HEC
PARIS

ORAL HEC 2017

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option scientifique

EXERCICE PRINCIPAL S 162

1. Question de cours : condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ et $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall\, i \in [\![1, n-1]\!],\ c_{i,i+1} = 1; \quad \forall\, j \in [\![1, n]\!],\ c_{n,j} = -a_j; \quad c_{i,j} = 0 \ \text{ sinon}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ de matrice C dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

2.a) Déterminer le rang de la matrice C. Préciser le noyau de l'endomorphisme f.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice C soit inversible.

Sous cette condition, expliciter la matrice C^{-1}.

3.a) Montrer qu'un réel λ est valeur propre de C si et seulement si il est racine d'un polynôme qu'on explicitera en fonction des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$

b) Montrer que la matrice C est diagonalisable si et seulement si elle admet n valeurs propres distinctes.

4. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ définie par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -14 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de M.

b) Étudier la diagonalisabilité de M (on remarquera que 1 est valeur propre de M).

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 162

Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit $(p_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de réels de $]0,1[$ telle que pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, la variable aléatoire X_i suit la loi géométrique de paramètre p_i. On pose pour tout $i \in \mathbf{N}^*$: $q_i = 1 - p_i$.

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $Z_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1. Calculer pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la probabilité $P(Z_n \geqslant k)$. Quelle est la loi de Z_n ?

2. On suppose que pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, on a : $p_i = \dfrac{1}{(i+1)^2}$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 162

1. $\forall\, i \in \mathbf{N}^*$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p_i)$, donc $X_i(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $\forall\, k \in \mathbf{N}^*$, $P(X_i \geqslant k) = q_i^{k-1}$ $(q_i = 1 - p_i)$.
La variable aléatoire Z_n prend ses valeurs dans $\mathbf{N}^*$ et $\forall\, k \in \mathbf{N}^*$, on a par indépendance mutuelle des X_i,
$P(Z_n \geqslant k) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} q_i^{k-1}$, d'où $P(Z_n = k) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} q_i^{k-1} - \prod_{i=1}^{n} q_i^{k} = \Big(1 - \prod_{i=1}^{n} q_i\Big)\prod_{i=1}^{n} q_i^{k-1}$.

Puisque $q_i \in]0,1[$, on a $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} q_i \in]0,1[$ et $Z_n \hookrightarrow \mathcal{G}\Big(1 - \prod_{i=1}^{n} q_i\Big)$.

2. On a : $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} q_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{i(i+2)}{(i+1)(i+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}$ après réduction et télescopages. D'où : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} q_i = 1/2$.
Donc, la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la loi géométrique $\mathcal{G}(1/2)$.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 162

1. Cours.

2.a) On résout $CX = 0 \iff x_2 = 0, x_3 = 0, \dots, x_n = 0$ et $-\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \iff x_2 = 0, \dots, x_n = 0, a_1 x_1 = 0$.

• Si $a_1 \neq 0$, $X = 0$, $\operatorname{rg} C = n$ et $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

• Si $a_1 = 0$, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1, 0, \dots, 0)$ de dimension 1, donc, $\operatorname{rg} C = n - 1$.

b) La matrice C est inversible $\iff a_1 \neq 0$. On résout $CX = Y$, ce qui équivaut à :

$$x_2 = y_1, \dots, x_n = y_{n-1} \text{ et } -\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = y_n \iff x_2 = y_1, \dots, x_n = y_{n-1} \text{ et } x_1 = -\frac{1}{a_1}\Big(\sum_{i=2}^{n}(a_i x_i) + y_n\Big).$$

La matrice C^{-1} présente une sous-diagonale principale formée de 1, sa première ligne étant constituée par les coefficients $-\frac{a_2}{a_1}, -\frac{a_3}{a_1}, \dots, -\frac{a_n}{a_1}, -\frac{1}{a_1}$ et tous les autres coefficients étant nuls.

