Le sujet est composé d'un unique problème composé de cinq parties, relativement indépendantes les unes des autres.
La partie A étudie des endomorphismes de polynômes. Cette partie est ***indépendante*** *du reste du problème.*
Les parties B, C et D étudient un opérateur fonctionnel. Certains résultats de la partie B seront utilisés dans les parties C et D.
Enfin, la partie E étudie un analogue discret de cet opérateur manipulant les notions de suites et séries. Cette partie est ***indépendante*** *du reste du problème.*

PARTIE A : Étude d'un endomorphismes de polynômes

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes (ou fonctions polynomiales) à coefficients réels de degré inférieurs ou égal à n, et $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^n)$ sa base canonique.

Dans toute cette partie, a désigne un réel quelconque.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose : $\quad \Psi_a(P) = 2P + (X-a)P'$.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit également la fonction $\Phi_a(P)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_a(P)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-a)^2} \displaystyle\int_a^x (t-a)P(t)\mathrm{d}t & \text{si } x \neq a, \\ \dfrac{P(a)}{2} & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Enfin on définit, pour tout k de $[\![0;n]\!]$, le polynôme Q_k par : $\quad Q_k = (X-a)^k$.

1. Montrer que l'application $\Psi_a : P \mapsto \Psi_a(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice de Ψ_a dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. (a) Montrer que Ψ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.
   (b) Justifier que Ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (c) Calculer, pour tout k de $[\![0,n]\!]$, $\Psi_a(Q_k)$.
   (d) En déduire une base de chacun des sous-espaces propres de Ψ_a.
4. (a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\big((X-a)^2P(X)\big)'$ en fonction de $\Psi_a(P)$.
   (b) En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$: $\quad \Phi_a\big(\Psi_a(P)\big) = P$.
   (c) En déduire que $\Phi_a : P \mapsto \Phi_a(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$.
   (d) Montrer que Φ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

PARTIE B : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Dans la suite du problème, on fixe $a = 0$ et on prolonge l'application Φ_0 précédente à l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, que l'on note plus simplement Φ.

On considère f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit la fonction $\Phi(f)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0, \\ \dfrac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

5. On pose, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\quad h(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$.

(a) Justifier que la fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser, pour tout x de $\mathbb{R}, h'(x)$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Justifier qu'il existe deux réels α_x et β_x appartenant à $[0;x]$ tels que :

$$f(\alpha_x) \int_0^x t \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t f(t) \mathrm{d}t \leqslant f(\beta_x) \int_0^x t \, \mathrm{d}t.$$

(c) En déduire : $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$.

(d) Montrer que l'on a aussi : $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$.

6. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \big(\Phi(f)\big)'(x) = \frac{1}{x}\big(f(x) - 2\Phi(f)(x)\big).$$

7. (a) Montrer que, si f est une fonction paire (respectivement impaire), alors $\Phi(f)$ est encore une fonction paire (respectivement impaire).

(b) Montrer que, si f est une fonction positive, alors $\Phi(f)$ est encore une fonction positive.

8. On **admet** le résultat suivant :

$$\text{si } \lim_{+\infty} f = 0, \quad \text{alors } \lim_{+\infty} \big(\Phi(f)\big) = 0.$$

(a) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(g)$ où $g : x \mapsto f(x) - \ell$, montrer :

$$\text{si } \lim_{+\infty} f = \ell, \quad \text{alors } \lim_{+\infty} \big(\Phi(f)\big) = \frac{\ell}{2}.$$

(b) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(h)$ où $h : x \mapsto f(-x)$, montrer :

$$\text{si } \lim_{-\infty} f = \ell, \quad \text{alors } \lim_{-\infty} \big(\Phi(f)\big) = \frac{\ell}{2}.$$

PARTIE C : Une application en probabilité

Dans cette partie, on pourra utiliser des résultats de la partie B.

On considère F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

On pose $G = 2\Phi(F)$; ainsi, on a : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2} \displaystyle\int_0^x tF(t)\mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0, \\ F(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

9. Montrer : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leqslant G(x) \leqslant F(x) \quad$ et $\quad \forall x \in \mathbb{R}^{-*},\ 0 \leqslant F(x) \leqslant G(x)$.

