HEC
PARIS

ORAL HEC 2017

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option économique

SUJET E 42

Sujet E 42

Exercice principal

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

1. Question de cours
   Que peut-on dire du degré de la somme et du produit de deux polynômes ?

Soit $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et f l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$, fait correspondre le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = nXP(X) + X(1-X)P'(X), \text{ où } P' \text{ désigne la dérivée du polynôme } P.$$

2. a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.
   b) L'endomorphisme f est-il bijectif ? Quel est son rang ?
   c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note H_k le polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par : $H_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$.
   a) Calculer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(H_k)(X)$.
   b) Montrer que $\mathcal{B} = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
   c) Trouver les coordonnées du polynôme $(X+1)^n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice sans préparation

On considère une urne contenant b boules blanches et r boules rouges.

1. La fonction *Scilab* suivante permet de simuler des tirages dans cette urne.

```
function y=X(b,r)
V=%F  // le booléen "faux"
for k=1:3
V=V|grand(1,1,'uin',1,b+r)<=b;
end;
if V then y=1; else y=2;
end;
endfunction
```

   Que retourne la fonction X et quelle loi simule-t-elle ?

2. De quelle valeur théorique la valeur affichée après l'exécution des instructions suivantes fournit-elle une approximation ?

```
R=[ ];
for k=1:10000
R=[R,X(5,5)];
end;
disp((mean(R))
```

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours
Remarque : la convention $\deg 0 = -\infty$ est au programme.

$$\boxed{\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \quad f(P)(X) = nXP(X) + X(1-X)P'(X)}.$$

2. a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ et écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

La linéarité de f est immédiate et la stabilité de $\mathbf{R}_n[X]$ par f provient du fait que le degré de $f(P)$ est au plus égal à $\deg(P)+1$ et que si P est de degré n, alors le terme de degré $n+1$ de $f(P)$ a pour cœfficient $n-n$ et en fait, $f(P)$ est de degré n. Donc, f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
On a : $f(1) = nX$, $\forall\, k \in [\![1, n-1]\!]$, $f(X^k) = (n-k)X^{k+1} + kX^k$ et $f(X^n) = nX^n$.
La matrice M de f dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$ est triangulaire inférieure : les éléments diagonaux sont, dans cet ordre, $0, 1, \ldots, n$ et les éléments de la sous-diagonale sont, dans cet ordre, $n, n-1, \ldots, 1$. Les autres coefficients de la matrice M sont nuls.

b) L'endomorphisme f est-il bijectif ? Quel est son rang ?

L'endomorphisme f n'est pas bijectif et son rang est égal à n.

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Le spectre de f est lisible sur la diagonale de M puisque M est triangulaire. Comme l'endomorphisme f admet $n+1$ valeurs propres distinctes, il est diagonalisable.

3. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note H_k le polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par : $H_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Calculer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f(H_k)(X)$.

$f(H_k) = nX\big(X^k(1-X)^{n-k} + X(1-X)kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}\big)$, soit :

$$f(H_k) = k\,X^k(1-X)^{n-k} = k\,H_k\ .$$

b) Montrer que $\mathcal{B} = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Les vecteurs $H_0, H_1, \ldots, H_n$ qui sont non nuls sont vecteurs propres de f, associés à $n+1$ valeurs propres distinctes : la famille $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est donc libre. Comme elle contient $n+1$ polynômes, c'est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

c) Trouver les coordonnées du polynôme $(X+1)^n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Par la formule du binôme :

$$(X+1)^n = \big(2X + (1-X)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k\, H_k(X)$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère une urne contenant b boules blanches et r boules rouges.

1. La fonction *Scilab* suivante permet de simuler des tirages dans cette urne.

```
function y=X(b,r)
V=%F  // le booléen "faux"
for k=1:3
V=V|grand(1,1,'uin',1,b+r)<=b; // "|" signifie "ou"
end;
if V then y=1; else y=2;
end;
endfunction
```

Que retourne la fonction X et quelle loi simule-t-elle ?

La fonction retourne 1 si au moins une boule blanche a été tirée au cours de trois tirages avec remise dans l'urne et 2 sinon.

La fonction X simule une variable aléatoire prenant les valeurs 1 et 2 avec les probabilités respectives $(\frac{r}{b+r})^3$ et $1-(\frac{r}{b+r})^3$.

2. De quelle valeur théorique la valeur affichée après l'exécution des instructions suivantes fournit-elle une approximation ?

```
R=[ ];
for k=1:10000
R=[R,X(40,10)];
end;
disp((mean(R))
```

La valeur affichée sera proche de l'espérance d'une variable aléatoire $Y=1+B$ où B suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}((0,2)^3)$ dont le paramètre est égal à la probabilité de ne tirer aucune boule blanche en trois tirages :

$$E(Y)=1+(0.2)^3=1.008$$

SUJET E 81

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

   a) Définition et propriétés de la loi géométrique.

   b) Compléter la ligne de code *Scilab* contenant des points d'interrogation pour que la fonction « geo » suivante fournisse une simulation de la loi géométrique dont le paramètre est égal à l'argument p de la fonction.

```
function x=geo(p)
    x=1;
        while rand() ???
        x=x+1;
        end;
endfunction
```

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue dans cette urne, une suite de tirages d'un jeton avec remise.

2. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux numéros successifs distincts.

   a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y - 1$.

   b) Déterminer l'espérance $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y.

3. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, les trois numéros.

   a) Soit deux entiers $k \geq 2$ et $\ell \geq 3$.
   Calculer $P([Y = k] \cap [Z = \ell])$ selon les valeurs de k et ℓ.

   b) En déduire que, pour tout entier $\ell \geq 3$, on a : $P([Z = \ell]) = \frac{2}{3}\left(\frac{2^{\ell-2} - 1}{3^{\ell-2}}\right)$.

   c) Calculer $E(Z)$.