3.a) La résolution du système $CX = \lambda X \iff x_2 = \lambda x_1, \dots, x_n = \lambda x_{n-1}$ et $-\sum_{i=1}^{n} a_i x_1 = \lambda x_n$, ce qui équivaut à : $x_2 = \lambda x_1, \dots, x_n = \lambda x_{n-1}$ et $-\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{i-1} x_1 = \lambda^n x_1 \Longrightarrow \lambda$ est racine de $P(X) = X^n + \sum_{i=1}^{n} a_i X^{i-1}$.

Réciproquement, si λ est une racine de P, les vecteurs de coordonnées $x_1(1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1})$ vérifient le système précédent, donc sont des vecteurs propres associés à λ.

b) D'après le système ci-dessus, le sous-espace propre associé à toute valeur propre λ est de dimension 1 ; la matrice C est donc diagonalisable si et seulement si elle admet n valeurs propres distinctes.

4.a) Les valeurs propres sont les racines de $P(X) = X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 14X - 8 = (X-1)^2(X+2)(X-4)$.

b) La matrice M admet 3 valeurs propres, donc elle n'est pas diagonalisable.

EXERCICE PRINCIPAL S 164

1. Question de cours : définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, on considère une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes telles que pour chaque épreuve, la probabilité de succès est égale à $\dfrac{1}{n}$ ·

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On note X_n la variable aléatoire égale au rang du premier succès et Y_n, la variable aléatoire égale au rang du deuxième succès.

On pose : $U_n = \dfrac{X_n}{n}$ et $W_n = \dfrac{Y_n}{n}$ ·

2. Dans cette question, l'entier n est fixé.

a) Déterminer la loi de X_n.

b) Déterminer la fonction de répartition de U_n.

3. Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité U dont on déterminera une densité.

4. Écrire un programme en *Scilab* simulant la variable aléatoire U_n.

5.a) Déterminer la loi de Y_n.

b) Déterminer la fonction de répartition de W_n.

c) Soit q un réel vérifiant $0 < q < 1$ et $N \in \mathbf{N}^*$. Établir la relation : $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} j\, q^{j-1} = \frac{1 - N(1-q)\,q^N - q^N}{(1-q)^2}$.

d) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité W dont on déterminera une densité.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 164

1. Cours.

2.a) X_n suit une loi géométrique de paramètre $1/n$.

b) $\forall\, t \in \mathbf{R}$, $P(U_n \leqslant t) = P(X_n \leqslant nt)$ et si $t \leqslant 0$, $P(U_n \leqslant t) = 0$.

Si $t > \dfrac{1}{n}$, $\displaystyle P(U_n \leqslant t) = \sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor} P(X_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{k-1} = 1 - \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{\lfloor nt\rfloor}$.

3. Si $t < 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(U_n \leqslant t) = 0$ et si $t > 0$, $P(U_n \leqslant t) = 1 - \exp\big(\lfloor nt\rfloor \ln(1-1/n)\big)$. Or,

$\displaystyle\lfloor nt\rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} nt \Longrightarrow \lfloor nt\rfloor \ln(1-1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -t \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\lfloor nt\rfloor \ln(1-1/n) = -t \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} P(U_n \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$.

Bilan : la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

4. `n=input('n=') ; k=1 ; p=1/n ; while rand()>p ; then k=k+1 end ; U=k/n`

5.a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a : $Y_n(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$ et pour $k \geqslant 2$, $P(Y_n = k) = (k-1)\Big(\dfrac{1}{n}\Big)^2\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)^{k-2}$.

b) Si $t \leqslant 0$, $P(W_n \leqslant t) = 0$ et si $t > 0$, $\displaystyle P(W_n \leqslant t) = \sum_{k=1}^{\lfloor nt\rfloor} P(Y_n = k) = \Big(\frac{1}{n}\Big)^2 \sum_{k=2}^{\lfloor nt\rfloor}(k-1)\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{k-2}$, d'où :

$$P(W_n \leqslant t) = \Big(\frac{1}{n}\Big)^2 \sum_{j=1}^{\lfloor nt\rfloor -1} j\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{j-1} \text{ si } t > 0.$$

c) On pose : $S_N(q)=\sum_{j=0}^{N} q^j=\dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}\Longrightarrow S'_N(q)=\sum_{j=1}^{N} jq^{j-1}=\dfrac{1-N(1-q)\,q^N-q^N}{(1-q)^2}$.

d) Si $t<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(W_n\leqslant t)=0$. Pour $t\geqslant 0$, posons : $N=\lfloor nt\rfloor-1$ et $q=1-1/n$.

