Code épreuve : 298

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2013

Conception : ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES

Lundi 6 mai 2013, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Exercice 1

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$.

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq 1$.

b) Étudier les variations de la suite (u_n).

c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

2) a) Écrire une fonction Pascal qui renvoie la valeur de u_n.

b) En déduire un programme, rédigé en Turbo Pascal, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a : $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Pour tout entier naturel k, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.

b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1})$.

c) Donner pour finir la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.

Exercice 2

1) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.
b) Déterminer une base (a) de Ker$f$ ainsi qu'une base (b, c) de Imf.
c) Montrer que Imf^2 = Ker$f$.

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$, ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul.

En désignant par M la matrice de g dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, on a donc :

$$M^2 \neq 0 \text{ et } M^3 = 0$$

On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que Img^2 = Ker$g$.

2) a) Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de g.
b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est effectivement la seule valeur propre de g.
c) En déduire, toujours en raisonnant par l'absurde, que g n'est pas diagonalisable.

3) a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.
b) Montrer que $(u, g(u), g^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.
c) Donner la matrice N de g dans la base $\mathcal{B}'$.
d) Déterminer Img et donner sa dimension. En déduire une base de Ker$g$. Pour finir, déterminer Img^2 puis conclure.

Exercice 3

Dans cet exercice, la lettre n désigne un entier naturel.
On dispose d'une urne contenant au départ n boules blanches et $(n+2)$ boules noires. On dispose également d'une réserve infinie de boules blanches et de boules noires.
Pour tout entier naturel j, on dit que l'urne est dans l'état j lorsqu'elle contient j boules blanches et $(j+2)$ boules noires. Au départ, l'urne est donc dans l'état n.

On réalise une succession d'épreuves, chaque épreuve se déroulant selon le protocole suivant :
Pour tout entier naturel j non nul, si l'urne est dans l'état j, on extrait une boule au hasard de l'urne.

- Si l'on obtient une boule blanche, alors cette boule n'est pas remise dans l'urne et on enlève de plus une boule noire de l'urne, l'urne est alors dans l'état $(j-1)$.
- Si l'on obtient une boule noire, alors cette boule est remise dans l'urne et on remet en plus une boule blanche et une boule noire dans l'urne, l'urne est alors dans l'état $(j+1)$.

1) Dans cette question, on suppose que $n = 1$ (l'urne contient donc une boule blanche et 3 boules noires) et on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches encore présentes dans l'urne après la première épreuve et X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches encore présentes dans l'urne après la deuxième épreuve.
On admet que X_1 et X_2 sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

a) Donner la loi de X_1.
b) Utiliser la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de X_2.
c) Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite ci-dessus.

On rappelle que random(n) renvoie au hasard un entier compris entre 0 et $n-1$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et pour qu'il affiche les valeurs des variables aléatoires X_1 et X_2.

```
Program simul ;
Var X1, X2, tirage : integer ;
Begin
Randomize ;
tirage : = random(4) ; If tirage = 0 then X1 : = ------ else X1 : = ------ ;
If (X1 = 0)  then  X2 : = ------
             Else  begin    tirage : = random(6) ;
                            If tirage <= 1 then X2 : = ------ else X2 : = ------ ;
                   end ;
Writeln (X1, X2) ;
end.
```

On revient au cas général (n est donc un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1) et on décide que les tirages s'arrêtent dès que l'urne ne contient plus de boules blanches.
Pour tout j de $\mathbb{N}$, on note alors E_j l'événement : « l'urne est dans l'état j initialement et les tirages s'arrêtent au bout d'un temps fini ». On pose $e_j = P(E_j)$ et l'on a bien sûr $e_0 = 1$.

2) Montrer, en considérant les deux résultats possibles du premier tirage (c'est-à-dire au début du jeu lorsque l'urne est dans l'état n) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e_n = \frac{n}{2n+2} e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2} e_{n+1}.$$

3) a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n \geq e_{n+1}$.
b) En déduire que la suite (e_n) est convergente.

On admet pour la suite que $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n = 0$.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = (n+1)e_n$.
a) Pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}^*$, écrire u_{n+1} en fonction de u_n et u_{n-1}.
b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et e_1.
c) Montrer enfin que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n = (2e_1 - 1)\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{n+1}$.

Déterminer la valeur de e_1, puis en déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de e_n en fonction de n.

Problème

1) On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$. En déduire sans calcul $\int_{-1}^0 f(x)\,dx$.
b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

Tournez la page S.V.P.

On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et admettant f comme densité.

2) a) Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.

b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

3) Montrer que la fonction de répartition de X, notée F_X, est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2} & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.

4) a) Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.

b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X.

c) En déduire qu'une densité de Y est la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) \text{ si } x \in [0, 1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

d) Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.

5) On considère deux variables aléatoires U et V, elles aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.
On pose $I = \text{Inf}(U, V)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a $I(\omega) = \text{Min}(U(\omega), V(\omega))$.
On admet que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et on rappelle que, pour tout réel x, on a $P(I > x) = P([U > x] \cap [V > x])$.
Pour finir, on note F_I la fonction de répartition de I.

a) Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x.

b) En déduire que I suit la même loi que Y.

6) On considère plus généralement n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ($n \ge 2$), toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $I_n = \text{Inf}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Déterminer la fonction de répartition de I_n et montrer que la suite (I_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

7) Simulation informatique de la loi de Y.
Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de Y.

```
Function y : real ;
Var   u, v : real ;
Begin
   Randomize ;
   u : = ------ ; v : = ------ ;
   If (u < v) then y : = ------ else y : = ------ ;
End ;
```


IMPRIMERIE NATIONALE – 13 1248 – D'après documents fournis