4. D'une manière plus générale, calculer l'espérance de la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, tous les numéros, dans l'hypothèse où l'urne contient au départ n jetons, numérotés de 1 à n.

Exercice sans préparation

On considère les quatre matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Ces quatre matrices forment-elles une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

2. Soit B_1, B_2, B_3, B_4 quatre matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les matrices B_1, B_2, B_3, B_4 pour qu'il existe un endomorphisme f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\begin{cases} f(A_1) = B_1 \\ f(A_2) = B_2 \\ f(A_3) = B_3 \\ f(A_4) = B_4 \end{cases}.$$

   b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les matrices B_1, B_2, B_3, B_4 pour qu'il existe un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les mêmes égalités.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours

   a) $\boxed{\text{Définition et propriétés de la loi géométrique.}}$

La loi géométrique est la loi du rang d'apparition du premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire.

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P([X = n]) = p(1-p)^{n-1}\ .$$

- $E(X) = 1/p$
- $V(X) = (1-p)/p^2$

   b) Compléter la ligne de code *Scilab* fourni.

```
function x=geo(p)
    x=1;
        while rand()>p
        x=x+1;
        end;
endfunction
```

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue dans cette urne, une suite de tirages d'un jeton avec remise.

2. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux numéros successifs distincts.

   a) $\boxed{\text{Reconnaître la loi de la variable aléatoire } Y-1.}$

La variable aléatoire $Y-1$ prend ses valeurs dans $[\![1, +\infty[\![$ et pour tout $k \geq 1$, l'événement $[Y-1 = k]$ est réalisé si et seulement si les tirages du rang 2 au rang k (s'il en existe) amènent le même résultat que le premier tirage (ce qui se produit avec la probabilité $(1/3)^{k-1}$), le $k+1$-ième tirage amenant un résultat différent (ce qui se produit avec la probabilité $2/3$). Par suite,

$$\forall k \in [\![1, +\infty[\![,\ P([Y-1 = k]) = \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{k-1}.$$

La variable aléatoire $Y-1$ suit donc la loi géométrique $\mathcal{G}(2/3)$.

   b) $\boxed{\text{Déterminer l'espérance } E(Y) \text{ et la variance } V(Y) \text{ de la variable aléatoire } Y.}$

- $E(Y) = 1 + E(Y-1) = 5/2$
- $V(Y) = V(Y-1) = 3/4$.

3. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, les trois numéros.

a) Soit deux entiers $k \geq 2$ et $\ell \geq 3$.
Calculer $P([Y = k] \cap [Z = \ell])$ selon les valeurs de k et ℓ.

Comme $P([Y = k]) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-2}$ et $P_{[Y=k]}([Z = \ell]) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\ell-k-1} & \text{si } k < \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, on obtient :

$$P([Y = k] \cap [Z = \ell]) = \begin{cases} \dfrac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}} & \text{si } k < \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) En déduire que, pour tout entier $\ell \geq 3$, on a : $P([Z = \ell]) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2^{\ell-2} - 1}{3^{\ell-2}}\right)$.

Soit $\ell \geq 3$.

$$P([Z = \ell]) = \sum_{k=2}^{\ell-1} \frac{2^{\ell-k}}{3^{\ell-1}} = \frac{2^{\ell-1} - 2}{3^{\ell-1}} = \frac{2}{3}\left(\frac{2^{\ell-2} - 1}{3^{\ell-2}}\right)$$

c) Calculer $E(Z)$.

$$E(Z) = \frac{2}{3}\sum_{\ell=3}^{+\infty} \ell\left(\frac{2^{\ell-2} - 1}{3^{\ell-2}}\right) = 1 + \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{2^{i-1} - 1}{3^{i-1}}\right) = 1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{(1 - 2/3)^2} - \frac{1}{(1 - 1/3)^2}\right) = \frac{11}{2}.$$

4. D'une manière plus générale, calculer l'espérance de la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, tous les numéros, dans l'hypothèse où l'urne contient au départ n jetons, numérotés de 1 à n.

Soit T la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, tous les numéros. En utilisant les temps d'attente successifs d'un nouveau numéro, on obtient :

$$E(T) = 1 + \frac{1}{(n-1)/n} + \frac{1}{(n-2)/n} + \cdots + \frac{1}{1/n} = n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère les quatre matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Ces quatre matrices forment-elles une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

   Non !

   Le sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les quatre matrices est un plan puisque A_1 et A_3 sont linéairement indépendantes et que :

$$\begin{cases} A_2 = A_1 - A_3 \\ A_4 = A_1 + A_3 \end{cases}.$$

2. Soit B_1, B_2, B_3, B_4 quatre matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur ces matrices pour qu'il existe un endomorphisme f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\begin{cases} f(A_1) = B_1 \\ f(A_2) = B_2 \\ f(A_3) = B_3 \\ f(A_4) = B_4 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} B_2 = B_1 - B_3 \\ B_4 = B_1 + B_3 \end{cases}.$$

   b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur ces matrices pour qu'il existe un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les mêmes égalités.

$$\begin{cases} (B_1, B_3) \text{ famille libre} \\ B_2 = B_1 - B_3 \\ B_4 = B_1 + B_3 \end{cases}.$$

SUJET E 91

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : définition d'un estimateur sans biais d'un paramètre inconnu.

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et suivant chacune la loi uniforme discrète sur $[\![1, N]\!]$.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $s_n(N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$.

   a) Montrer que la suite $\big(s_n(N)\big)_{n\geq 1}$ est strictement monotone et convergente.

   b) Trouver sa limite.

3. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $T_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

   a) Calculer pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $P(T_n = k)$.

   b) Montrer que $E(T_n) = N - s_n(N)$.