On a : $P(W_n\leqslant t)=\Big(\dfrac{1}{n}\Big)^2\sum\limits_{j=1}^{\lfloor nt\rfloor-1} j\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)^{j-1}=1-\dfrac{1}{n}\big(\lfloor nt\rfloor-1\big)\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)^{\lfloor nt\rfloor-1}-\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)^{\lfloor nt\rfloor-1}$. Par suite :

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(W_n\leqslant t)=\begin{cases}1-t\,\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t\geqslant 0\\ 0 & \text{si } t<0\end{cases}$. On vérifie que cette fonction limite est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, donc W est une variable aléatoire à densité et une densité g de W est donnée par : $g(t)=\begin{cases}t\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t>0\\ 0 & \text{si } t\leqslant 0\end{cases}$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 164

Soit $\big(E,\langle\,,\rangle\big)$ un espace euclidien et $S=\big\{x\in E;\ \|x\|=1\big\}$.

On note $\mathcal{P}$ la propriété suivante : $\forall\,(x,y)\in S^2$ avec $x\neq y$, $\forall\,t\in\,]\,0,1[,\ \ t\,x+(1-t)\,y\notin S$.

1. Illustrer graphiquement la propriété $\mathcal{P}$ lorsque $E=\mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.

2. Établir la propriété $\mathcal{P}$ dans le cas général.

(on utilisera la fonction polynomiale P telle que : $\forall\,t\in\mathbf{R},\ P(t)=\|tx+(1-t)y\|^2$)

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 164

1. Sur un cercle de centre O de rayon 1, on place x et y ainsi que la corde qui joint x et y. Tous les points z de cette corde sont de la forme $t\,x+(1-t)\,y$ et vérifient $\|z\|<1$, donc n'appartiennent pas à S.

2. On a $\|tx+(1-t)y\|^2=\|x\|^2t^2+2t(1-t)\langle x\,,y\rangle+\|y\|^2(1-t)^2=2\big(1-\langle x\,,y\rangle\big)t^2+2\big(\langle x\,,y\rangle-1\big)t+1=P(t)$.

$P(t)$ est un trinôme en t qui prend la valeur 1 en $t=0$ et en $t=1$ et donc, est différent de 1 si $t\notin\{0,1\}$.

De plus, $t\longmapsto P(t)$ n'est pas le polynôme constant égal à 1 car $\langle x\,,y\rangle\neq 1$ par Cauchy-Schwarz.

En effet, si $\langle x\,,y\rangle=1=\|x\|.\|y\|$, alors, il existe $k\in\mathbf{R}_+$ tel que $y=kx$, d'où en passant aux normes, $k=1$ et $x=y$ exclus...

EXERCICE PRINCIPAL S 198

1. Question de cours : énoncer la formule du rang pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels (sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) de dimension finie.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Soit f_n l'application définie sur $\mathbf{R}_n[X]$ telle que : $\forall P \in \mathbf{R}_n[X],\ f_n(P)(X) = \dfrac{(X^2-1)}{2} P''(X) + X\,P'(X) - P(X)$.

2. Montrer que f_n est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

3. On suppose dans cette question que $n = 3$.

a) Déterminer la matrice M_3 de f_3 dans la base canonique de $\mathbf{R}_3[X]$.

b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f_3$ et une base de $\operatorname{Im} f_3$. Ces espaces sont-ils supplémentaires dans $\mathbf{R}_3[X]$?

c) La matrice M_3 est-elle diagonalisable ?

4. Pour tout $(P,Q) \in \big(\mathbf{R}_n[X]\big)^2$, on pose : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Vérifier qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

b) Montrer que : $\forall (P,Q) \in \big(\mathbf{R}_n[X]\big)^2,\ \langle f_n(P), Q\rangle = \langle P, f_n(Q)\rangle \cdot$ Qu'en déduit-on ?

