ORAL HEC 2015

MATHEMATIQUES

Options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L

Les épreuves orales de mathématiques concernent les candidats admissibles dans les options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L. Elles ont mobilisé 4 à 5 jurys par demi-journée afin de pouvoir interroger l'ensemble des 657 candidats admissibles présents.

1. Procédure d'interrogation

Le mode d'interrogation reste identique à celui des concours précédents : le sujet proposé aux candidats, quelle que soit l'option dont ils sont issus, comprend deux parties:

- un *exercice principal* préparé pendant 30 minutes et portant sur l'une des trois parties suivantes du programme: *algèbre, probabilités et analyse.* De plus, une *question de cours* en rapport avec le thème de l'exercice fait partie de l'exercice principal ;
- un *exercice sans préparation* portant sur une partie différente de celle de l'exercice principal, permettant de tester en temps réel les qualités de réactivité des candidats.

Rappelons que dans tous les cas, chaque candidat est interrogé en probabilités, soit au titre de l'exercice principal (20 à 25 minutes), soit à celui de l'exercice sans préparation (5 à 10 minutes).

2. Commentaires

A l'issue des épreuves orales de mathématiques, on peut tirer un certain nombre d'enseignements.
Tout d'abord, les rapports de jury des concours précédents ainsi que les échanges dans la commission de mathématiques lors de la journée des classes préparatoires, sont manifestement répercutés auprès des admissibles : ainsi, les prestations d'une majorité de candidats sont essentiellement orales et le tableau n'est utilisé que comme support de l'exposé.
La « règle du jeu » est assez bien respectée : les candidats passent les questions non traitées ou inachevées et poursuivent l'exposé.
L'exercice sans préparation posé en fin d'interrogation joue son rôle d'amortisseur ou d'amplificateur de la note de l'exercice principal.

Malgré les mises en garde précisées dans le rapport de l'an passé, le jury continue d'observer chez nombre de candidats un certain formatage et il recommande aux futurs candidats d'éviter de réciter à l'oral des recettes qu'ils ne maîtrisent pas : même si elles peuvent parfois faire illusion dans un problème d'écrit où la part d'initiative personnelle est réduite, ces phrases ou ces formules apprises par cœur et qui tiennent lieu de « prêt-à penser », passent difficilement le filtre de l'épreuve orale.
Un certain nombre de candidats utilisent dans leurs argumentations des concepts qui dépassent le cadre du programme mais sont dans l'incapacité de manipuler des notions

simples. Il serait préférable de connaître les définitions de base plutôt que de tenter d'appliquer des recettes apprises par cœur.
On note aussi de nombreuses erreurs dans des calculs élémentaires (dérivations, primitives de fonctions simples), ou encore des résultats non simplifiés à leur plus simple expression.
Enfin, le concours 2015 inaugurait l'introduction de Scilab en remplacement de Pascal dans les options S et E. A cet égard, les jurys ont constaté qu'un nombre non négligeable de candidats était insuffisamment préparé pour répondre aux questions faisant appel à Scilab :

Aussi, le jury de mathématiques réitère aux futurs candidats les recommandations qu'il avait faites dans les rapports précédents : une très solide assimilation du cours et une préférence pour le raisonnement plutôt que pour la récitation de formules mal comprises.

3. Résultats statistiques

Par option, les notes moyennes obtenues sont les suivantes:

- *option scientifique* (414 candidats): 11,22 (11,35 en 2014)
- *option économique* (203 candidats): 9,11 (10,42 en 2014);
- *option technologique* (23 candidats): 12,09 (10,73 en 2014);
- *option littéraire B/L* (17 candidats): 10,12 (11,06 en 2014).

Option scientifique

Le niveau général est bon, équivalent à celui du concours 2014 ; les notes s'étendent entre 2 et 20 et l'écart-type de 3,72 permet de classer correctement les admissibles.
Il y a quelques candidats excellents dont les exposés s'appuient sur une argumentation pertinente qui leur permet de prouver les résultats attendus. Toutefois, on assiste d'année en année à une diminution du nombre de ces candidats exceptionnels.
Cette année encore, les sujets d'analyse (suites, fonctions réelles, calcul différentiel et intégral) posent d'importants problèmes à une majorité de candidats : les notions les plus élémentaires - étude de fonctions, représentations graphiques, convexité et concavité, théorèmes classiques – ne sont pas du tout maîtrisées.

