MATHÉMATIQUES (options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L)

Les épreuves orales de mathématiques concernent les candidats admissibles dans les options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L. Sur chacune des 4 sessions de 4 jours, ces épreuves ont mobilisé 3 à 5 jurys par demi-journée.

1. Procédure d'interrogation

Le sujet proposé aux candidats comprend deux parties:

- un *exercice principal* préparé pendant 30 minutes et portant sur l'une des trois parties suivantes du programme: *algèbre, probabilités et analyse*. De plus, une *question de cours* en rapport avec le thème de l'exercice fait partie de l'exercice principal.
- un *exercice sans préparation* portant sur une partie différente de celle de l'exercice principal, permettant de tester en temps réel les qualités de réactivité des candidats.

Rappelons que dans tous les cas, chaque candidat est interrogé en probabilités, soit au titre de l'exercice principal (20 à 25 minutes), soit à celui de l'exercice sans préparation (5 à 10 minutes).

2. Résultats statistiques

Par option, les notes moyennes obtenues sont les suivantes:

- *option scientifique* (458 candidats): 11,15 (11,32 en 2012)
- *option économique* (161 candidats): 9,62 (9,77 en 2012);
- *option technologique* (28 candidats): 10,18 (12,59 en 2012);
- *option littéraire B/L* (17 candidats): 11,71 (10,71 en 2012).

3. Commentaires

A l'issue des épreuves orales de mathématiques, on peut tirer un certain nombre d'enseignements.

Tout d’abord, les rapports de jury des concours précédents ainsi que les échanges dans la commission de mathématiques lors de la journée des classes préparatoires, sont manifestement répercutés auprès des admissibles : ainsi, les prestations d’une majorité de candidats sont essentiellement orales et le tableau n’est utilisé que comme support de l’exposé.
Ensuite, la « règle du jeu » est assez bien respectée : les candidats passent les questions non traitées ou inachevées et poursuivent l’exposé.
Enfin, la question courte en fin d’interrogation joue son rôle d’amortisseur ou d’amplificateur de la note de l’exercice principal.

Option scientifique

Le niveau général est bon, comparable à celui du concours 2012 : les notes s’étendent entre 3 et 20 et l’écart-type de 3,41 permet de classer correctement les admissibles.
Il y a quelques candidats excellents dont les exposés très clairs, concis et exhaustifs s’appuient sur une argumentation pertinente qui leur permet de prouver les résultats attendus.
Cette année, le « principe des vases communicants » a privilégié l’algèbre linéaire et bilinéaire au détriment de l’analyse (suites, fonctions réelles, calcul différentiel et intégral).
L’ensemble des examinateurs a constaté que l’abstraction des sujets d’algèbre n’est pas un handicap insurmontable comme ce fut le cas durant de nombreuses années : les exposés sont clairs et argumentés rigoureusement.

En revanche, une majorité de candidats éprouvent de grandes difficultés à résoudre les sujets d'analyse « pure », même les plus simples. Les notions les plus élémentaires - étude de fonctions, représentations graphiques, théorèmes classiques (accroissements finis, valeurs intermédiaires, etc.) – ne sont pas du tout maîtrisées.
Quant au niveau des connaissances en probabilités, il reste assez stable.

Les progrès substantiels constatés en algèbre et le déclin des connaissances en analyse peuvent en partie être expliqués par les thèmes successifs de l'épreuve écrite de Mathématiques HEC qui font souvent appel à des connaissances majoritairement algébriques.
Il est alors possible que les professeurs insistent plus sur l'apprentissage de l'algèbre !

Option économique

Le décrochage du niveau des candidats de cette option par rapport à ceux de l'option scientifique se confirme cette année encore.
Les observations relevées l'an passé restent non seulement d'actualité mais tous les points négatifs se sont renforcés.
Les concepts fondamentaux sont peu maîtrisés et font parfois l'objet de graves confusions
(fonction de répartition et densité, « dimension » d'une application linéaire), le cours n'est pas bien assimilé (méthode des rectangles, définition de la convergence d'une intégrale généralisée), les explications utilisent un langage mathématique très approximatif qui nuit à la rigueur de l'exposé, les techniques de calculs élémentaires font souvent défaut (limites de fonctions) et les confusions entre condition nécessaire et condition suffisante se sont accrues : on retrouve les lacunes non comblées héritées du secondaire.
La présence de quantificateurs dans un sujet revêt souvent pour les candidats, un caractère purement « décoratif » tant ils sont mal utilisés voire ignorés.
On note enfin dans l'attitude de nombre de candidats un degré de maturité assez faible qui se traduit par une certaine difficulté à se concentrer et à établir des liens entre les questions d'un exercice, et par une prise d'initiative très « timide ».

