EDHEC 2017 EXERCICE 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0,1]\ ,\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1. (a) Compléter la fonction `Scilab` suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$ à l'appel de `f(x,n)` , où x et n sont donnés par l'utilisateur.

```
function y=f(x,n)
   y=sum(- - - - - -)
endfunction
```

   (b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ puis en déduire une deuxième façon de déclarer `f` , en complétant la déclaration suivante où la fonction est toujours nommée `f`.

```
function y=f(x,n)
   if x==1 then y=- - - - - -
           else y=- - - - - -
   end
endfunction
```

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue $x \in [0,1]$, possède une unique solution α_n dans $[0,1]$.
3. (a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
4. (a) Déterminer α_2 puis vérifier que $0 \leq \alpha_2 \leq 1$.
   (b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}$.
5. On suppose que f_n a été déclarée (cf question 1). On considère les commandes supplémentaires suivantes :

```
n=input('entrer la valeur de n : ')
x=0
while f(x,n)<1
x=x+0.001
end
disp(x)
```

Quel est le lien entre le résultat affiché et α_n ?

EDHEC 2017 EXERCICE 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère n variables aléatoires , notées $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$, définie sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, suivant toutes la même loi uniforme sur $[0,1]$.

1. On note M_n la variable aléatoire définie par $M_n = max(X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n)$, c'est à dire que pour tout ω dans Ω, on a $M_n(\omega) = max(X_1(\omega),\ X_2(\omega),\ ...,\ X_n(\omega))$. On admet que M_n est une variable aléatoire et on note F_{M_n} sa fonction de répartition.
   (a) Déterminer, pout tout réel x, l'expression de $F_{M_n}(x)$, puis montrer que M_n est une variable à densité.
   (b) En déduire une densité f_{M_n} de M_n.
   (c) Etablir l'existence et donner la valeur de $E(M_n)$ et $E(M_n^2)$.
   (d) Donner, pour tout $\varepsilon > 0$, un majorant ne dépendant que de n et de ε de la probabilité $P\left((M_n-1)^2 \geq \varepsilon^2\right)$.
   (e) Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|M_n - 1| \geq \varepsilon\right) = 0$.

2. On pose $Y_n = n\,(1 - M_n)$

   (a) On rappelle que `grand(1,n,'unf',0,1)` simule n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.
   Compléter la déclaration de fonction `Scilab` suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Y_n.

```
function Y=f(n)
X=grand(1,n,'unf',0,1)
Y=- - - - - -
endfunction
```

   (b) Voici deux scripts (celui de droite utilise la fonction `f` définie ci-dessus) :

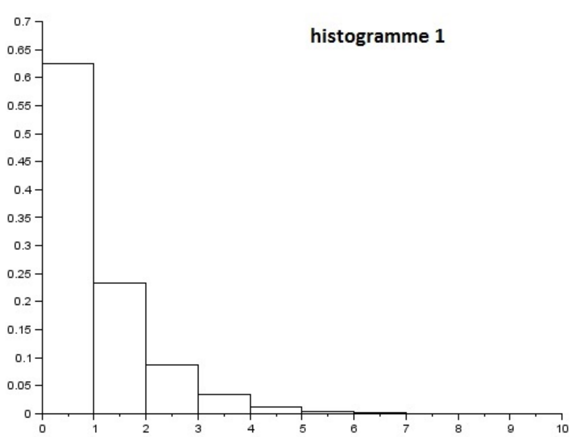
```
e=grand(1,10000,'exp',1)
s=linspace(0,10,11)
histplot(s,e)
```

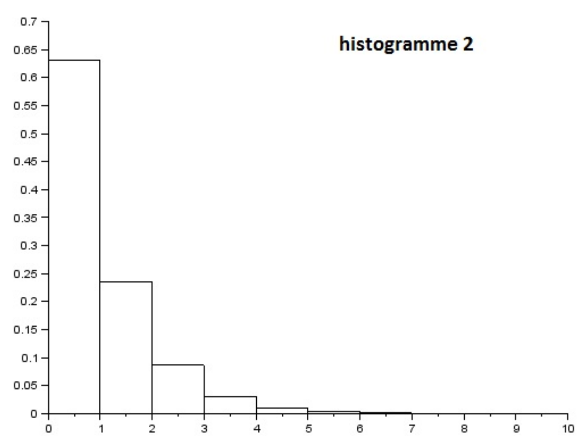
Script 1

```
n=input('entrer la valeur de n : ')
Y=[]
for k=1:10000
    Y=[Y,f(n)]
end
s=linspace(0,10,11)
histplot(s,Y)
```

Script 2

   Chacun de ces scripts simule 10000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0,1]$, $]1,2]$, ... , $]9,10]$, et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle vaut 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).
   Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi exponentielle de paramètre 1, renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que Y_n, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.





   Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des variables aléatoires (Y_n) ?

3. (a) Déterminer la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable Y_n définie à la question 2).

   (b) Pour tout réel x positif ou nul, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \to F_{Y_n}(x)$.

   (c) Démontrer le résultat conjecturé à la question 2b).