5. Dans cette question, $\mathbf{R}_n[X]$ est toujours muni du produit scalaire défini à la question 4.

Si $k \in [\![0,n]\!]$ et $P \in \mathbf{R}_n[X]$, on note $p_k(P)$ la projection orthogonale de P sur $\mathbf{R}_k[X]$.

Soit $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ la famille définie par : $T_0 = 1$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $T_k = X^k - p_{k-1}(X^k)$.

a) Montrer que $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_n[X]$.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, T_k est vecteur propre de f_n et préciser la valeur propre associée.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 198

1. Cours.

2. La linéarité est claire (linéarité de la dérivation). De même, $\mathbf{R}_n[X]$ est stable par f_n car $\deg f_n(P) \leqslant \deg P$.

3.a)b)c) $M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Une base de $\operatorname{Ker} f_3$ est (X) et une base de $\operatorname{Im} f_3$ est $(1, 2X^2-1, 5X^3-3X)$.

Ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbf{R}_3[X]$ car $\operatorname{Ker} f_3 \cap \operatorname{Im} f_3 = \{0\}$ et que, d'après la formule du rang, la somme de leurs dimensions vaut $4 = \dim \mathbf{R}_3[X]$.

La matrice M_3 est triangulaire : elle admet les 4 valeurs propres distinctes $-1, 0, 2, 5 \Longrightarrow M_3$ est diagonalisable.

4.a) L'application $\langle\, ,\rangle$ est clairement bilinéaire et symétrique.

D'autre part, $\forall P \in \mathbf{R}_n[X]$, $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Si $\langle P,P\rangle = 0$, vu que P^2 est positive et continue sur $[-1,1]$, on a : $\forall t \in [-1,1]$, $P(t) = 0$, donc le polynôme P est nul car il possède une infinité de racines.

b) $\langle f_n(P), Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \Big(\frac{t^2-1}{2} P''(t) + t\,P'(t) - P(t)\Big) Q(t)\,\mathrm{d}t$. Or, $\dfrac{t^2-1}{2} P''(t) + t\,P'(t) = \Big(\dfrac{t^2-1}{2} P'(t)\Big)'$.

Une I.P.P. montre que $\langle f_n(P), Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \Big(-\frac{(t^2-1)}{2} P'(t)Q'(t) - P(t)Q(t)\Big)\,\mathrm{d}t$, expression dans laquelle P et Q jouent des rôles symétriques, donc, $\langle f_n(P), Q\rangle = \langle P, f_n(Q)\rangle$: l'endomorphisme f_n est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée.

5.a) $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\deg T_k = k$ puisque $p_{k-1}(X^k) \in \mathbf{R}_{k-1}[X]$; donc, $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$. D'autre part, $T_k \in \mathbf{R}_{k-1}[X]^\perp = \mathrm{Vect}(T_0, T_1, \dots, T_n)^\perp$; donc, $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une famille orthogonale.

b) $f_n(T_k) \in \mathbf{R}_k[X] = \mathrm{Vect}(T_0, T_1, \dots, T_k)$, donc $\exists\, (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbf{R}^{k+1}$ tel que $f_n(T_k) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i T_i$.

Si $0 \leqslant j \leqslant k-1$, on a : $\langle f_n(T_k), T_j \rangle = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \langle T_i, T_j \rangle = \alpha_j \|T_j\|^2$ et d'autre part, $\langle f_n(T_k), T_j \rangle = \langle T_k, f_n(T_j) \rangle = 0$ car $f_n(T_j) \in \mathbf{R}_j[X] = \mathrm{Vect}(T_0, T_1, \dots, T_j)$. Ainsi, $\forall j \in [\![0, k-1]\!]$, $\alpha_j = 0$, donc $f_n(T_k) = \alpha_k T_k$.
Finalement, T_k est un vecteur propre de f_n.