4. a) Justifier que $P([\,|T_n - N| \geq 1])$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

   b) En déduire, pour tout $\varepsilon > 0$, la limite de $P([\,|T_n - N| \geq \varepsilon])$ quand n tend vers l'infini.

5. On suppose dans cette question que N est un paramètre inconnu.

   a) Expliquer pourquoi on ne peut pas dire que $T_n + s_n(N)$ est un estimateur sans biais de N.

   b) Trouver une suite convergente et asymptotiquement sans biais d'estimateurs de N.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit f la fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1\ .$$

1. a) Donner le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de $(0, 0)$.
   b) En déduire que $(0, 0)$ est un point-col de f.
2. a) Montrer que f admet un extremum local.
   b) Cet extremum est-il global ?

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours : définition d'un estimateur sans biais d'un paramètre inconnu.

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et suivant chacune la loi uniforme discrète sur $[\![1, N]\!]$.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $s_n(N) = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$.

a) $\boxed{\text{Montrer que la suite } \left(s_n(N)\right)_{n\geq 1} \text{ est strictement monotone et convergente.}}$

$$s_{n+1}(N) - s_n(N) = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \frac{1}{N^{n+1}} \sum_{k=1}^{N-1} k^n(k-N) < 0$$

La suite $\left(s_n(N)\right)_{n\geq 1}$ est (strictement) décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle est convergente.

b) $\boxed{\text{Trouver sa limite.}}$

On a : $s_n(N) = \left(\frac{1}{N}\right)^n + \left(\frac{2}{N}\right)^n + \cdots + \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$ et $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ si $0 < q < 1$, d'où

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(N) = 0 .$$

3. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $T_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) $\boxed{\text{Calculer pour tout } k \in [\![1, N]\!],\ P(T_n = k).}$

$\forall k \in [\![1, N]\!],\ P(T_n \leq k) = \left(P(X_1 \leq k)\right)^n = \left(\frac{k}{N}\right)^n$.
D'autre part, $[T_n \leq k] = [T_n = k] \cup [T_n \leq k-1]$, d'où par incompatibilité :

$$\forall k \in [\![1, N]\!],\ P(T_n = k) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} .$$

b) $\boxed{\text{Montrer que } E(T_n) = N - s_n(N).}$

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{N} kP(T_n = k) = \sum_{k=1}^{N} \left(k\left(\frac{k}{N}\right)^n - k\left(\frac{k-1}{N}\right)^n\right)$$

d'où, par "télescopage" :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{N} \left(k\left(\frac{k}{N}\right)^n - (k-1)\left(\frac{k-1}{N}\right)^n\right) - \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k-1}{N}\right)^n = N - s_n(N) .$$

4. a) $\boxed{\text{Justifier que } P([\,|T_n - N| \geq 1]) \text{ tend vers 0 quand } n \text{ tend vers l'infini.}}$

$$P([\,|T_n - N| \geq 1]) = P([T_n \leq N - 1]) = s_n(N)$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, comme il a été démontré en 2°b.

b) $\boxed{\text{En déduire, pour tout } \varepsilon > 0, \text{ la limite de } P([\,|T_n - N| \geq \varepsilon]) \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini.}}$

Comme $T_n - N$ ne prend que des valeurs entières, on a, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$P([\,|T_n - N| \geq \varepsilon]) \leq P([\,|T_n - N| \geq 1])$$

d'où $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} P([\,|T_n - N| \geq \varepsilon]) = 0$.

5. On suppose dans cette question que N est un paramètre inconnu.

a) $\boxed{\text{Expliquer pourquoi on ne peut pas dire que } T_n + s_n(N) \text{ est un estimateur sans biais de } N.}$

Bien que $E\big(T_n + s_n(N)\big) = N$, $T_n + s_n(N)$ n'est pas un estimateurs sans biais de N, parce qu'il dépend du paramètre à estimer (ce n'est pas un estimateur).

b) $\boxed{\text{Trouver une suite convergente et asymptotiquement sans biais d'estimateurs de } N.}$

La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, quant à elle, est bien une suite convergente et asymptotiquement sans biais d'estimateurs de N.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit f la fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1\ .$$

1. a) $\boxed{\text{Donner le développement limité à l'ordre 2 de } f \text{ au voisinage de } (0, 0).}$

La formule de Taylor à l'ordre deux pour les fonctions de deux variables n'est pas exigible en section E, mais elle n'est nullement nécessaire pour répondre à cette question.
On obtient directement, en ordonnant les monômes par degré croissant :

$$f(h, k) = 1 - 9\,hk + (h^2 + k^2)\,\varepsilon(h, k)\ .$$

b) $\boxed{\text{En déduire que } (0, 0) \text{ est un point-col de } f.}$

- $\partial_1(f)(x, y) = 3x^2 - 9y$
- $\partial_2(f)(x, y) = -9x + 3y^2$

Les deux dérivées partielles premières de f s'annulent en $(0, 0)$ et le signe de

$$f(h, k) - f(0, 0) = -9\,hk + (h^2 + k^2)\,\varepsilon(h, k)$$

change au voisinage de $(0, 0)$. Il en résulte que $(0, 0)$ est un point-col de f.

2. a) $\boxed{\text{Montrer que } f \text{ admet un extremum local.}}$

Les points critiques de f sont les solutions du système $\begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 \\ -9x + 3y^2 = 0 \end{cases}$.

Outre l'origine déjà mentionnée, on trouve comme unique point critique de f le point $\underline{I = (3, 3)}$.

Pour en connaître la nature, on étudie la matrice hessienne de f en ce point.

