math import *
S = 1/(2*exp(1))
for i in range (2,10):
    S = S + log(i)/i**2
print(S)
```

4. Montrer, par intégration par parties, que $I_n = (n - 1 - \ln(n)) / n$.

On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1/x^2$, d'où $u'(x) = 1/x$ et $v(x) = -1/x$:

$$I_n = [-\ln(x)/x]_1^n - \int_1^n (-1/x)(1/x) dx = [-\ln(x)/x]_1^n + \int_1^n (1/x^2) dx.$$
$$I_n = (-\ln(n)/n - 0) + [-1/x]_1^n = -\ln(n)/n - 1/n + 1 = (n - 1 - \ln(n)) / n.$$

5. Limite de (I_n) en $+\infty$.

On écrit $I_n = 1 - 1/n - \ln(n)/n$. Quand $n \rightarrow +\infty$, $1/n \rightarrow 0$ et $\ln(n)/n \rightarrow 0$ (croissances comparées), donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1.$$

Pour aller plus loin

Pour reprendre les points qui coïncident, des [Cours particuliers de maths](#) permettent de travailler à son rythme, sujet après sujet.

Et pour consolider les bases avant l'épreuve, un [Stage remise à niveau terminale](#) reprend les notions clés pendant les vacances.