D'une part, le cœfficient de X^k dans $f_n(T_k)$ est α_k et d'autre part, $\frac{1}{2}k(k-1) + k - 1 = \frac{(k-1)(k+2)}{2}$, donc T_k est vecteur propre de f_n associé à la valeur propre $\frac{(k-1)(k+2)}{2}$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 198

On coupe un morceau de bois de longueur 1 en deux positions U et V indépendantes, suivant chacune une loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Donner un exemple dans lequel il n'est pas possible de former un triangle.
2. On écrit le script suivant en *Scilab* :

```
N=100000 ;
p=0 ;
for i=1:N
  C=rand(2,1) ;
  L1=min(C) ;L2=max(C)-min(C) ;L3=1-max(C) ;
  if (L1<=L2+L3)&(L2<=L1+L3)&(L3<=L1+L2) then
    p=p+1 ;
  end
end
disp(p/N)
```

Quelle valeur (approximative) ce script va-t-il retourner ?

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 198

1. Si les trois morceaux de bois sont de longueur 2/3, 1/6 et 1/6 par exemple, on ne peut former un triangle.

2. On se convainc facilement que les trois conditions sont équivalentes au fait que les trois morceaux sont de longueur inférieure ou égale à 1/2. D'où : $p = 2\,P\big([U \leqslant V] \cap [U \leqslant 1/2] \cap [V - U \leqslant 1/2] \cap [V \geqslant 1/2]\big)$.

Le domaine correspondant de $[0,1]^2$ est en fait le triangle rectangle de sommets $(0, 1/2)$, $(1/2, 1/2)$ et $(1/2, 1)$. La probabilité cherchée est donc égale à 0.25 et le script renverra une valeur voisine de 0.25.

EXERCICE PRINCIPAL S 199

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $p_1, p_2, \ldots, p_n$ où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $0 < p_i < 1$. On pose : $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ et $\lambda = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

1. Question de cours : énoncer le théorème de stabilité de la loi de Poisson pour la somme.

2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose : $q_i = 1 - (1 - p_i)\,\mathrm{e}^{p_i}$. Soit $U_1, U_2, \ldots, U_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et indépendantes de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose : $Z_i = \begin{cases} 0 & \text{si l'événement } [U_i = Y_i = 0] \text{ est réalisé} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$. On pose : $Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

a) Vérifier que $0 \leqslant q_i \leqslant 1$ et déterminer la loi de Z_i.

b) Calculer $P(Z_i \neq Y_i)$.

c) En déduire que $P(Z_i \neq Y_i) \leqslant p_i^2$ et que $P(Z \neq Y) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i^2$.

3.a) Montrer que pour toute partie $A \subset [\![1, n]\!]$, on a : $P(Z \in A) \leqslant P(Z \neq Y) + P(Y \in A)$.

b) En déduire pour toute partie $A \subset [\![1, n]\!]$, l'inégalité : $\left| P(Z \in A) - \sum_{i \in A} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i^2$.

4.a) Établir l'inégalité $\sum_{i=1}^{n} p_i^2 \geqslant \frac{\lambda^2}{n}$ avec égalité si et seulement si $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p = \frac{\lambda}{n}$.

b) Déterminer un majorant de l'erreur commise par l'approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 199

1. Cours.

2.a) On a déjà $q_i \leqslant 1$. D'autre part, la convexité de la fonction exponentielle $\Longrightarrow \mathrm{e}^{-p_i} \geqslant 1 - p_i \Longrightarrow q_i \geqslant 0$.
$P(Z_i = 0) = P([U_i = 0] \cap [Y_i = 0]) = P(U_i = 0)P(Y_i = 0) = \mathrm{e}^{-p_i}(1 - q_i) = 1 - p_i$ par indépendance de U_i et Y_i.
Donc, Z_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i.

b) $[Z_i = Y_i] = \big([Z_i = 0] \cap [Y_i = 0]\big) \cup \big([Z_i = 1] \cap [Y_i = 1]\big)$, les deux événements dont on prend l'union étant incompatibles. Or, $[Z_i = 0] = \big([U_i = 0] \cap [Y_i = 0]\big) \Longrightarrow [Z_i = 0] \subset [Y_i = 0] \Longrightarrow [Z_i = 0] \cap [Y_i = 0] = [Z_i = 0]$.

