MATHÉMATIQUES (options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L)

Les épreuves orales de mathématiques concernent les candidats admissibles dans les options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L. Sur chacune des 4 sessions de 4 jours, ces épreuves ont mobilisé 3 à 5 jurys par demi-journée.

1. Procédure d'interrogation

Le sujet proposé aux candidats comprend deux parties:

- un *exercice principal* préparé pendant 30 minutes et portant sur l'une des trois parties suivantes du programme: *algèbre, probabilités et analyse*. De plus, une *question de cours* en rapport avec le thème de l'exercice fait partie de l'exercice principal.
- un *exercice sans préparation* portant sur une partie différente de celle de l'exercice principal, permettant de tester en temps réel les qualités de réactivité des candidats.

Rappelons que dans tous les cas, chaque candidat est interrogé en probabilités, soit au titre de l'exercice principal (20 à 25 minutes), soit à celui de l'exercice sans préparation (5 à 10 minutes).

2. Résultats statistiques

Par option, les notes moyennes obtenues sont les suivantes:

- *option scientifique* (458 candidats): 11,15 (11,32 en 2012)
- *option économique* (161 candidats): 9,62 (9,77 en 2012);
- *option technologique* (28 candidats): 10,18 (12,59 en 2012);
- *option littéraire B/L* (17 candidats): 11,71 (10,71 en 2012).

3. Commentaires

A l'issue des épreuves orales de mathématiques, on peut tirer un certain nombre d'enseignements.

Tout d'abord, les rapports de jury des concours précédents ainsi que les échanges dans la commission de mathématiques lors de la journée des classes préparatoires, sont manifestement répercutés auprès des admissibles : ainsi, les prestations d'une majorité de candidats sont essentiellement orales et le tableau n'est utilisé que comme support de l'exposé.
Ensuite, la « règle du jeu » est assez bien respectée : les candidats passent les questions non traitées ou inachevées et poursuivent l'exposé.
Enfin, la question courte en fin d'interrogation joue son rôle d'amortisseur ou d'amplificateur de la note de l'exercice principal.

Option scientifique

Le niveau général est bon, comparable à celui du concours 2012 : les notes s'étendent entre 3 et 20 et l'écart-type de 3,41 permet de classer correctement les admissibles.
Il y a quelques candidats excellents dont les exposés très clairs, concis et exhaustifs s'appuient sur une argumentation pertinente qui leur permet de prouver les résultats attendus.
Cette année, le « principe des vases communicants » a privilégié l'algèbre linéaire et bilinéaire au détriment de l'analyse (suites, fonctions réelles, calcul différentiel et intégral).
L'ensemble des examinateurs a constaté que l'abstraction des sujets d'algèbre n'est pas un handicap insurmontable comme ce fut le cas durant de nombreuses années : les exposés sont clairs et argumentés rigoureusement.

En revanche, une majorité de candidats éprouvent de grandes difficultés à résoudre les sujets d'analyse « pure », même les plus simples. Les notions les plus élémentaires - étude de fonctions, représentations graphiques, théorèmes classiques (accroissements finis, valeurs intermédiaires, etc.) – ne sont pas du tout maîtrisées.
Quant au niveau des connaissances en probabilités, il reste assez stable.

Les progrès substantiels constatés en algèbre et le déclin des connaissances en analyse peuvent en partie être expliqués par les thèmes successifs de l'épreuve écrite de Mathématiques HEC qui font souvent appel à des connaissances majoritairement algébriques.
Il est alors possible que les professeurs insistent plus sur l'apprentissage de l'algèbre !

