EDHEC 2019 VOIE S

Exercice 1.

Partie 1 : étude d'un exemple

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) (a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.

(b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).

(c) En `Scilab`, la commande `r=rank(M)` renvoie dans la variable `r` le rang de la matrice M. On a saisi :

```
A=[1,0,0;-2,3,-2;-1,1,0]
r1=rank(A-eye(3,3))
r2=rank(A-2*eye(3,3))
disp(r1,'r1=')
disp(r2,'r2=')
```

`Scilab` a renvoyé :

```
r1 =
        1.
r2 =
        2.
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés ?

(d) Donner une base de chacun des noyaux $\text{Ker}(f - \lambda_1 Id)$ et $\text{Ker}(f - \lambda_2 Id)$.

(2) (a) Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1, v_1) est une base de $\text{Ker}(f - \lambda_1 Id)$ et (v_2) une base de $\text{Ker}(f - \lambda_2 Id)$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.

(b) On note $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2).

Partie 2 : généralisation

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p \geq 2$, soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme diagonalisable de E ayant p valeurs propres, λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_p, deux à deux distinctes.

On se propose de déterminer la décomposition de chaque vecteur x de E sur la somme directe $\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} \text{Ker}(f - \lambda_k Id)$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

(3) Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D.

(a) En notant I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

$$(D - \lambda_1 I_n)(D - \lambda_2 I_n) \ldots (D - \lambda_p I_n) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

(b) En déduire un polynôme annulateur de f.

Pour chaque k de $[\![1,p]\!]$, on définit le polynôme $L_k = \displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p} \frac{X-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}$

(4) (a) En distinguant les cas $i = k$ et $i \neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.

(b) Montrer que $(L_1, L_2, \ldots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

(c) Établir alors que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X],\ P = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) L_k$$

(d) En déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{P} L_i = 1$.

(5) (a) Montrer que, pour tout x de E, $L_k(f)(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f - \lambda_k Id)$, où $L_k(f)(x)$ désigne l'image du vecteur x de E par l'endomorphisme $L_k(f)$.

(b) En déduire la décomposition cherchée.

(6) Vérifier que cette dernière décomposition redonne celle obtenue pour l'endomorphisme f de la partie 1, si l'on choisit $n = 3$, $E = \mathbb{R}^3$ et $p = 2$.

Exercice 2.

Partie 1 : question préliminaire et présentation de deux variables aléatoires X et T

(1) On rappelle que la fonction arc tangente, notée Arctan, est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(a) Rappeler l'expression, pour tout réel x, de $\mathrm{Arctan}'(x)$.

(b) Donner la valeur de de $\mathrm{Arctan}(1)$ puis montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Justifier l'équivalent suivant :

$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$$

(2) (a) Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$ peut-être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

(3) (a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$.

(b) Déterminer la fonction de répartition G de T.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires associée à X.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(1) (a) Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.

(b) On pose, pour tout entier n de $\mathbb{N}^\star$, $Y_n = \dfrac{\pi}{n} M_n$. Justifier que la fonction de répartition de Y_n, notée G_n, est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \left(\frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\right)^n$$

(2) (a) Déterminer, pour tout x négatif ou nul, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x)$.

(b) Montrer que, pour tout x strictement positif, on a :

$$G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)^n$$

(c) En déduire pour tout x strictement positif, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x)$.

(d) Déduire des questions précédentes que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge en loi vers T.

Exercice 3.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.
On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

Partie 1 : définition de l'adjoint $u^\star$ d'un endomorphisme u de E.
Dans toute cette partie, u désigné un endomorphisme de E.
On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté $u^\star$, qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^\star(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$

(1) (a) Montrer que si $u^\star$ existe, alors on a, pour tout y de E :

$$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i$$

(b) En déduire que si $u^\star$ existe, alors $u^\star$ est unique.

(2) (a) Vérifier que l'application $u^\star$ définie par l'égalité établie à la question (1)(a) est effectivement un endomorphisme de E.

(b) Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E, appelé adjoint de u, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$$

Partie 2 : étude des endomorphismes normaux.
On dit que u est un endomorphisme normale quand on a l'égalité :

$$u \circ u^\star = u^\star \circ u$$

(3) Soit f un endomorphisme symétrique de E. Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

(4) (a) Montrer que : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^\star(x)\|$.

(b) En déduire que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^\star)$.

(5) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par $u^\star$.

(6) On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous espace propre associé.

(a) Montrer que E_λ est stable par $u^\star$.

(b) Établir que $(u^\star)^\star = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Problème

Partie 1

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de X, la fonction G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)t^k$$

(1) Calculer $G(1)$.

(2) Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G.

(3) Établir la relation : $V(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$.

Partie 2

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

(4) (a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$.

(b) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star \backslash \{1\},\ \ln n + \dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \ln n + 1$.

(c) En déduire un équivalent très simple de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

(5) Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

Partie 3

Dans cette partie, n désigne toujours un entier naturel non nul.

(6) On admet que, si a et b sont des entiers tels que $a < b$, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` permet à `Scilab` de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme discrète sur $[\![a, b]\!]$. Compléter le script suivant pour que les lignes (5), (6), (7) et (8) permettent d'échanger les contenus des variables $A(j)$ et $A(p)$.