D'autre part, $[Z_i = 1] = [U_i = 1] \bigcup_{k=1}^{+\infty} [Y_i = k] \Longrightarrow [Y_i = 1] \subset [Z_i = 1] \Longrightarrow [Z_i = 1] \cap [Y_i = 1] = [Y_i = 1]$.

Finalement, $[Z_i = Y_i] = [Z_i = 0] \cup [Y_i = 1] \Longrightarrow P(Z_i = Y_i) = P(Z_i = 0) + P(Y_i = 1) = 1 - p_i + p_i\,\mathrm{e}^{-p_i}$, d'où

$$P(Z_i \neq Y_i) = p_i - p_i\,\mathrm{e}^{-p_i} = p_i(1 - \mathrm{e}^{-p_i}).$$

c) On sait que $\mathrm{e}^{-p_i} \geqslant 1 - p_i \Longrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-p_i} \leqslant p_i \Longrightarrow P(Z_i \neq Y_i) \leqslant p_i^2$.

On remarque que $[Z \neq Y] \subset \bigcup_{i=1}^{n} [Z_i \neq Y_i]$. Par suite, $P(Z \neq Y) \leqslant P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} (Z_i \neq Y_i)\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(Z_i \neq Y_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i^2$.

3. D'après le théorème de stabilité de la loi de Poisson, on a $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $P(Y \in A) = \sum_{i \in A} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ ·

On a : $P(Z \in A) = P\big([Z \in A] \cap [Z \neq Y]\big) + P\big([Z \in A] \cap [Z = Y]\big) = P\big([Z \in A] \cap [Z \neq Y]\big) + P\big([Y \in A] \cap [Z = Y]\big)$.
D'où, $P(Z \in A) \leqslant P(Z \neq Y) + P(Y \in A) \Longrightarrow P(Z \in A) - P(Y \in A) \leqslant P(Z \neq Y)$.
En inversant les rôles de Y et Z, on obtient : $P(Y \in A) - P(Z \in A) \leqslant P(Z \neq Y)$, d'où finalement :

$$|P(Z \in A) - P(Y \in A)| \leqslant P(Z \neq Y).$$

4.a) L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire :
$\left(\sum_{i=1}^{n} 1 \times p_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)$, c'est-à-dire, $\lambda^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} p_i^2$ soit encore $\sum_{i=1}^{n} p_i^2 \geqslant \frac{\lambda^2}{n}$ ·
L'égalité est satisfaite si et seulement si tous les p_i sont égaux, de valeur commune p, telle que $p = \frac{\lambda}{n}$ ·

b) En prenant le cas des p_i tous égaux et donc égaux à $p = \frac{\lambda}{n}$, la variable aléatoire Z suit la loi binomiale de paramètres $(n, p = \lambda/n)$ qui est approchée, lorsque n est grand et donc p petit devant n, par une loi de Poisson de paramètre $np = \lambda$. D'après la question 3, l'erreur commise est majorée par $\sum_{i=1}^{n} p_i^2 = np^2 = \frac{\lambda^2}{n}$ ·

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 199

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, F un sous-espace vectoriel de E et q un projecteur de E.

Montrer que F est stable par q si et seulement si $F = \big(F \cap \mathrm{Ker}(q)\big) \oplus \big(F \cap \mathrm{Im}(q)\big)$.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 199

On a : $E = \mathrm{Ker}(q) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

On suppose que F est stable par q.

Il est évident que $\big(F \cap \mathrm{Ker}(q)\big) \cap \big(F \cap \mathrm{Im}(q)\big) = \{0\}$.
Soit $y = v + w$ un élément de F avec $v \in \mathrm{Ker}(q)$ et $w \in \mathrm{Im}(q)$. Alors, $q(y) = w$ et $w \in F$, donc $w \in F \cap \mathrm{Im}(q)$ et comme $v = y - w$, on a aussi $v \in F \cap \mathrm{Ker}(q)$. Par suite, $F = \big(F \cap \mathrm{Ker}(q)\big) \oplus \big(F \cap \mathrm{Im}(q)\big)$.