Option économique

Le décrochage du niveau des candidats de cette option par rapport à ceux de l'option scientifique se confirme cette année encore.
Les observations relevées l'an passé restent non seulement d'actualité mais tous les points négatifs se sont renforcés.
Les concepts fondamentaux sont peu maîtrisés et font parfois l'objet de graves confusions
(fonction de répartition et densité, « dimension » d'une application linéaire), le cours n'est pas bien assimilé (méthode des rectangles, définition de la convergence d'une intégrale généralisée), les explications utilisent un langage mathématique très approximatif qui nuit à la rigueur de l'exposé, les techniques de calculs élémentaires font souvent défaut (limites de fonctions) et les confusions entre condition nécessaire et condition suffisante se sont accrues : on retrouve les lacunes non comblées héritées du secondaire.
La présence de quantificateurs dans un sujet revêt souvent pour les candidats, un caractère purement « décoratif » tant ils sont mal utilisés voire ignorés.
On note enfin dans l'attitude de nombre de candidats un degré de maturité assez faible qui se traduit par une certaine difficulté à se concentrer et à établir des liens entre les questions d'un exercice, et par une prise d'initiative très « timide ».

Option technologique

Les niveaux des candidats (28 admissibles) sont très contrastés avec une moyenne significativement inférieure à celle du concours 2012 et un écart-type plus élevé (4,35 cette année contre 4,09 en 2012).

Option littéraire B/L

Sur les 17 candidats admissibles présents, la moyenne est de 11,71 et s'accompagne d'un écart-type très élevé de 4,74.
Il est fort probable que le choix de l'épreuve à option de l'écrit (sciences sociales ou mathématiques) constitue l'explication majeure de cette dispersion des notes.

4. Remarques

Le jury recommande aux futurs candidats d'éviter de réciter à l'oral des recettes qu'ils ne maîtrisent pas : même si elles peuvent parfois faire illusion dans un problème d'écrit où la part d'initiative personnelle est réduite, ces phrases ou ces formules apprises par cœur et qui tiennent lieu de « prêt-à penser », passent difficilement le filtre de l'épreuve orale.
A partir du concours 2015, les sujets de mathématiques se baseront sur le nouveau programme de mathématiques des classes préparatoires commerciales

Les sujets suivants, posés aux candidats des options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L, constituent un échantillon des sujets proposés lors des épreuves orales du concours 2013.

1. SUJETS DE L'OPTION SCIENTIFIQUE

Exercice principal S46

1. Question de cours : Énoncer le théorème de la bijection.

2.a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{8}}\,\mathrm{d}t$ et en donner la valeur.

b) Établir l'inégalité stricte : $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{8}}\,\mathrm{d}t > 1$.

3. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence d'un unique réel u_n vérifiant $\int_{\frac{1}{n}}^{u_n} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{8}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$.

4.a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les inégalités : $(u_n - \frac{1}{n})\,\mathrm{e}^{-\frac{u_n^2}{8}} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant (u_n - \frac{1}{n})\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8n^2}}$.

b) En déduire que u_n est équivalent à $\frac{2}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

5. Trouver un équivalent de la différence $(u_n - \frac{2}{n})$, quand n tend vers $+\infty$, de la forme $\frac{\alpha}{n^\beta}$ où α et β sont des réels, indépendants de n, à déterminer.

Exercice sans préparation S46

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, admettant une densité f et vérifiant la propriété suivante : la variable aléatoire $X + \frac{1}{X}$ possède une espérance mathématique.

1. Établir l'inégalité : $E\left(X + \frac{1}{X}\right) \geqslant 2$.

2. Montrer que l'inégalité précédente n'est jamais une égalité, mais que $E\left(X + \frac{1}{X}\right)$ peut prendre des valeurs arbitrairement proches de 2.

Exercice principal S51

1. Question de cours : Développement limité d'ordre 1 d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (2x-y)^2\,\mathrm{e}^{2x-y}$.

2.a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifier que : $\forall A \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + 2\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$.

b) Montrer que f possède une infinité de points critiques. Trouver ceux en lesquels f admet un extremum local ou global.

3. Soit (α, β) un couple de réels différent de $(0,0)$ et g une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles vérifiant : $\forall A \in \mathbb{R}^2,\ \alpha\,\dfrac{\partial g}{\partial x}(A) + \beta\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(A) = 0$.