- $\partial^2_{1,1}(f)(x, y) = 6x$
- $\partial^2_{1,2}(f)(x, y) = \partial^2_{2,1}(f)(x, y) = -9$
- $\partial^2_{2,2}(f)(x, y) = 6y$

Au point $I = (3, 3)$, la matrice hessienne est donc $\nabla^2(f)(I) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres, 9 et 27, sont strictement positives.
Il en résulte que $\underline{f \text{ admet un minimum local en } I}$.

b) $\boxed{\text{Cet extremum est-il global ?}}$

Non, puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x, 0) = -\infty$.

SUJET E 94

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

   a) Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.

   b) Donner un programme *Scilab* permettant de représenter la fonction partie entière sur l'intervalle $[-5/2, +5/2]$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont une densité f_n est donnée par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\,\mathrm{e}^{-\dfrac{t}{n}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. Reconnaître la loi de X_n, puis en donner l'espérance et la variance.

3. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $u_n = P\big([\,|X_n - E(X_n)| < 1\,]\big)$.

   a) Montrer que $u_n = \left(\mathrm{e}^{2/n} - 1\right)\mathrm{e}^{-(n+1)/n}$.

   b) Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$, de la forme $\dfrac{\alpha}{n}$ où α est un réel que l'on déterminera.

4. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on considère l'événement $A_k = \left[k + \dfrac{1}{2} < X_n < k+1\right]$.

   a) Exprimer l'événement $B_n = \left[X_n - \lfloor X_n \rfloor > \dfrac{1}{2}\right]$ en fonction des événements A_k $(k \in \mathbf{N})$.

   b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $v_n = P(B_n)$. Calculer v_n puis $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

5. On suppose désormais que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ sont indépendantes et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$M_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)\ .$$

   a) Déterminer la loi de M_n.

   b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $w_n = P\big([\,|M_n - E(M_n)| < 1\,]\big)$. Calculer w_n puis $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère les deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{cases} F = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\} \\ G = \mathrm{Vect}\{(1,-1,0),(0,2,1)\} \end{cases}.$$

1. Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont l'image est F et le noyau G.
2. Peut-on le choisir diagonalisable ?

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours :

   a) $\boxed{\text{Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.}}$

   b) Donner un programme *Scilab* permettant de représenter la fonction partie entière sur l'intervalle $[-5/2, +5/2]$.

```
x=linspace(-2.5,2.5,100);
y=floor(x);
plot(x,y)
```

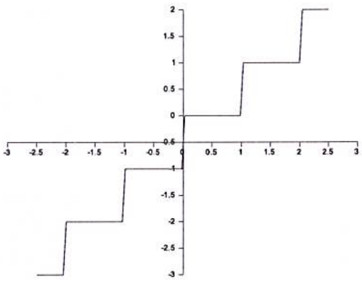

Figure 1 – *Fonction partie entière*

2. Reconnaître la loi de X_n, puis en donner l'espérance et la variance.

   X_n suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{n}$ et $E(X_n) = n$ et $V(X_n) = n^2$.

3. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $u_n = P\big([\,|X_n - E(X_n)| < 1\,]\big)$.

   a) Montrer que $u_n = \left(e^{2/n} - 1\right) e^{-(n+1)/n}$.

$$u_n = P\big(|X_n - n| < 1\big) = P(n-1 < X_n < n+1) = F_{X_n}(n+1) - F_{X_n}(n-1) = 1 - e^{-\frac{n+1}{n}} - \left(1 - e^{-\frac{n-1}{n}}\right)$$

d'où

$$u_n = e^{-\frac{n-1}{n}} - e^{-\frac{n+1}{n}} = \boxed{\left(e^{2/n} - 1\right) e^{-(n+1)/n}}.$$

   b) Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$, de la forme $\dfrac{\alpha}{n}$ où α est un réel que l'on déterminera.

$e^{\frac{2}{n}} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$ et $e^{-\frac{n+1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-1}$, d'où : $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2\,e^{-1}}{n}}$.

4. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on considère l'événement $A_k = \left[k + \frac{1}{2} < X_n < k+1\right]$.

a) $\boxed{\text{Exprimer l'événement } B_n = \left[X_n - \lfloor X_n \rfloor > \frac{1}{2}\right] \text{ en fonction des événements } A_k\ (k \in \mathbf{N}).}$

L'événement B_n est la réunion disjointe des événements A_k pour $k \in \mathbf{N}$:

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \ .$$

b) $\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \text{ on pose : } v_n = P(B_n).\\ \text{Calculer } v_n \text{ puis } \lim\limits_{n \to +\infty} v_n.\end{array}}$

$P(A_k) = \exp\Big(-\frac{1}{n}(k+1/2)\Big) - \exp\Big(-\frac{1}{n}(k+1)\Big) = \Big(\exp(1/2n) - 1\Big) \times \Big(\exp(-1/n)\Big)^{k+1}$.

Comme les événements A_k sont deux à deux incompatibles, on en déduit :

$$v_n = P(B_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = \Big(\exp(1/2n) - 1\Big) \times \frac{\exp(-1/n)}{1 - \exp(-1/n)}$$

d'où

$$v_n = P(B_n) = \frac{\exp(1/2n) - 1}{\exp(1/n) - 1} \ .$$

Comme $\mathrm{e}^t - 1 \underset{t \to 0}{\sim} t$, on a donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2}} \ .$$

5. On suppose désormais que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ sont indépendantes et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$M_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \ .$$

a) $\boxed{\text{Déterminer la loi de } M_n.}$

$M_n(\Omega) = \mathbf{R}_+$ et, classiquement :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ P(M_n > x) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-x/k} = \exp\Big(-(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})x\Big) \ .$$

Par suite, la variable aléatoire M_n suit la loi exponentielle de paramètre $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

b) $\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \text{ on pose : } w_n = P([\,|M_n - E(M_n)| < 1\,]).\\ \text{Calculer } w_n \text{ puis } \lim\limits_{n \to +\infty} w_n.\end{array}}$

Comme $P([M_n > x]) = \exp(-\frac{x}{E(M_n)})$ pour tout $x > 0$ et comme $E(M_n) < 1$, on a

$$w_n = P\big([-1 + E(M_n) < M_n < 1 + E(M_n)]\big) = 1 - \exp\Big(-1 - \frac{1}{E(X_n)}\Big)$$

qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini, puisque $E(M_n)$ tend vers 0, par divergence de la série harmonique.