Option économique

Le décrochage du niveau des candidats de cette option par rapport à ceux de l'option scientifique observé depuis quelques années avait connu un coup d'arrêt lors du concours 2014.
Cette année, le jury a observé beaucoup plus de mauvaises prestations de la part des candidats de l'option économique : aucun candidat n'a obtenu la note de 20, les notes s'étendent entre 1 et 18 et l'écart-type de 3,58 est suffisamment élevé pour classer les candidats de cette option.

Les concepts fondamentaux sont rarement maîtrisés. Le phénomène des recettes apprises par cœur se retrouve plus fréquemment que dans l'option scientifique. Les exposés sont souvent ternes, pauvres et très confus : la notion de « preuve » fait souvent défaut (on invoque une définition de l'exercice ou « le cours »).

L'écart entre les moyennes des options scientifique et économique qui était de moins d'un point en 2014 est en 2015, de plus de deux points. En comparant les résultats finals des

2. SUJETS DE L'OPTION ÉCONOMIQUE

EXERCICE PRINCIPAL E 67

1. Question de cours : Condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dans la base $\mathcal{B}$ telles que $\sum_{i=1}^{n} v_i = 2$.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^n$ qui, à tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe $f(x) = x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v$.

2.a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b) Déterminer $f \circ f$. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

c) Quelles sont les valeurs propres possibles de f ?

3.a) Déterminer les valeurs propres de f.

b) Quels sont les sous-espaces propres de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4.a) Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.

b) Montrer que les matrices $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & \cdots & v_1 \\ v_2 & v_2 & \cdots & v_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n & v_n & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 67

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f strictement positive sur $\mathbb{R}$ et possédant une espérance.
Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on note h_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h_\alpha(t) = |t| + (2\alpha - 1)\,t$.
Pour tout $q \in \mathbb{R}$, on pose : $L(q) = E\big(h_\alpha(X - q)\big)$.

1. Établir l'existence d'un unique réel q_α en lequel la fonction L est minimale.

2. On suppose que $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et que X suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Calculer $q_{\frac{1}{2}}$.

EXERCICE PRINCIPAL E 68

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

2. Soit X une variable aléatoire strictement positive suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
On pose : $Z = -\ln X$ et on note F_Z la fonction de répartition de Z.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_Z(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

b) Montrer que Z admet une densité de probabilité continue f_Z qui atteint sa valeur maximale en un unique point x_0.

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de F_Z dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

d) Que représente le point d'abscisse x_0 et d'ordonnée $F_Z(x_0)$ pour cette courbe ?

3. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ indépendantes et de même loi que X.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = Y_n - \ln n$.

a) Déterminer les fonctions de répartition F_{Y_n} et F_{Z_n} de Y_n et Z_n, respectivement.

b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Z.

c) Établir pour tout réel $c > 0$, l'inégalité : $E(Y_n) \geqslant cP(Y_n \geqslant c)$.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 68

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? inversible ?

2. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'existence d'une matrice N telle que $A = I + N$.
Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k.

3. On rappelle l'identité remarquable : $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Déterminer A^{-1}.

2. SUJETS DE L'OPTION ÉCONOMIQUE

EXERCICE PRINCIPAL E 69

1. Question de cours : Définition de la dimension d'un espace vectoriel.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et F_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par $X, X^2, \ldots, X^{n-1}, X^n$.