10. Justifier que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ et exprimer, pour tout x de $\mathbb{R}^*, G'(x)$ à l'aide de $x, F(x)$ et $G(x)$.

11. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} G'(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Montrer que g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire V puis que G est la fonction de répartition de V.

12. On définit la fonction h_1 sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

(a) Montrer que h_1 est une densité de probabilité.

Soit X_1 une variable aléatoire admettant h_1 pour densité.

(b) Montrer que X_1 admet une espérance, notée $\mathbf{E}(X_1)$, et que l'on a : $\quad \mathbf{E}(X_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(c) On note H_1 la fonction de répartition de X_1 et on pose $H_2 = 2\Phi(H_1)$.

Montrer : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad H_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0, \\ 1 - \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}{x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

D'après la fonction 11., H_2 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité que l'on note X_2. Déterminer une densité h_2 de X_2, puis montrer que X_2 admet une espérance (que l'on ne cherche pas à calculer).

PARTIE D : Étude d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire

On note E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E_2 l'ensemble des fonctions f de E telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(x)\big)^2 \mathrm{d}x$ converge.

Pour toute fonction f de E, on note toujours $\Phi(f)$ la fonction définie **dans cette partie sur** $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t & \text{si } x > 0, \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

13. (a) Justifier : $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ |xy| \leqslant \frac{1}{2}\big(x^2 + y^2\big)$.

(b) En déduire que, pour toutes fonctions f et g de E_2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

14. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E_2 \times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (f,g) \in E_2 \times E_2, \ \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

15. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire de E_2.

On munit E_2 de ce produit scalaire et de la norme associée $\| \cdot \|$.

16. Soit f une fonction de E_2.

On note, comme dans la partie **B.**, pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $h(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$.

(a) Calculer les limites de $x \mapsto \dfrac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}$ et de $x \mapsto \dfrac{\big(h(x)\big)^2}{x^3}$ en 0.

(b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall X > 0, \int_0^X \frac{\big(h(x)\big)^2}{x^4}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\frac{\big(h(X)\big)^2}{X^3} + \frac{2}{3}\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x.$$

(c) Soit $X > 0$. En étudiant le signe de la fonction polynomiale $\lambda \mapsto \displaystyle\int_0^X \big(\lambda f(x) + \Phi(f)(x)\big)^2 \mathrm{d}x$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$\int_0^X f(x)\Phi(f)(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^X \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

(d) En déduire : $\quad \forall X > 0, \left(\displaystyle\int_0^X \big(\Phi(f)(x)\big)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant \dfrac{2}{3}\left(\displaystyle\int_0^X \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$.

(e) Montrer alors que la fonction $\Phi(f)$ appartient à E_2 et que l'on a : $\quad \|\Phi(f)\| \leqslant \dfrac{2}{3}\|f\|$.

(f) En utilisant la relation de la question **16.b**, justifier que la limite de $X \mapsto X\big(\Phi(f)(X)\big)^2$ en $+\infty$ est finie, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

(g) En déduire : $\quad \|\Phi(f)\|^2 = \dfrac{2}{3}\langle \Phi(f), f \rangle$.

PARTIE E : Étude d'une suite

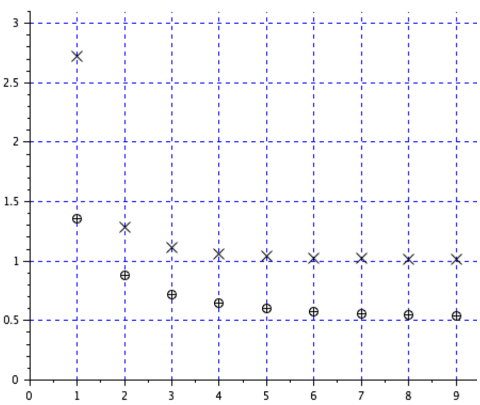
Dans cette partie, ***indépendante des précédentes,*** *on étudie un analogue discret de l'application* Φ *étudiée précédemment.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