Corrigé de l'exercice sans préparation

On considère les deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{cases} F = \text{Vect}\{(1,1,1)\} \\ G = \text{Vect}\{(1,-1,0),(0,2,1)\} \end{cases}.$$

1. $\boxed{\text{Trouver un endomorphisme de } \mathbb{R}^3 \text{ dont l'image est } F \text{ et le noyau } G.}$

   Il suffit d'imposer que la restriction de l'endomorphisme à G soit nulle, puis de choisir un vecteur de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à G et de prendre $(1,1,1)$ pour image de ce vecteur.

2. $\boxed{\text{Peut-on le choisir diagonalisable ?}}$

   On ne peut pas choisir l'endomorphisme diagonalisable parce que, si un endomorphisme f admet pour image F et pour noyau G, $f \circ f$ est l'endomorphisme nul (puisque F est inclus dans G). Dès lors, 0 est la seule valeur propre possible de f (puisque X^2 est un polynôme annulateur de f), ce qui exclut que f soit diagonalisable, puisque ce n'est pas l'endomorphisme nul.

SUJET ECO 102

Sujet E 102

Exercice principal

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\quad \forall x > 0, \quad f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}$.

1. a) Question de cours

Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction réelle d'une variable réelle.

b) Montrer que f se prolonge de manière unique en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Justifier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} t^2 \, e^{-nt} \, dt = \frac{2}{n^3} \cdot$$

3. a) Établir, pour tout $t > 0$, l'inégalité : $\dfrac{t^2}{e^t - 1} \leq t \cdot$

b) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) \, e^{-nt} \, dt$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) \, e^{-nt} \, dt = 0$.

4. a) Établir, pour tout $t > 0$, l'égalité : $\displaystyle f(t) = t^2 \sum_{k=1}^{n} e^{-kt} + f(t) \, e^{-nt}$.

b) En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) \, dt = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

5. a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leq \frac{1}{n^2}$.

b) Compléter les lignes 3 et 5 du script *Scilab* suivant, pour que la fonction « approx » affiche une valeur approchée de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$, avec une précision « epsilon » entrée en argument.

```
function I = approx(epsilon)
    I = 0 ;
    n =  ???  ;
    for i = 1:n
        I = I + ???  ;
    end ;
    disp(I,'integrale = ') ;
endfunction
```

Exercice sans préparation

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant chacune la loi uniforme sur $[0,1]$.

1. a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P([\,\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor\,])$.
   b) En déduire la probabilité $P([U = V])$.

2. Soit A la matrice aléatoire $\begin{pmatrix} U & 1 \\ 0 & V \end{pmatrix}$.
   a) Quelle est la probabilité que A soit inversible ?
   b) Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x > 0, \quad f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}$.

1. a) Question de cours

b) $\boxed{\text{Montrer que } f \text{ admet un unique prolongement par continuité à } \mathbb{R}^+.}$

Comme $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = 0$, l'unique prolongement par continuité de la fonction f à $\mathbb{R}_+$ est obtenu en posant $f(0) = 0$.

2. Justifier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} t^2\, e^{-nt}\, \mathrm{d}t = \frac{2}{n^3} \cdot$$

La fonction Γ n'étant pas au programme (E), on obtient le résultat en intégrant par parties (sur un segment $[0, x]$ puis en faisant tendre x vers $+\infty$).

3. a) Établir, pour tout $t > 0$, l'inégalité : $\dfrac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1} \leq t \cdot$

Par convexité de la fonction exponentielle, $\mathrm{e}^t \geq 1 + t$, d'où l'inégalité demandée.

b) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\, \mathrm{d}t$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ est convergente parce que f admet un prolongement continue à $\mathbb{R}_+$ et parce que $f(t) = \mathrm{o}(1/t^2)$ quand t tend vers l'infini.
La convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\, \mathrm{d}t$ pour $n \geq 1$ en résulte par domination (mais on peut aussi la prouver en utilisant l'inégalité prouvée en a).

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\, \mathrm{d}t \;=\; 0.$

Grâce à l'inégalité prouvée en a, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-nt}\, \mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-nt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

d'où le résultat par encadrement.

4. a) Établir, pour tout $t > 0$, l'égalité : $f(t) = t^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} + f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}$.

$$t^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kt} = t^2\,\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-nt}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right) = t^2\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-nt}}{\mathrm{e}^{t}-1}\right) = f(t) - f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,.$$

b) En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$.

Par intégration de 0 à $+\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, d'où le résultat.

5. a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2}{k^3} \leq \frac{1}{n^2}$.

Par la méthode des rectangles :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2}{k^3} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{n^2}\,.$$

b)

```
function I=approx(epsilon)
    I=0;
    n=floor(1/sqrt(epsilon));
    for i= 1:n
        I=I+2/i^3;
    end
    disp(I,'integrale = ');
endfunction
```

Pour information : une valeur approchée à 10^{-6} près de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est $2,404114$.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. a) $\boxed{\text{Calculer, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ la probabilité } P([\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor]).}$

$$P([\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor]) = P(\bigcup_{k=0}^{n-1} [\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor = k]) = \sum_{k=0}^{n-1} P([\frac{k}{n} \leq U < \frac{k+1}{n}] \cap [\frac{k}{n} \leq V < \frac{k+1}{n}]) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

b) $\boxed{\text{En déduire la probabilité } P([U = V]).}$

Comme l'événement $[U = V]$ est inclus dans chacun des événements $[\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor]$, sa probabilité est majorée par $1/n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
Il en résulte que la probabilité $P([U = V])$ est nulle.