Pour tout couple $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $h(u,v) = g(\alpha u - \beta v, \beta u + \alpha v)$.

a) Montrer que $h(u+\varepsilon, v) = h(u,v) + o(\varepsilon)$ (quand ε tend vers 0).

b) En déduire l'existence d'une fonction φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ h(u,v) = \varphi(v)$.

4. Montrer que f est la seule fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall A \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + 2\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 0 \\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(0,t) = t^2\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases}.$$

Exercice sans préparation S51

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On pose : $M = \begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $P(X=Y)$ et $P(XY>0)$.
2. Trouver la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.

Exercice principal S52

1. Question de cours : Inégalité des accroissements finis pour une fonction réelle d'une variable réelle.

Soit f une fonction définie et continue sur $]0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $u_n(f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

2.a) Proposer une interprétation de $\dfrac{u_n(f)}{n}$ en terme d'aires et indiquer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$, dans le cas où f admet un prolongement continu au segment $[0,1]$.
b) On suppose dans cette question que f est la fonction $t \mapsto t^2$.
Calculer $u_n(f)$ et vérifier que la suite $\big(u_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

3. Dans cette question, f est une fonction continue positive et croissante sur $]0,1]$.

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que la suite $\big(u_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et majorée.

4. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que si f admet un prolongement de classe C^1 au segment $[0,1]$, alors la suite $\big(u_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

5. Pour tout réel α, on note f_α la fonction définie sur $]0,1]$ par $f_\alpha(t) = t^\alpha$.

Déterminer pour quelles valeurs de α l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et la suite $\big(u_n(f_\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornée.

Exercice sans préparation S52

Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle\,,\rangle$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle\,.$$

1. Que peut-on dire de la matrice d'un élément $f \in \mathcal{A}(E)$ dans une base orthonormée de E ?

2. On note $\mathcal{C}(E)$ l'ensemble des endomorphismes g de E qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{A}(E)$, c'est-à-dire qui vérifient :

$$\forall f \in \mathcal{A}(E),\ f \circ g = g \circ f\,.$$

a) Montrer que lorsque la dimension de E est égale à 2, $\mathcal{C}(E)$ est un plan vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ qui contient $\mathcal{A}(E)$.
b) Trouver $\mathcal{C}(E)$ lorsque la dimension de E est strictement supérieure à 2.

Exercice principal S54

1. Question de cours : Rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Que peut-on dire de sa matrice dans une base orthonormale ?

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$ est muni du produit scalaire usuel, noté $\langle\,,\rangle$, pour lequel la base canonique est orthonormale.

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ dont M est la matrice dans la base canonique.

2.a) Montrer que la matrice M n'est pas inversible.

b) Montrer que l'endomorphisme $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ est symétrique.

3.a) Montrer que pour tout couple (x, y) de vecteurs de $\mathbb{R}^5$, on a : $\langle \varphi(x), y \rangle = -\langle x, \varphi(y) \rangle$.

b) Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme φ^2 sont négatives ou nulles.

c) En déduire que M n'est pas diagonalisable.

4.a) Montrer que le noyau de φ et l'image de φ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $\mathbb{R}^5$.

b) Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de φ^2 et x un vecteur propre de φ^2 associé à λ, alors les deux vecteurs x et $\varphi(x)$ engendrent un plan de $\mathbb{R}^5$ qui est stable par l'endomorphisme φ.

c) Établir l'existence de deux réels non nuls α et β, et d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^5$ dans laquelle la matrice de φ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice sans préparation S54

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]-1, +1[$.

1. Trouver toutes les fonctions ϕ définies, continues et strictement monotones sur $]-1, +1[$ telles que la variable aléatoire $Y = \phi(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

2. En déduire une fonction paire ψ définie sur $]-1, +1[$ telle que la variable aléatoire $\psi(X)$ suive aussi la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice principal S55

1. Question de cours : Rappeler l'énoncé du théorème de la limite centrée.

2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et convergeant en probabilité vers 0.

a) Établir pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité : $P(|U_n + V_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|U_n| \geqslant \varepsilon/2) + P(|V_n| \geqslant \varepsilon/2)$.

b) En déduire que la suite $(U_n + V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

Dans la suite de l'exercice, θ et ρ désignent deux paramètres réels inconnus , avec $\rho > 0$.

Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction $f_{\theta,\rho}$ définie par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{\theta,\rho}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\exp\left(-\dfrac{1}{2}(x-\theta-\rho)^2\right) + \exp\left(-\dfrac{1}{2}(x-\theta+\rho)^2\right)\right)$, où exp désigne la fonction exponentielle.

3.a) Montrer que X admet un moment d'ordre 4.

b) Calculer l'espérance de X et montrer que la variance de X est égale à $1+\rho^2$.

4. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi que X.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $R_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 - 1$.

a) Montrer que $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs de ρ^2. Ces estimateurs sont-ils sans biais ?

b) Proposer un intervalle de confiance de θ utilisable pour de grands échantillons de la loi de X.

Exercice sans préparation S55

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a et b deux réels tels que $ab \neq 0$. On note $M(a,b)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ donnée par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1.a) Calculer $M(a,b)^2$

b) Montrer que $M(a,b)^2$ est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

2. Montrer que $M(c,d) = \begin{pmatrix} 0 & c & c & \cdots & c \\ d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $M(a,b)$ si et seulement si $ab = cd$.

Exercice principal S60

1. Question de cours : Définition et propriétés des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien.

2. Dans cette question, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ que l'on munit du produit scalaire usuel pour lequel la base canonique (e_1, e_2, e_3) est orthonormée.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, 2x_1 + 2x_3)\,.$$

a) Trouver la matrice de u dans la base canonique et en déduire que u est symétrique.
b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$, puis montrer que $\big(u(e_1), u(e_2)\big)$ est une base orthogonale de $\operatorname{Im} u$.
c) Déterminer la matrice du projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} u$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Dans la suite de l'exercice, $\big(E, \langle\, ,\rangle\big)$ est un espace euclidien et on note $\|\ \|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle\, ,\rangle$.

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E, x un vecteur de E et $y = p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F.
Montrer que pour tout $z \in F$, on a : $\|x - z\| \geqslant \|x - y\|$, avec égalité si et seulement si $z = y$.

4. Soit u un endomorphisme symétrique de $\big(E, \langle\, ,\rangle\big)$. On note p le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} u$.
a) Montrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires et orthogonaux.
b) Soit $x \in E$. Justifier l'existence d'un vecteur $y_0 \in E$ tel que $u(y_0) = p(x)$ et trouver parmi les vecteurs $y \in E$ vérifiant $u(y) = p(x)$, celui qui a la plus petite norme ; on le note $v(x)$.
c) Montrer que v est linéaire, puis calculer $u \circ v$ et $u \circ v \circ u$.
d) Calculer $p(x)$ et $v(x)$ pour $x = (1, 1, 1)$, lorsque u est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de la question 2.

Exercice sans préparation S60

Soit X une variable aléatoire possédant une densité de probabilité continue sur $\mathbb{R}$ et nulle hors de l'intervalle $]-1, +1[$.
1. Montrer que X possède une variance, qui est strictement comprise entre 0 et 1.
2. Montrer que toute valeur de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ est effectivement possible pour la variance de X.

Exercice principal S62

1. Question de cours : Définition de la limite d'une suite de nombres réels.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sup(u_k,\, k \geqslant n)$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

b) On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{1}{p}\right| > \varepsilon\right)$.

4.a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant n$, on a : $P(S_n = k) = \dbinom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$.

b) Que vaut $P(S_n = k)$ lorsque $k < n$?

5. Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, bornée et de dérivée bornée sur $[1, +\infty[$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} f\left(1 + \dfrac{k}{n}\right) \dbinom{k+n-1}{n-1} (1-x)^k$ est convergente.