Option technologique

Les niveaux des candidats (28 admissibles) sont très contrastés avec une moyenne significativement inférieure à celle du concours 2012 et un écart-type plus élevé (4,35 cette année contre 4,09 en 2012).

Option littéraire B/L

Sur les 17 candidats admissibles présents, la moyenne est de 11,71 et s'accompagne d'un écart-type très élevé de 4,74.
Il est fort probable que le choix de l'épreuve à option de l'écrit (sciences sociales ou mathématiques) constitue l'explication majeure de cette dispersion des notes.

4. Remarques

Le jury recommande aux futurs candidats d'éviter de réciter à l'oral des recettes qu'ils ne maîtrisent pas : même si elles peuvent parfois faire illusion dans un problème d'écrit où la part d'initiative personnelle est réduite, ces phrases ou ces formules apprises par cœur et qui tiennent lieu de « prêt-à penser », passent difficilement le filtre de l'épreuve orale.
A partir du concours 2015, les sujets de mathématiques se baseront sur le nouveau programme de mathématiques des classes préparatoires commerciales

2. SUJETS DE L'OPTION ÉCONOMIQUE

Exercice principal E20

1. Question de cours : Le schéma binomial.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $W_n = \sum_{k=1}^{n} kX_k$ et $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2.a) Calculer l'espérance $E(W_n)$ et la variance $V(W_n)$ de la variable aléatoire W_n.

b) Calculer les probabilités $P(W_n = 0)$ et $P(W_n = s_n)$.

c) Calculer selon les valeurs de n, la probabilité $P(W_n = 3)$.

3. Montrer que pour tout $k \in [\![0, s_n]\!]$, on a : $P(W_n = k) = P(W_n = s_n - k)$.

4.a) Déterminer pour tout $j \in [\![0, s_n]\!]$, la loi de probabilité conditionnelle de W_{n+1} sachant $(W_n = j)$.

b) En déduire les relations :

$$P(W_{n+1} = k) = \begin{cases} \frac{1}{2} P(W_n = k) & \text{si } k \leqslant n \\ \frac{1}{2} P(W_n = k) + \frac{1}{2} P(W_n = k - n - 1) & \text{si } n + 1 \leqslant k \leqslant s_n \\ \frac{1}{2} P(W_n = k - n - 1) & \text{si } s_n + 1 \leqslant k \leqslant s_{n+1} \end{cases}.$$

Exercice sans préparation E20

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^3}$.

2. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

Exercice principal E24

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On jette n fois de suite un dé pipé dont les 6 faces ne comportent que les nombres 1, 2 et 3, et on suppose que les résultats des lancers sont indépendants.

À chaque lancer, la probabilité d'obtenir 1 est p, celle d'obtenir 2 est q et celle d'obtenir 3 est $1-p-q$, où p et q sont deux paramètres réels strictement positifs vérifiant $p+q<1$.

Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (resp. 2) obtenus en n lancers consécutifs.

a) Quelles sont les lois respectives de X et Y ?

b) Déterminer la loi du couple (X, Y).

c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Déterminer le biais et le risque quadratique de l'estimateur $T_n = \dfrac{X}{n+1}$ du paramètre p.

3. On suppose dans cette question que le nombre de lancers effectués avec ce dé est une variable aléatoire N suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (resp. 2) obtenus en N lancers consécutifs.

a) Déterminer les lois de X et Y respectivement.

b) Vérifier que X et Y sont indépendantes.

c) $T = \dfrac{X}{N+1}$ est-il un estimateur sans biais du paramètre p ?

Exercice sans préparation E24

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est diagonalisable, A^3 l'est aussi.

2. On suppose maintenant que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^3.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice principal E25

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X.

1. Question de cours : Écrire sous forme d'intégrale, la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite appartienne à un segment $[a, b]$. Dans quel théorème cette probabilité apparaît-elle comme une limite ?

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de X. On pose : $Y = |X|$ (valeur absolue de X).

2.a) Montrer que Y admet une espérance et une variance et les calculer.

b) Calculer $E(XY)$.

3. On pose : $Z = X + Y$.

a) Calculer $P(Z = 0)$.

b) Exprimer la fonction de répartition de Z à l'aide de Φ et indiquer l'allure de sa représentation graphique.

c) La variable aléatoire Z admet-elle une densité ? Est-elle discrète ?