Remarque : le produit de convolution n'est pas au programme de la section E (on ne peut donc pas utiliser la variable $U - V$, comme le ferait spontanément un candidat fiché S).

2. Soit A la matrice aléatoire $\begin{pmatrix} U & 1 \\ 0 & V \end{pmatrix}$.

a) $\boxed{\text{Quelle est la probabilité que } A \text{ soit inversible ?}}$

C'est la probabilité de l'événement $[U = 0] \cup [V = 0]$. Elle est nulle.

b) $\boxed{\text{Quelle est la probabilité que } A \text{ soit diagonalisable ?}}$

C'est la probabilité de l'événement $[U \neq V]$. Elle est égale à 1 d'après 1b.

SUJET E 106

Sujet E 106

Exercice principal

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé, et toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur cet espace probabilisé et X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. a) Question de cours : rappeler la formule de Koenig-Huygens.

   b) Démontrer que, si X admet un moment d'ordre deux, alors on a :

$$\forall c \in \mathbb{R}, \quad V(X) \leq E\big((X-c)^2\big) .$$

2. Dans cette question, n est un entier strictement positif et X une variable aléatoire telle que :

$$X(\Omega) \subset [\![0, 2n]\!] .$$

   a) En utilisant une des inégalités prouvées en 1.b, démontrer que la variance de X est inférieure ou égale à n^2.

   b) Démontrer que, si $E(X) = n$, alors la variance de X est égale à n^2 si, et seulement si, $P([X=0]) = P([X=2n]) = \dfrac{1}{2}$ ·

   c) Quelle est la plus petite valeur possible de $V(X)$ lorsque $E(X) = n$?

Dans toute la suite de l'exercice, c désigne un nombre réel positif qui n'est pas entier et $\lfloor c \rfloor$ sa partie entière.

3. Soit X_0 une variable aléatoire vérifiant : $\begin{cases} X_0(\Omega) = \{\lfloor c \rfloor, \lfloor c \rfloor + 1\} \\ E(X_0) = c \end{cases}$.

   a) Vérifier que : $P([X_0 = \lfloor c \rfloor]) = \lfloor c \rfloor + 1 - c$.

   b) En déduire que la variance de X_0 est égale à $(c - \lfloor c \rfloor)(\lfloor c \rfloor + 1 - c)$.

4. Dans cette question et la suivante, X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui admet une espérance et une variance, et vérifie : $E(X) = c$.
   On note $A = [X \leq c]$ et $p = P(A)$.

   a) Justifier que p est strictement compris entre 0 et 1.

   b) Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} k\, P_{\bar{A}}([X=k])$, où $\bar{A}$ désigne le complémentaire de l'événement A.

5. On note : $c_0 = \sum_{k=0}^{\lfloor c \rfloor} k\, P_A([X=k])$ et $c_1 = \sum_{k=\lfloor c \rfloor + 1}^{+\infty} k\, P_{\bar{A}}([X=k])$.

   Soit Y une variable aléatoire telle que $P([Y = c_0]) = p$ et $P([Y = c_1]) = 1 - p$.

a) Vérifier que les variables aléatoires X et Y ont la même espérance.

b) Prouver l'égalité : $V(Y) = (c - c_0)(c_1 - c)$.

c) Démontrer l'inégalité :

$$V(X) \geq V(Y) .$$

d) En déduire que $V(X_0)$ est la plus petite valeur possible de $V(X)$.

Exercice sans préparation

1. Quelle est la limite quand t tend vers 0 de $\dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t}$?

2. Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^t - 1}{\sqrt{t^3}}\right) \mathrm{e}^{-2t}\, \mathrm{d}t$.

Corrigé de l'exercice principal

1. a) Question de cours : rappeler la formule de Koenig-Huygens.

Sous réserve que X ait un moment d'ordre 2, elle possède une espérance et une variance, qui vérifient :

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 .$$

b) Démontrer que, si X admet un moment d'ordre deux, alors on a :

$$\forall c \in \mathbb{R}, \quad V(X) \leq E\big((X-c)^2\big) .$$

Par application de la formule de Koenig-Huygens à la variable aléatoire $X - c$:

$$V(X) = V(X-c) = E\big((X-c)^2\big) - \big(E(X-c)\big)^2 \leq E\big((X-c)^2\big) .$$

2. Dans cette question, n est un entier strictement positif et X une variable aléatoire telle que :

$$X(\Omega) \subset [\![0, 2n]\!] .$$

a) En utilisant une des inégalités prouvées en 1.b, démontrer que la variance de X est inférieure ou égale à n^2.

Comme $X(\Omega) \subset [\![0, 2n]\!]$, on a $\big(X(\omega) - n\big)^2 \leq n^2$ pour tout $\omega \in \Omega$) et donc, par application de l'inégalité $V(X) \leq E\big((X-c)^2\big)$ à $c = n$:

$$V(X) \leq E\big((X-n)^2\big) \leq n^2 .$$

b) Démontrer que, si $E(X) = n$, alors la variance de X est égale à n^2 si, et seulement si, $P([X=0]) = P([X=2n]) = \dfrac{1}{2}$ ·

- Condition suffisante

Si $P([X=0]) = P([X=2n]) = \dfrac{1}{2}$, alors $\dfrac{X}{2n}$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\dfrac{1}{2})$ dont la variance est égale à $\dfrac{1}{4}$.

