EDHEC – 8 mai 2018 – épreuve annulée

Exercice 1

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $a_n = \dfrac{1}{n \ln n}$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a : $\int_{k}^{k+1} \frac{1}{t \ln t} \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k \ln k}$.

   (b) En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général a_n.

   Dans la suite, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (a) Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

   (b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

   (b) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$, lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.

   (c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variation.

4. (a) Établir que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1.

   (b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

   (c) Pour tout entier naturel n non nul, calculer $f\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a : $u_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

   (d) En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général $\dfrac{1}{-n\ln(1-u_n)}$ est divergente.

   (e) Conclure, en revenant à la définition de u_n, que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.

Exercice 2

On désigne par n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$. Le produit scalaire canonique des vecteurs x et y de $\mathbb{R}^p$ est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme du vecteur x est notée $\|x\|$.

1. Dans cette question, on considère n vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de $\mathbb{R}^p$, tous de norme égale à 1.

   À tout n-uplet $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on associe le vecteur $w_x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k u_k$.

   On se propose de montrer qu'il existe des n-uplets $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dont les coordonnées sont éléments de $\{-1, 1\}$, pour lesquels $\|w_x\| \leqslant \sqrt{n}$ et d'autres pour lesquels $\|w_x\| \geqslant \sqrt{n}$.

   À cet effet, on considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et telles que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on ait :

   $$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

   On considère l'application X, qui, à tout ω de Ω, associe le réel $X(\omega) = \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} X_k(\omega) u_k \right\|^2$.

   On admet que X est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   (a) Calculer, pour tout couple (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, la valeur de $E(X_i X_j)$.

   (b) En déduire l'existence et la valeur de $E(X)$.

   (c) Conclure quant à l'objectif de cette question.

2. Dans cette question, on considère n réels $p_1, p_2, \ldots, p_n$, tous éléments de $]0, 1[$, ainsi que n vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^p$ vérifiant : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\|v_k\| \leqslant 1$.

   On pose $z = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k v_k$ et on se propose de montrer qu'il existe un n-uplet $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dont les coordonnées sont dans $\{0, 1\}$, tel que, en notant $y_x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k v_k$, on ait :

   $$\|z - y_x\| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$$

   À cet effet, on considère n variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et telles que, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, Y_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_k)$.

   On considère l'application Y, qui, à tout ω de Ω, associe le réel $Y(\omega) = \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} (p_k - Y_k(\omega)) v_k \right\|^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   (a) Calculer, pour tout couple (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, la valeur de $E\left((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\right)$.

   (b) Justifier que Y possède une espérance et montrer que : $E(Y) \leqslant \dfrac{n}{4}$.

   (c) Conclure quant à l'objectif de cette question.

Exercice 3

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.

Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable, sur l'un des points d'abscisse $0, 1, \ldots, n$.

Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).

On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. (a) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, X_n possède une espérance et une variance, puis déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

2. On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que Y est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $[Y = n]$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
   (b) En déduire que la loi de Y est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   (c) Vérifier par le calcul que l'on a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1$.
   (d) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$.
   (b) En déduire que : $\forall j \geqslant 2$, $\ln j \leqslant \sum\limits_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leqslant \ln j + 1 - \frac{1}{j}$.
   (c) Conclure alors que : $\sum\limits_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j \to +\infty}{\sim} \ln j$.

4. On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Déterminer pour tout $i \geqslant j$, la probabilité $P_{[Y=i]}(Z = j)$.
   (b) Établir que :
   $$\forall i \leqslant j-1, \quad P_{[Y=i]}(Z = j) = \frac{i+1}{j(j+1)}$$
   (c) Écrire, pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 2, la probabilité $P(Z = j)$ comme une somme finie.
   (d) La variable aléatoire Z possède-t-elle une espérance ?

5. Informatique
   On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `grand(1,1,'uin',a,b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme à valeurs dans $[\![a, b]\!]$.
   (a) Écrire des commandes `Scilab` calculant et affichant la valeur de l'abscisse du mobile après son n^{e} déplacement lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.
   (b) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette d'afficher dans cet ordre les valeurs prises par les variables aléatoires Y et Z.

```
n = 0
a = 0
while a < 2
    n = n+1
    if grand(1,1,'uin',0,n) == 0 then
        a = a+1
        if a == 1 then y=n,end
    end
end
disp(...,'y=')
disp(...,'z=')
```

Problème

Partie 1

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, \mathrm{d}t$.

1. (a) Calculer u_0 et u_1.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. (a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)u_{n+1}u_n = \dfrac{\pi}{2}$.
   (d) En déduire la valeur de u_{2n+1}.

3. (a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n}$.
   (b) En déduire, par encadrement, que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
   (c) Montrer enfin que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4. Utiliser la question 2c) pour compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent de calculer u_n lorsque n est entré par l'utilisateur.

```
n = input('entrer la valeur de n:')
u = %pi/2
for ...............
end
disp(u)
```

Partie 2

On note f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5. Vérifier que f est une densité de probabilité. Dans la suite, on considère une variable aléatoire réelle X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et ayant f pour densité.

6. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

7. (a) Montrer que X possède une espérance et la calculer.
   (b) Montrer que X possède également une variance et la calculer.

8. On considère maintenant une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la même loi que X.
   Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $I_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et on admet que I_n est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition, notée F_n, de la variable aléatoire I_n.
   (b) La suite (I_n) converge-t-elle en loi ?

(c) Déterminer une densité de I_n, puis montrer que I_n possède un moment d'ordre 2 :

$$E(I_n^2) = 2\int_0^{\pi/2} x(\cos x)^n \,\mathrm{d}x$$

(d) Établir que : $E(I_n^2) \leqslant \pi u_n$.

(e) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire dont on précisera la loi.

9. Soit h la restriction de la fonction cosinus à $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(a) Montrer que h réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{,}2]$ sur $[0, 1]$.

(b) Justifier que l'on peut poser $Y = h(X)$. On admet alors que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Déterminer la fonction de répartition G de Y, puis vérifier que Y suit une loi uniforme.

(c) On rappelle que la commande `grand(1,1,'unf',a,b)` renvoie une simulation `Scilab` d'une variable aléatoire à densité suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ et on admet que la fonction h^{-1} s'obtient par l'instruction `acos`. Compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent de simuler la variable aléatoire X.

```
Y = grand(1,1,'unf',...,...)
X = ...
```