2. Montrer que les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = P(x)$, sont les polynômes constants.

3. Préciser les dimensions respectives de E_n et F_n.

4. Pour tout $P \in F_n$, on note Q le polynôme tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = P(x+1) - P(x)$.

a) Vérifier que $Q \in E_n$. Quelle relation existe-t-il entre les degrés de P et de Q ?

b) Soit Δ l'application de F_n sur E_n qui à tout $P \in F_n$ associe $Q = \Delta(P)$, où $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = P(x+1) - P(x)$. Montrer que l'application Δ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

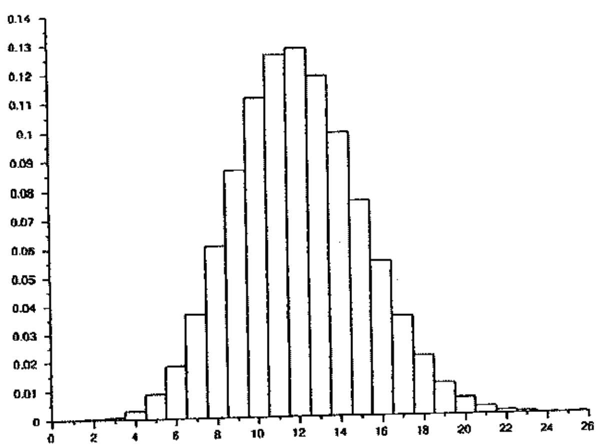
c) Déterminer un polynôme P vérifiant $\Delta(P) = X^3$. En déduire la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 69

Après une alerte incendie, les 60 élèves d'une école se répartissent au hasard dans 5 salles de classe. Afin de savoir comment se répartissent les élèves, on exécute le programme Scilab suivant :

```
Y=grand(100000,1,"bin",60,1/5)
histplot(0.5:25,Y)
```

qui donne la représentation ci-dessous :



Que représente la valeur maximale prise par cet histogramme ? Prouver un résultat concernant cette valeur.

EXERCICE PRINCIPAL E 70

1. Question de cours : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.

Propriétés de l'application $x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
Pour toute fonction $f \in E$, on note $T(f)$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$. Déterminer $T(f_a)$.

3.a) Montrer que pour toute fonction $f \in E$, l'application $T(f)$ appartient à E et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $T(f)$.
b) On suppose que f est une fonction bornée de E. Montrer que $T(f)$ est bornée et établir l'existence d'un réel K tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\big|T(f)(x) - T(f)(y)\big| \leqslant K|x-y|$.

4. Soit T l'application de E dans E qui à $f \in E$, associe $T(f)$.
a) Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il surjectif ?
b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $T\big(\mathbb{R}_n[X]\big) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
c) Soit T_n la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme T et $\mathcal{B} = \big(1, X, X^2, \ldots, X^n\big)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme T_n est-il diagonalisable ? T_n est-il bijectif ?

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 70

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $W_n = \sum_{k=1}^{n} kX_k$.

1. Calculer $E(W_n)$ et $V(W_n)$.

2. Les variables aléatoires W_n et W_{n+1} sont-elles indépendantes ?

EXERCICE PRINCIPAL E 71

1. Question de cours : Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1. Si $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$, alors $P(A)$ désigne la matrice $a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p$.

2. Soit A et Q deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice Q est inversible, d'inverse notée Q^{-1}. Soit P un polynôme à coefficients réels. Expliciter $P(Q^{-1}AQ)$ en fonction de $P(A)$, Q et Q^{-1}.

3.a) Soit $x_1, x_2 \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, associe le n-uplet $\big(P(x_1), P(x_2) \ldots, P(x_n)\big)$.
Autrement dit : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\varphi(P) = \big(P(x_1), P(x_2) \ldots, P(x_n)\big)$. Montrer que l'application φ est bijective.
b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n réels distincts non nuls et $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$.
Établir l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\lambda_i \times P(\lambda_i) = 1$.
Que vaut $T \times P(T)$? Conclure.

4. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ soit égale à $P(A)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 71

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires telles que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre p_k avec $0 < p_k < 1$.
On pose : $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $V(Y) \leqslant \dfrac{n^2}{4}$.

EXERCICE PRINCIPAL E 73

1. Question de cours : Formule des probabilités totales.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère n urnes numérotées de 1 à n et N un entier naturel multiple de 2^n.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la k-ième urne contient N boules dont $\dfrac{N}{2^k}$ boules blanches, les autres étant noires.
On tire dans l'urne 1 une boule que l'on place dans l'urne 2, puis on tire dans l'urne 2 une boule que l'on place dans l'urne 3 et ainsi de suite jusqu'à tirer dans l'urne $n-1$ une boule que l'on place dans l'urne n, puis on tire une boule dans l'urne n.
L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soit p_k la probabilité que la boule tirée dans l'urne k soit blanche.
Trouver une relation de récurrence entre p_{k+1} et p_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$.