- Condition nécessaire

Si $V(X) = n^2$, alors $E\big(n^2 - (X-n)^2\big) = 0$, ce qui entraîne que la probabilité $P([1 \leq X \leq 2n-1])$ est nulle.

Dès lors, comme $E(X) = n$, on a nécessairement $P([X=0]) = P([X=2n]) = \dfrac{1}{2}$ ·

c) Quelle est la plus petite valeur possible de $V(X)$ lorsque $E(X) = n$?

Lorsque $E(X) = n$, la plus petite valeur possible de $V(X)$ est 0, obtenue lorsque $P([X=n]) = 1$.

3. Soit X_0 une variable aléatoire vérifiant : $\begin{cases} X_0(\Omega) = \{\lfloor c \rfloor, \lfloor c \rfloor + 1\} \\ E(X_0) = c \end{cases}$.

a) $\boxed{\text{Vérifier que : } P([X_0 = \lfloor c \rfloor]) = \lfloor c \rfloor + 1 - c \text{ .}}$

Soit $\eta = P([X_0 = \lfloor c \rfloor])$.

$$c = E(X_0) = \eta \lfloor c \rfloor + (1 - \eta)(\lfloor c \rfloor + 1) = \lfloor c \rfloor + (1 - \eta)$$

d'où $\eta = \lfloor c \rfloor + 1 - c$.

b) $\boxed{\text{En déduire que la variance de } X_0 \text{ est égale à } (c - \lfloor c \rfloor)(\lfloor c \rfloor + 1 - c) \text{ .}}$

$$V(X) = \eta (\lfloor c \rfloor - c)^2 + (1-\eta)(\lfloor c \rfloor + 1 - c)^2 = (\lfloor c \rfloor + 1 - c)(\lfloor c \rfloor - c)^2 + (c - \lfloor c \rfloor)(\lfloor c \rfloor + 1 - c)^2 = (c - \lfloor c \rfloor)(\lfloor c \rfloor + 1 - c) .$$

4. Dans cette question et la suivante, X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui admet une espérance et une variance, et vérifie : $E(X) = c$.
On note $A = [X \leq c]$ et $p = P(A)$.

a) $\boxed{\text{Justifier que } p \text{ est strictement compris entre 0 et 1.}}$

Si p était nul, l'espérance de X serait strictement supérieure à c.
Si p était égal à 1, l'espérance de X serait strictement inférieure à c ou X presque certainement égale à c, ce qui est exclu puisque c n'est pas un nombre entier.

b) $\boxed{\text{Justifier la convergence de la série } \sum_{k \geq 0} k\, P_{\bar{A}}([X = k]).}$

Comme $k\, P_{\bar{A}}([X = k]) = \dfrac{k\, P([X = k] \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} \leq \dfrac{k\, P([X = k])}{P(\bar{A})}$ et comme X admet une espérance, la série $\sum_{k \geq 0} k\, P_{\bar{A}}([X = k])$ est convergente par comparaison de séries à termes positifs.

5. On note : $c_0 = \sum_{k=0}^{\lfloor c \rfloor} k\, P_A([X = k])$ et $c_1 = \sum_{k=\lfloor c \rfloor + 1}^{+\infty} k\, P_{\bar{A}}([X = k])$.

Soit Y une variable aléatoire telle que $P([Y = c_0]) = p$ et $P([Y = c_1]) = 1 - p$.

a) $\boxed{\text{Vérifier que les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ ont la même espérance.}}$

Grâce à la formule des probabilités totales,

$$P([X = k]) = P(A)\, P_A([X = k]) + P(\bar{A})\, P_{\bar{A}}([X = k]) = \begin{cases} P(A)\, P_A([X = k]) & \text{si } k \leq \lfloor c \rfloor \\ P(\bar{A})\, P_{\bar{A}}([X = k]) & \text{si } k > \lfloor c \rfloor \end{cases}$$

d'où :

$$E(X) = P(A) \sum_{k=0}^{\lfloor c \rfloor} k\, P_A([X = k]) + P(\bar{A}) \sum_{k=\lfloor c \rfloor + 1}^{+\infty} k\, P_{\bar{A}}([X = k]) = p\, c_0 + (1 - p)\, c_1 = E(Y) .$$

b) $\boxed{\text{Prouver l'égalité : } V(Y) = (c - c_0)\,(c_1 - c).}$

Comme $p = \dfrac{c_1 - c}{c_1 - c_0}$ et $1 - p = \dfrac{c - c_0}{c_1 - c_0}$, on a :

$$V(Y) = E\big((Y - c)^2\big) = \frac{c_1 - c}{c_1 - c_0}\,(c_0 - c)^2 + \frac{c - c_0}{c_1 - c_0}\,(c_1 - c)^2 = (c - c_0)(c_1 - c)\ .$$

c) $\boxed{\text{Démontrer l'inégalité : } \quad V(X) \geq V(Y)\ .}$

$$V(X) = p \sum_{k=0}^{\lfloor c \rfloor} (k - c)^2\, P_A([X = k]) + (1 - p) \sum_{k=\lfloor c \rfloor + 1}^{+\infty} (k - c)^2\, P_{\bar{A}}([X = k])$$

d'où, grâce à la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) \geq p\,\Big(\sum_{k=0}^{\lfloor c \rfloor} k\, P_A([X = k]) - c\Big)^2 + (1 - p)\,\Big(\sum_{k=\lfloor c \rfloor + 1}^{+\infty} k\, P_{\bar{A}}([X = k]) - c\Big)^2$$

et finalement :

$$V(X) \geq p\,\big(c_0 - c\big)^2 + (1 - p)\,\big(c_1 - c\big)^2 = V(Y)\ .$$

d) $\boxed{\text{En déduire que } V(X_0) \text{ est la plus petite valeur possible de } V(X).}$