```
(1)   n=input('entrez une valeur pour n :')
(2)   A=1:n
(3)   p=n
(4)   for k=1:n
(5)       j=grand(1,1,'uin',1,p)
(6)       aux=____
(7)       A(j)=____
(8)       A(p)=____
(9)       p=p-1
(10)  end
(11)  disp(A)
```

(7) On suppose dorénavant qu'après exécution du script précédent correctement complété, le vecteur A est rempli de façon aléatoire par les entiers de $[\![1, n]\!]$ de telle sorte que les $n!$ permutations soient équiprobables.
On considère alors les commandes `Scilab` suivantes (exécutées à la suite du script précédent) :

```
m=A(1)
c=1
for k=2:n
    if A(k)>m then m=A(k)
                   c=k
    end
end
disp(c)
```

(a) Expliquer pourquoi, à la fin de la boucle `for`, la variable `m` contient la valeur n.

(b) Quel est le contenu de la variable c affiché à la fin de ces commandes ?

(c) On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `find(test)` permet de trouver à quelle(s) place(s) se trouvent les éléments d'une matrice satisfaisant au test proposé.
Compléter le script `Scilab` ci-dessous afin qu'il renvoie et affiche le contenu de la variable `c` étudiée plus haut :

```
c=find(---)
disp(c)
```

On admet que les contenus des variables `A(1)`, `A(2)`, ..., `A(n)` sont des variables aléatoires notées $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ et que le nombre d'affectations concernant la variable informatique c effectuées au cours du script présenté au début de la question (7), y compris la première, est aussi une variable aléatoire, notée X_n.
On suppose que ces variables aléatoires sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note G_n ma fonction génératrice de X_n, E_n son espérance et V_n sa variance.

(8) Donner la loi de X_1.

(9) (a) Montrer que $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

(b) Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$. En déduire les lois de X_2 et X_3.

(c) En considérant le système complet d'événements $((A_n = n), (A_n < n))$, montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \forall j \in [\![2, n]\!],\ P(X_n = j) = \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j)$$

(d) Donner la loi de X_4.

(10) (a) Vérifier que la formule obtenue à la question (9)(c) reste valable pour $j = 1$.

(b) Établir la relation :

$$\forall n \geq 2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}(t) \qquad (\star)$$

(c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t+j)$$

(11) En dérivant la relation $(\star)$, trouver une relation entre E_n et E_{n-1} puis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ E_n = u_n$$

(12) Recherche d'un équivalent de V_n.

(a) En dérivant une deuxième fois la relation $(\star)$, montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

(b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, V_n en fonction de u_n et h_n.

(c) Montrer que $V_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.