EDHEC 2017 EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux valent $-n$, les autres valant tous 1. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1, et I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Exprimer A comme combinaison linéaire de J et de I, puis faire de même pour A^2.

   (b) En déduire un polynôme annulateur de A puis donner les valeurs propres possibles de A.

   (c) Montrer que A est inversible.

   Dans la suite, on considère un espace euclidien E, de dimension $n+1$, dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme $\|\ \|$.

   On note $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E et on pose : $\quad u = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k$.

   On pose aussi : $\quad \forall i \in [\![0, n]\!]\ ,\ e_i = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\ (\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle\ u)$

2. Calculer la norme du vecteur u.

3. (a) Montrer que pour tout i de $[\![0, n]\!]$, on a : $\|e_i\| = 1$.

   (b) Montrer également que pout tout couple (i, j) d'entiers distincts de $[\![0, n]\!]$, on a : $\quad \langle e_i, e_j\rangle = -\dfrac{1}{n}$.

   (c) Montrer que les vecteurs $e_0, e_1, ..., e_n$ appartiennent au sous espace vectoriel $F = (\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$ de E.

   (d) Montrer en utilisant la question 1.c. que $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de F.

4. On considère l'application f de $F \times F$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in F \times F\ , \qquad f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\ \langle y, e_k\rangle\ - \frac{n+1}{n}\ \langle x, y\rangle$$

   (a) Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.

   (b) Pour tout couple (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, déterminer $f(e_i, e_j)$ en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$.

   (c) En déduire que : $\quad \forall (x, y) \in F \times F\ , \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\ \langle y, e_k\rangle = \frac{n+1}{n}\ \langle x, y\rangle$.

   (d) En déduire également que pour tout x de F on a : $\quad \|x\|^2 = \dfrac{n}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle^2$.

EDHEC 2017 PROBLEME

Dans ce problème, n est un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On rappelle que $e_0 = 1$ et que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $e_k = X^k$.

Partie 1 : étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'application φ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P, avec la convention $P^{(0)} = P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. (a) Calculer $\varphi(e_0)$ et en déduire une valeur propre de φ.
   (b) Montrer que : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$.
   (c) En déduire que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire et que la seule valeur propre de φ est celle trouvée à la question précédente.
   (d) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. (a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer $\varphi(P - P')$.
   (b) Déterminer φ^{-1}, puis écrire la matrice de φ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
   (c) On donne le script `Scilab` suivant :

```
n=input('entrer la valeur de n : ')
M=eye(n+1,n+1)
for k=1:n
    M(k,k+1)=-k
end
A= - - - - - - -
disp(A)
```

   Compléter la sixième ligne de ce script pour qu'il affiche la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$ lorsque la valeur de n est entrée par l'utilisateur.

Partie 2 : étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On désigne par x un réel quelconque.

4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ est convergente.
   (b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} P(t) \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ est convergente.

5. (a) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \, dt$.
   (b) Etablir que pour tout entier naturel k, on a : $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i\,!} \, \mathrm{e}^{-x}$.

6. Informatique.
   (a) On admet que si u est un vecteur, la commande `Scilab prod(u)` renvoie le produit des éléments de `u` et la commande `cumprod(u)` renvoie un vecteur de même format que `u` dont la coordonnée n°k est le produit des k premiers éléments de `u`. Utiliser l'égalité obtenue à la question 5b) pour compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il calcule et qu'il affiche la variable `s` contenant la valeur de l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$, les valeurs de `x` et de `k` étant entrées par l'utilisateur.

```
k=input('entrer la valeur de k : ')
x=input('entrer la valeur de x : ')
p=prod(1:k)
u= - - - - - - ./ - - - - - -
s=p* - - - - - - *exp(-x)
disp(s)
```

   (b) Montrer, grâce à un changement de variable simple, que $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt = \mathrm{e}^x \int_0^{+\infty} (u+x)^k \, \mathrm{e}^{-u} \, du$
   En déduire la commande manquante du script `Scilab` suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher une valeur approchée de $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$ grâce à la méthode de Monte Carlo.

```
k=input('entrer la valeur de k : ')
x=input('entrer la valeur de x : ')
Z=grand(1,100000,'exp',1)
s=exp(-x)* mean( - - - - - - )
disp(s)
```

On considère maintenant l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe la fonction $F = \Psi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ F(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(t) \, \mathrm{e}^{-t} \, dt$$

7. (a) Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une relation entre F , F' et P.
   (c) Montrer que Ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. On considère un polynôme P non nul, vecteur propre de Ψ pour une valeur propre λ non nulle.
   (a) Utiliser la relation obtenue à la question 7.b) pour établir que $P' = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} P$.
   (b) En déduire, en considérant les degrés, que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre possible de Ψ.
   (c) Montrer enfin que $\lambda = 1$ est bien la seule valeur propre de Ψ. (On ne demande pas le sous espace propre associé).

9. (a) Montrer que les endomorphismes φ et Ψ sont égaux.
   (b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et s'il existe un réel a tel que pour tout réel x supérieur ou égal à a, on a $P(x) \geq 0$, alors : $\forall x \geq a \ , \ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geq 0$.