Comme $c \geq \lfloor c \rfloor \geq c_0$ et $c \leq 1 + \lfloor c \rfloor \leq c_0$, on a aussi :

$$V(Y) = (c - c_0)\,(c_1 - c) \geq (c - \lfloor c \rfloor)(\lfloor c \rfloor + 1 - c) = V(X_0)\ .$$

Il en résulte que $V(X_0)$ est la plus petite valeur possible de $V(X)$, sous la contrainte $E(X) = n$.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. $\boxed{\text{Quelle est la limite quand } t \text{ tend vers } 0 \text{ de } \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\ ?}$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} = 1 \; .$$

2. $\boxed{\text{Justifier la convergence de l'intégrale impropre } \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{\mathrm{e}^t - 1}{\sqrt{t^3}}\Big)\, \mathrm{e}^{-2t}\, \mathrm{d}t\ .}$

- L'intégrande $f : t \longmapsto \Big(\dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{\sqrt{t^3}}\Big)\, \mathrm{e}^{-2t}$ est une fonction continue sur $]0, +\infty[$
- $f(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ quand t tend vers 0
- $f(t) = \mathrm{o}\big(\frac{1}{t^2}\big)$ quand t tend vers $+\infty$

SUJET ECO 108

Sujet E 108

Exercice principal

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et n colonnes.
Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note ${}^tM$ la transposée de M.

1. a) Question de cours : théorème du rang.

   b) Justifier que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients est nulle est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

2. Soit φ l'application qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, associe la matrice $\varphi(M) = M + {}^tM$.
   Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

3. Dans cette question, et seulement dans cette question, on suppose que $n = 2$.
   Pour tout $(i,j) \in [\![1,2]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les éléments sont nuls excepté celui de la i-ème ligne et j-ième colonne qui vaut 1.
   On rappelle que la famille $\big(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\big)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

   a) Écrire la matrice A de φ dans la base $\big(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\big)$.

   b) Préciser le rang de φ.

   c) Donner une base du noyau de φ.

4. On suppose désormais $n \geq 3$.

   a) Déterminer $\varphi\big(\varphi(M)\big)$, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de l'endomorphisme φ ?

   b) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice sans préparation

Pour tout réel $c > 0$, on note f_c définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_c(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x(x+1)(x+2)} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Justifier l'existence d'une unique valeur c_o de c pour laquelle f_{c_o} est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f_{c_0}.
   Trouver la limite et un équivalent de $P([X \geq n])$ quand n tend vers l'infini.

Corrigé de l'exercice principal

1. a) Question de cours : théorème du rang.

   b) Justifier que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients est nulle est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

Soit $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients est nulle.
Soit s l'application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la somme de tous ses coefficients.

- $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ est le noyau de s, donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- L'application s est surjective.
- Par le théorème du rang, la dimension de $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ est égale à $n^2 - 1$.

Remarque : les notions d'hyperplan et de forme linéaire ne figurent pas au programme de la section E.

2. Soit φ l'application qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, associe la matrice $\varphi(M) = M + {}^tM$.

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

L'application f est linéaire et l'image par f de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

3. Dans cette question, et seulement dans cette question, on suppose que $n = 2$.

   a) Écrire la matrice A de φ dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   b) Préciser le rang de φ.

Le rang de φ est celui de la matrice A, c'est-à-dire 3.

   c) Donner une base du noyau de φ.

La matrice $E_{1,2} - E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ constitue à elle seule une base de $\ker \varphi$.

4. On suppose désormais $n \geq 3$.

a) $\boxed{\text{Déterminer } \varphi(\varphi(M)), \text{ pour toute matrice } M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}). \text{ Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de l'endomorphisme } \varphi\,?}$

$$\varphi(\varphi(M)) = \varphi(M + {}^tM) = \varphi(M) + \varphi({}^tM) = M + {}^tM + {}^tM + M = 2(M + {}^tM) = 2\varphi(M)$$

Il en résulte que le polynôme $X^2 - 2X$ est annulateur de φ, ce qui entraîne que les seules valeurs possibles de φ sont 0 et 2.

b) $\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi \text{ est-il diagonalisable ?}}$

• Toutes les matrices symétriques sont des vecteurs propres de φ (associées à la valeur propre 2) et constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

• Toutes les matrices « anti-symétriques » sont des vecteurs propres de φ (associées à la valeur propre 0) et constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de φ étant égale à la dimension n^2 de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'endomorphisme φ est diagonalisable.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Pour tout réel $c > 0$, on note f_c définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_c(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x(x+1)(x+2)} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

1. $\boxed{\text{Justifier l'existence d'une unique valeur } c_o \text{ de } c \text{ pour laquelle } f_{c_o} \text{ est une densité de probabilité.}}$

   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)}$ est convergente parce que l'intégrande est une fonction continue sur $[1, +\infty[$ et parce que cette fonction positive est équivalente en $+\infty$ à la fonction de référence $x \longmapsto 1/x^3$ dont l'intégrale est convergente au voisinage de l'infini.
   Il en résulte que pour

   $$c_0 = \frac{1}{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)}}$$

   la fonction f_{c_o} est une densité de probabilité, parce pour cette valeur de c et seulement pour cette valeur, l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de f_c est égale à 1.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f_{c_0}.

   $\boxed{\text{Trouver la limite et un équivalent de } P([X \geq n]) \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini.}}$

   Par propriété de limite monotone, on a :

   $$\lim_{n \to +\infty} P([X \geq n]) = 0 \cdot$$

   Pour trouver un équivalent de $P([X \geq n])$ quand n tend vers l'infini, il suffit d'encadrer l'intégrale correspondante

   $$c_0 \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^3} \leq P([X \geq n]) \leq c_0 \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$$

   d'où :

   $$P([X \geq n]) \sim \frac{c_0}{2n^2} \cdot$$