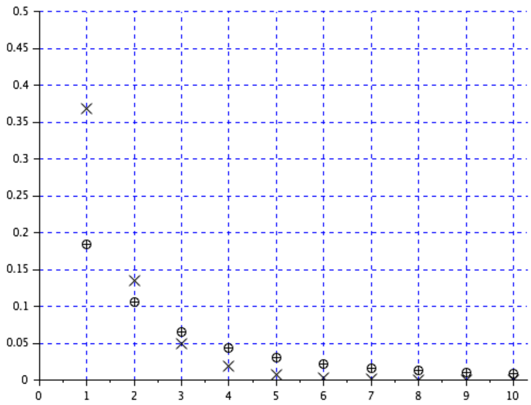
$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k.$$

17. On suppose que l'on dispose d'une fonction Scilab d'en-tête `function u = suite_u(n)` qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de u_n.
En déduire une fonction Scilab d'en-tête `function v = suite_v(n)` qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de v_n.

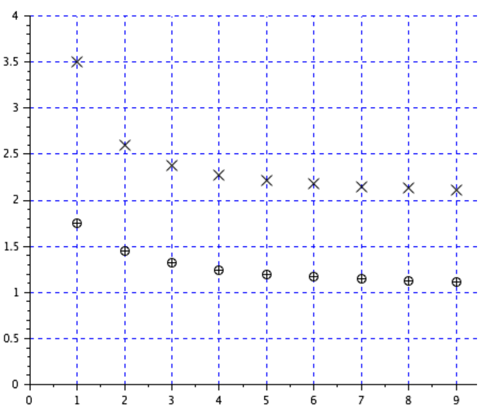
18. On suppose dans cette question uniquement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (b) Pour différentes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroissantes, on représente ci-dessous, à l'aide des fonctions **`suite_u`** et **`suite_v`**, les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole $\times$ et ceux de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec le symbole $\oplus$.
   À la vue des graphes suivants, quelles conjectures peut-on faire sur la monotonie, la convergence et la valeur de la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de celle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?



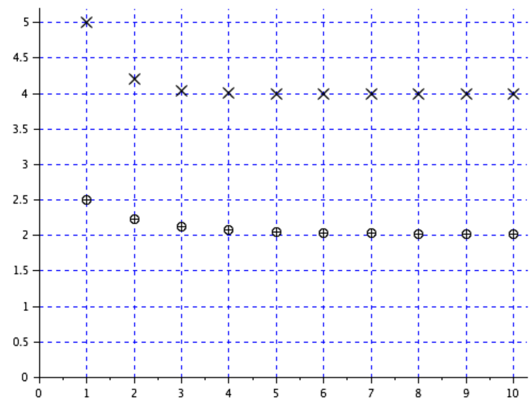
Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = e^{1/n^2}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = e^{-n}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{6n+1}{3n-1}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 4 + 5(0.2)^n$

(c) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad v_n \geqslant \dfrac{u_n}{2} \quad$ et $\quad v_{2n} \leqslant \dfrac{n+1}{2(2n+1)} v_n + \dfrac{3n+1}{4(2n+1)} u_{n+1}$.

(d) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad (n+2)v_{n+1} = nv_n + u_{n+1} \quad$ puis $\quad v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1})$.

(e) Démontrer toutes les conjectures faites à la question **18.b**.

19. On suppose dans cette question uniquement que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge.

(a) Montrer : $\quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k - N v_N$.

(b) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ converge.

(c) Montrer ensuite que $N v_N$ tend vers une limite finie lorsque l'entier N tend vers $+\infty$, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

(d) En déduire : $\quad \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

20. On considère dans cette question une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

(a) Justifier qu'il existe une variable aléatoire Z, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(Z = n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(Y = k).$$

(b) On suppose dans cette question que Y admet une espérance, notée $\mathbf{E}(Y)$.
Montrer : $\quad \mathbf{P}(Z = n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\mathbf{E}(Y)}{n^2}$. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?