4. Soit $y \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer à l'aide de Φ, selon les valeurs de y, la probabilité $P([X \leqslant 1] \cap [Y \leqslant y])$.

b) Pour quelles valeurs de y les événements $(X \leqslant 1)$ et $(Y \leqslant y)$ sont-ils indépendants ?

Exercice sans préparation E25

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$.

1. Montrer que $A^2 = 0$.

2. Montrer que l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Exercice principal E28

Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

On définit la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations :

$$Z_0 = \frac{X_0}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ Z_n = \frac{Z_{n-1} + X_n}{2}\ .$$

2.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer Z_n en fonction des variables aléatoires $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

b) Les variables aléatoires Z_{n-1} et X_n sont-elles indépendantes ?

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire $2^{n+1} Z_n$ suit la loi uniforme discrète sur $[\![0, 2^{n+1} - 1]\!]$.

4. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera la loi.

Exercice sans préparation E28

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{x^n - 1}\,\mathrm{d}x$.

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{x^n - 1}\,\mathrm{d}x$.

Étudier la nature (convergence ou divergence) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice principal E29

1. Question de cours : Énoncer une formule de Taylor à l'ordre p avec reste intégral, applicable à une fonction définie sur $[0,1]$, de classe C^{p+1} sur cet intervalle ($p \in \mathbb{N}$).

2. Soit x un réel de l'intervalle $[0,1[$.

a) Justifier pour tout réel $t \in [0,x]$, l'encadrement : $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.

b) Démontrer l'égalité : $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

3. Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $P(X=n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

a) Montrer que $P(X \in \mathbb{N}^*) = 1$.

b) Étudier l'existence des moments de X.

c) Montrer que pour tout réel $s \in [0,1]$, la variable aléatoire s^X admet une espérance, que l'on note $E(s^X)$, et vérifier que si $s \in]0,1[$, on a :

$$E(s^X) = \frac{s + (1-s)\ln(1-s)}{s}.$$

d) Pour tout $s \in [0,1]$, on pose : $\phi(s) = E(s^X)$. Montrer que la fonction ϕ est continue sur le segment $[0,1]$. Est-elle dérivable sur cet intervalle ?

e) Calculer, lorsqu'elles existent, l'espérance et la variance de $X s^X$.

Exercice sans préparation E29

1. Montrer que l'application $f : x \mapsto x^3 + x^2 + x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bijective.

2. Quelles sont les fonctions polynômes surjectives ?

3. Quelles sont les fonctions polynômes injectives ?

Exercice principal E32

1. Question de cours : Formule des probabilités totales.

Soit p et q deux réels vérifiant : $0 < p < 1$ et $p + 2\,q = 1$. On note Δ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\Delta = \begin{pmatrix} p & q & q \\ q & p & q \\ q & q & p \end{pmatrix}.$$

2. Justifier que Δ est une matrice diagonalisable.

3. Soit D la matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à Δ dont les éléments diagonaux sont écrits dans l'ordre croissant. Que peut-on dire de la limite des coefficients de D^n lorsque l'entier naturel n tend vers $+\infty$.

Un village possède trois restaurants R_1, R_2 et R_3. Un couple se rend dans l'un de ces trois restaurants chaque dimanche. À l'instant $n = 1$ (c'est-à-dire le premier dimanche), il choisit le restaurant R_1, puis tous les dimanches suivants (instants $n = 2, n = 3$, etc.), il choisit le même restaurant que le dimanche précédent avec la probabilité p ou change de restaurant avec la probabilité $2\,q$, chacun des deux autres restaurants étant choisis avec la même probabilité.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

4. Calculer la probabilité que le couple déjeune dans le restaurant R_1, respectivement R_2, respectivement R_3, le n-ième dimanche ($n \geqslant 2$).

5. Soit T la variable aléatoire égale au rang du premier dimanche où le couple retourne au restaurant R_1, s'il y retourne, et 0 sinon.

a) Déterminer la loi de T.

b) Établir l'existence de l'espérance et de la variance de T et les calculer.

6. Écrire un programme en Pascal permettant de calculer la fréquence de visites du restaurant R_1 par le couple en 52 dimanches.

Exercice sans préparation E32

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction réelle f_n par : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x + 1 - \dfrac{e^x}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel négatif x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.