On pose alors pour tout $x \in]0,1]$: $K_n(x) = x^n \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f\left(1 + \dfrac{k}{n}\right) \dbinom{k+n-1}{n-1} (1-x)^k$

b) Établir l'existence de $E\left(f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right)$ et exprimer $E\left(f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right)$ en fonction de $K_n(p)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe deux réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f\left(\frac{1}{p}\right)\right| \leqslant A\,\varepsilon + B\,P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{p}\right| > \varepsilon\right).$$

d) Soit $t \in [1, +\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left|K_n\left(\dfrac{1}{t}\right) - f(t)\right|$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice sans préparation S62

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

On pose : $F = \{P \in E,\, P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E,\, P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$

et $H = \{P \in E,\, P(X) = P(-X)\}$.

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice principal S63

1. Question de cours : Théorème de transfert.

Soit p un réel vérifiant $\dfrac{1}{2} < p < 1$. On pose $q = 1 - p$.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X_0 est la variable certaine de valeur 0 et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout t réel, on pose : $Y_n = 2X_n - n$ et $g_n(t) = E\big(\mathrm{e}^{-tY_n}\big)$, où E désigne l'espérance..

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a : $g_n(t) = \big(p\,\mathrm{e}^{-t} + q\,\mathrm{e}^{t}\big)^n$.

3.a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité : $P(Y_n \leqslant 0) \leqslant g_n(t)$.

b) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ (indépendant de n) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P(Y_n \leqslant 0) \leqslant \alpha^n$.

4. Dans cette question, soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On pose $Z_0 = 0$ et $Z_n = \min(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$.

a) Déterminer $Z_n(\Omega)$. Calculer $P(Z_n = -n)$.

b) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose : $A_k = \displaystyle\bigcup_{j=k+1}^{n} [Y_j \leqslant 0]$. Montrer que l'on a : $P(A_k) \leqslant \dfrac{\alpha^{k+1}}{1-\alpha}$.

c) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $r \in [\![-n, 0]\!]$. Établir les inégalités :

$$P(Z_n = r) \leqslant P\big(A_k \cap (Z_n = r)\big) + P(Z_k = r) \quad \text{et} \quad E(Z_n) \geqslant -n\alpha^n + E(Z_{n-1})\,.$$

5. Montrer que la suite $\big(E(Z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice sans préparation S63

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On suppose que f n'est pas diagonalisable et qu'il vérifie : $(f - \mathrm{id}) \circ (f^2 + \mathrm{id}) = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$ sont supplémentaires.

2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice principal S74

1. Question de cours : Définition des valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires de E.

2. Déterminer la dimension de E^*.

3. Dans cette question uniquement, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p ($p \in \mathbb{N}$).
Soit f et g deux éléments de E^* définis par : pour tout $P \in E$, $f(P) = P(0)$ et $g(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)dt$.
Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Ker}(g)$. Les formes linéaires f et g sont-elles proportionnelles ?

4. Soit f et g deux éléments non nuls de E^* tels que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$.
a) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$.
b) Soit $x_0 \notin \text{Ker}(f)$. On pose : $h = g(x_0)f - f(x_0)g$. Montrer que $h = 0$. Conclusion.

5. Dans cette question, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On identifie A et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ est dit *stable* par A lorsque pour tout $X \in F$ on a $AX \in F$.
a) Soit $X \in F$ avec $X \neq 0$. Montrer que $\text{Vect}(X)$ est stable par A si et seulement si X est vecteur propre de A.
b) Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et L la forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par $L(x, y, z) = ax + by + cz$.
Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par A si et seulement si $\text{Ker}(L) \subset \text{Ker}(LA)$.
En déduire que $\mathcal{P}$ est stable par A si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$ (transposée de A).

Exercice sans préparation S74

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi normale d'espérance m et de variance égale à 1. Soit b un réel strictement positif fixé.

1. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, l'application $a \mapsto P(a < X < a + b)$ admet un maximum atteint en un point a_0 que l'on déterminera.
2. Exprimer la valeur de ce maximum à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
3. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice principal S79

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle\, , \rangle$ et de la norme euclidienne associée notée $\|\,.\|$.
Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles. On pose :

$$\mathcal{P} = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R};\, \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ f(-x) = f(x)\} \text{ et } \mathcal{I} = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R};\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ f(-x) = -f(x)\}\,.$$

Enfin, on note $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}^n$ et telles que, pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle u\,, v\rangle = 0$, on a : $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

1. Question de cours : Théorème de Pythagore.

2. Établir les relations : $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ et $\mathcal{H} = (\mathcal{H} \cap \mathcal{P}) \oplus (\mathcal{H} \cap \mathcal{I})$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor n\lambda \rfloor}{n}$, où $\lfloor n\lambda \rfloor$ désigne la partie entière du réel $n\lambda$.

4. Soit $g \in \mathcal{H} \cap \mathcal{I}$.

a) En exploitant l'hypothèse $n \geqslant 2$, montrer que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $g(2x) = 2g(x)$.

b) Montrer que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a : $g(rx) = rg(x)$.
En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $g(\lambda x) = \lambda g(x)$.

c) Montrer que la fonction g est linéaire.

5. Soit $h \in \mathcal{H} \cap \mathcal{P}$.

a) Soit x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\|x\| = \|y\|$. Calculer $\langle x - y\,, x + y\rangle$ et en déduire que $h(x) = h(y)$.

b) Justifier l'existence d'une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $h(x) = \varphi(\|x\|^2)$.

c) On admet que φ est continue. Montrer que pour tous réels positifs s et t, on a : $\varphi(s+t) = \varphi(s) + \varphi(t)$.

d) Établir alors l'existence d'une constante c telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $h(x) = c\|x\|^2$.

6. En déduire la forme générale de toute fonction $f \in \mathcal{H}$.

Exercice sans préparation S79

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_p$ ($p \geqslant 2$) des variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$ telles que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, X_i suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_i > 0$.

On pose pour tout $p \geqslant 2$: $S_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle du vecteur $(X_1, X_2, \ldots, X_{p-1})$ sachant $(S_p = n)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'espérance conditionnelle $E(X_1 | X_1 + X_2 = n)$ en fonction de n, λ_1 et λ_2.

Exercice principal S82

1. Question de cours : Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n ($n \geqslant 2$) et φ un endomorphisme de E.
On note id_E l'endomorphisme identité de E, 0_E l'endomorphisme nul de E et on pose : $\varphi^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^k = \varphi \circ \varphi^{k-1}$.
On dit que φ est cyclique s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $\big(x_0, \varphi(x_0), \dots, \varphi^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de E.

2. On suppose que $\varphi^n = 0_E$ et $\varphi^{n-1} \neq 0_E$.

a) Montrer que φ est cyclique.

b) Déterminer les valeurs propres de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. On suppose que φ est cyclique. Soit ψ un endomorphisme de E tel que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.
En utilisant une base du type $\big(x_0, \varphi(x_0), \dots, \varphi^{n-1}(x_0)\big)$, établir l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\psi = P(\varphi)$.

4. On suppose que φ est cyclique. On note x_0 un vecteur de E vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\big(x_0, \varphi(x_0), \dots, \varphi^{n-1}(x_0)\big) \text{ est une base de } E \text{ et } \varphi^n(x_0) = x_0 \,.$$

a) Montrer que $\varphi^n = \mathrm{id}_E$. En déduire que φ est bijectif.

b) Quelles sont les valeurs propres possibles de φ ?

c) Montrer que φ est diagonalisable.

Exercice sans préparation S82

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose : $Y = \lfloor X \rfloor$ et $Z = X - Y$.