3.a) Calculer p_n en fonction de n et N.

b) Pour n fixé, calculer $\lim\limits_{N \to +\infty} p_n$. Interpréter cette limite.

4. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Calculer la probabilité conditionnelle que la n-ième boule tirée soit blanche sachant que la boule tirée dans l'urne i est blanche.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 73

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

2. Quelle est la nature de la suite $(n!)^{\frac{1}{n}}$?

EXERCICE PRINCIPAL E 76

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Dans cet exercice, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et admettent une densité.

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance $E(X)$. On note respectivement F et f, la fonction de répartition et une densité de X.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

2. Pour $x \geqslant 0$:

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt$.

b) Établir les inégalités : $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt \geqslant x\big(1-F(x)\big) \geqslant 0$.

c) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1-F(t)\big)\,dt$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, G_n la fonction de répartition de Z_n et g_n une densité de Z_n.

a) Exprimer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_n(t)$ en fonction de $F(t)$.

b) Établir l'existence de $E(Z_n)$.

c) Pour $n \geqslant 2$, montrer que : $E(Z_n) - E(Z_{n-1}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(F(t)\big)^{n-1}\big(1-F(t)\big)\,dt$.

d) Soit $m > 0$. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre m (d'espérance $1/m$). Calculer $E(Z_n)$. Donner un équivalent de $E(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 76

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et X une matrice colonne non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose : $A = X^tX$.

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

EXERCICE PRINCIPAL E 77

1. Question de cours : Donner des critères de convergence des séries à termes positifs.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln\left(\frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

2. Dresser le tableau de variation de f.

3.a) Montrer que la courbe (Γ) d'équation $y = \ln\left(\frac{e}{2}x\right)$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

b) Tracer $(\mathcal{C})$ et (Γ) dans le même repère.

4. Établir pour tout réel $x \geqslant 1$, l'encadrement : $0 \leqslant f'(x) < 1$.

En déduire le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \geqslant 1$ ainsi que la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$.

5. Soit le programme *Scilab* suivant :

```
function y=f(x)
    y=log(%e*(x+x^(-1))/2)
endfunction

x=[0.01:0.1:5];
plot2d(x,f(x),rect=[0,0,5,5])

x=[0,5]
plot2d(x,x)

u=input('u0=')
x=[u];y=[0]
for k=1:10
     z=f(u)
     x=[x,u]
     x=[x,z]
     y=[y,z,z]
     u=z
end
plot2d(x,y)
```

Expliquer ce que fait ce programme et ce qu'il illustre.

Dans **plot2d, rect[0,0,5,5]** signifie que seule la partie de la courbe contenue dans le rectangle $\{(x,y) / 0 \leqslant x \leqslant 5 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 5\}$ sera tracée.

6. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in [1, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

7.a) Justifier l'existence d'un réel $a > 1$ tel que $x \in [1, a] \Longrightarrow f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 77

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que pour tout $n \geqslant 1$, X_n admet une densité f_n continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\left[\frac{2}{n}, +\infty\right[$, affine sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$.

1. Déterminer une densité f_n de X_n.
2. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

EXERCICE PRINCIPAL E 79

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit a un paramètre réel et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que :

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) & \text{si } x \geqslant a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

2.a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = \dfrac{1}{e-1}$.

b) Étudier les variations de F et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

3.a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.

b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

4. Soit Y la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). On pose : $Z = X - Y$.

a) Calculer $P(Y = 0)$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $P(Y = n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n(n+2)}\right)$.

b) Déterminer la fonction de répartition et une densité de Z.

c) Établir l'existence de l'espérance $E(Z)$ de Z. Calculer $E(Z)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 79

Soit a, b et c des réels non nuls vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose : $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1.a) Calculer la matrice $M = U\,{}^tU$ (où ${}^tU$ est la matrice transposée de la matrice-colonne U).

b) M est-elle diagonalisable ? inversible ?

2.a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer M^n.

b) Quelles sont les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.