2.a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.

b) Calculer la limite ℓ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. On pose : $y_n = x_n - \ell$. Déterminer un équivalent de y_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice principal E33

1. Question de cours : Condition suffisante de diagonalisabilité d'une matrice.

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ possède des solutions non nulles si et seulement si $(\lambda^2 - 1)(\lambda - 2) = 0$. Donner alors les solutions de ce système.

b) En déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n$.

a) Quelle relation a-t-on entre X_{n+1}, X_n et A ?

b) En déduire l'expression de Y_n en fonction de n, D et Y_0.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur x_0, x_1 et x_2 pour que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente (respectivement, pour que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$ soit convergente).

4. On pose $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & -4 \\ 8 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a,b) = \begin{pmatrix} 5b & a & -2b \\ 4b & 3b & a-4b \\ -2a+8b & a & 2a-5b \end{pmatrix}$.

a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B. La réciproque est-elle vraie ?

b) En déduire que $M(a,b)$ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

c) Déterminer les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels la suite $\left(M(a,b)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle, c'est-à-dire que chacun de ses neuf coefficients est le terme général d'une suite convergeant vers 0.

Exercice sans préparation E33

Soit $p \in]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = -1) = p, \text{ et } P(X_n = 1) = 1 - p$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$.

1. Calculer l'espérance $E(Z_n)$ de Z_n et $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Z_n)$.

2. Quelle est la loi de Z_n ?

3. Pour quelles valeurs de p, les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice principal E34

1. Question de cours : Soit f une fonction de classe C^2 définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles.
Rappeler la définition d'un point critique et la condition suffisante d'extremum local en un point.

Soit X une variable aléatoire discrète finie définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, et on suppose que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(X = x_i) \neq 0$.

On définit l'entropie de X par : $H(X) = -\dfrac{1}{\ln 2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \ln \big(P(X = x_i)\big)$.

2. Soit x_1, x_2, x_3 et x_4 quatre réels distincts. On considère un jeu de 32 cartes dont on tire une carte au hasard.
Soit X la variable aléatoire prenant les valeurs suivantes :

- x_1 si la carte tirée est rouge (coeur ou carreau) ;
- x_2 si la carte tirée est un pique ;
- x_3 si la carte tirée est le valet, la dame, le roi ou l'as de trèfle ;
- x_4 dans les autres cas.

On tire une carte notée C et un enfant décide de déterminer la valeur $X(C)$ en posant dans l'ordre les questions suivantes auxquelles il lui est répondu par "oui" ou par "non". La carte C est-elle rouge ? La carte C est-elle un pique ? La carte C est-elle le valet, la dame, le roi ou l'as de trèfle ?
Soit N la variable aléatoire égale au nombre de questions posées (l'enfant cesse de poser des questions dès qu'il a obtenu une réponse "oui").

a) Calculer l'entropie $H(X)$ de X.

b) Déterminer la loi et l'espérance $E(N)$ de N. Comparer $E(N)$ et $H(X)$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles telle que : $f(x, y) = x \ln x + y \ln y + (1 - x - y) \ln(1 - x - y)$.

a) Préciser le domaine de définition de f. Dessiner ce domaine dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

b) Montrer que f ne possède qu'un seul point critique et qu'en ce point, f admet un extremum local.

c) Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs x_1, x_2 et x_3 avec les probabilités non nulles p_1, p_2 et p_3 respectivement.
Calculer $H(X)$ et montrer que $H(X)$ est maximale lorsque $p_1 = p_2 = p_3 = \dfrac{1}{3}$.

Exercice sans préparation E34

On rappelle l'identité remarquable : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = 0$, $AB = BA$ et B inversible.
Montrer que $A + B$ est inversible.

Exercice principal E40

1. Question de cours : Critères de convergence d'une intégrale sur un intervalle de type $[a, +\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$. On pose alors : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que f est monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telles que :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{x+t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad h(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t\,.$$

a) Soit φ la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t} & \text{si } t \in]0,1] \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

Montrer que φ est continue sur le segment $[0,1]$.

b) En déduire que la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer de même que la fonction h est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = \ln(x+1) - \ln x + g(x) + h(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

4. À l'aide de l'encadrement $0 \leqslant \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+t} \leqslant \dfrac{t}{x^2}$ valable pour tout $x > 0$ et pour tout $t \geqslant 0$, montrer que $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation E40

Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1,2\}$, $P(Y=1) = P(Y=2) = \dfrac{1}{2}$. On pose : $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.

2. On admet que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}$. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?