1. Montrer que Y est une variable aléatoire et déterminer sa loi. Que peut-on dire de $Y + 1$?
2. Montrer que Z est une variable aléatoire et déterminer sa loi.
3. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice principal S84

1. Question de cours : Donner deux conditions suffisantes et non nécessaires de diagonalisabilité d'une matrice.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a : $a_{i,j} = \min(i,j)$.

2.a) Soit $L = (l_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice triangulaire inférieure et $U = (u_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice triangulaire supérieure. On pose : $M = LU = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a : $m_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{i,k}\, u_{k,j}$.

b) En déduire l'existence d'une matrice triangulaire supérieure T telle que $A = {}^tTT$.

c) Montrer que les matrices A et T sont de même rang.

d) Justifier que A est diagonalisable et déduire des questions précédentes que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

e) Justifier l'inversibilité de A et déterminer son inverse.

3. Soit $p \in]0,1[$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p.

On pose pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$.

On note Σ_S la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$.

a) Montrer que les valeurs propres de Σ_S sont toutes positives.

b) Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, déterminer $\mathrm{Cov}(S_i, S_j)$.

c) Exprimer Σ_S en fonction de A.

Exercice sans préparation S84

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice principal S85

1. Question de cours : Définition de la convergence d'une série réelle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$.

2.a) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $\big(u_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

b) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est absolument convergente.

3.a) Soit $x \in [-1, 1[$. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t$ et en déduire que si $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

b) Montrer que si $x \in [-1, 1[$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

c) En déduire que $\forall\, x \in [-1, 1[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est convergente et donner la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

4.a) Établir la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^2-1}$ et calculer $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2-1}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{x^n}{n^2-1}$ est convergente et calculer sa somme $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2-1}$.

c) L'application f de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2-1}$ est-elle continue ?

Exercice sans préparation S85

On lance une pièce de monnaie équilibrée n fois de suite de manière indépendante et on s'intéresse à l'événement E_n = "au cours des n lancers, deux Pile successifs n'apparaissent pas". On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n la probabilité de E_n.

Trouver une relation entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2} et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$.

Exercice principal S88

1. Question de cours : Définition et propriétés d'une fonction convexe sur un intervalle.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, dérivable et décroissante. On suppose que les deux intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt$ sont convergentes. On veut montrer que pour tout réel $\mu \geqslant 0$, on a :

$$\mu^2 \int_\mu^{+\infty} f(t)dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt$$

On note F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$ et $G(x) = F(\sqrt{x})$.

2. Montrer que F et G sont décroissantes et convexes sur $\mathbb{R}_*^+$.

3. En majorant $u^2G(u^2)$ pour tout $u \geqslant 0$, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} xG(x) = 0$.

4.a) Établir pour tout réel $X \geqslant 0$, la relation : $\int_0^X G(x)dx = XG(X) + \int_0^{\sqrt{X}} t^2 f(t)dt$.

b) En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} G(x)dx$ et l'égalité : $\int_0^{+\infty} G(x)dx = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt$.

5.a) Soit OAB un triangle rectangle en O et M un point de son hypothénuse AB. On note P et Q les projections orthogonales de M sur OA et OB respectivement.
Montrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est toujours inférieure ou égale à la moitié de l'aire du triangle OAB.

b) À partir de considérations géométriques sur la courbe représentative de la fonction convexe G, démontrer l'inégalité annoncée en préambule.

Exercice sans préparation S88

1. Soit Y une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prend les valeurs 0, 1 et 2 avec les probabilités p_0, p_1 et p_2 respectivement. On suppose que $E(Y) = 1$ et $E(Y^2) = 5/3$.
Calculer p_0, p_1 et p_2.

2. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ réels distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui, à tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le $(n+1)$-uplet $\big(Q(x_0), Q(x_1), \ldots, Q(x_n)\big)$.

a) Montrer que φ est une application linéaire bijective.

b) Déterminer la matrice Φ de φ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.

3. Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
On suppose que $E(X), E(X^2), \ldots, E(X^n)$ sont connus. Peut-on déterminer la loi de X ?