Supposons que $F = \big(F \cap Ker(q)\big) \oplus \big(F \cap Im(q)\big)$.

Soit $y = v + w \in F$ avec $v \in \big(F \cap \mathrm{Ker}(q)\big)$ et $w \in \big(F \cap \mathrm{Im}(q)\big)$.
Alors, $q(y) = q(w) = w$ et donc, $q(w) \in F$ et F est stable par q.

EXERCICE PRINCIPAL S 203

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même loi, admettant une densité f sur $\mathbf{R}$ et dont on note F la fonction de répartition.

Soit A l'événement défini par : $A = \{\omega \in \Omega \,/\, \exists\, k \geqslant 2,\ X_k(\omega) > X_1(\omega)\}$.

1. Question de cours : formule des probabilités totales.

2. On suppose **dans cette question uniquement** que les variables aléatoires X_i suivent la loi uniforme sur le segment $[0,1]$. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on pose : $M_k = -\max(X_2, X_3, \ldots, X_k)$.

a) Déterminer une densité h_k de M_k.

b) Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note g_n une densité de la variable aléatoire $X_1 + M_n$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $g_n(x) = \begin{cases} 1-(-x)^{n-1} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ (1-x)^{n-1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

c) Calculer $P\Big(\displaystyle\bigcap_{k=2}^{n} [X_1 \geqslant X_k]\Big)$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

d) En déduire la valeur de $P(A)$.

3. On suppose dans cette question que f est strictement positive sur $\mathbf{R}$.

a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout réel t, on a : $P\Big(\displaystyle\bigcap_{k=2}^{n} [X_1 \geqslant X_k]\Big) \leqslant \big(F(t)\big)^{n-1} + \big(1 - F(t)\big)$.

b) Justifier que pour tout $\varepsilon \in]\,0,1[$, il existe un unique réel t vérifiant $F(t) = 1 - \varepsilon$.

c) Calculer $P(A)$.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 203

1. Cours.

2.a) $\forall\, x \in \mathbf{R},\ P(M_k \leqslant x) = P\big(-\max(X_2, X_3, \ldots, X_k) \leqslant x\big) = 1 - P\big(\max(X_2, X_3, \ldots, X_k) \leqslant -x\big)$, soit par indépendance et similitude de loi : $P(M_k \leqslant x) = 1 - \big(P(X_2 \leqslant -x)\big)^{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 1-(-x)^{k-1} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

Par suite, $h_k(x) = (-1)^k (k-1) x^{k-2}\, \mathbf{1}_{[-1,0]}(x)$.

b) D'après le théorème de convolution, on a : $g_n(x) = \displaystyle\int_0^1 h_n(x-t)\,\mathrm{d}t$ et $-1 \leqslant x - t \leqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant t \leqslant x+1$.

1er cas : $x \in [-1,0]$. Alors, $g_n(x) = \displaystyle\int_0^{x+1} (-1)^n (n-1)(x-t)^{n-2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x+1} (n-1)(t-x)^{n-2}\,\mathrm{d}t = 1-(-x)^{n-1}$.

2ème cas : $x \in [0,1]$. Alors, $g_n(x) = \displaystyle\int_x^1 (-1)^n (n-1)(x-t)^{n-2}\,\mathrm{d}t = \int_x^1 (n-1)(t-x)^{n-2}\,\mathrm{d}t = (1-x)^{n-1}$.

Bilan : $g_n(x) = \begin{cases} 1-(-x)^{n-1} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ (1-x)^{n-1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

c) $P\Big(\bigcap_{k=2}^{n}[X_1 \geqslant X_k]\Big) = P(X_1 \geqslant \max(X_2, X_3, \ldots, X_n)) = P(X_1 + M_n \geqslant 0) = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\cdot$

Résultat prévisible par symétrie.

d) $A = \bigcup_{k=2}^{+\infty}[X_k > X_1] \Longrightarrow \overline{A} = \bigcap_{k=2}^{+\infty}[X_k \leqslant X_1]$. Par la propriété de limite monotone, on a :

$P(\overline{A}) = \lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcap_{k=2}^{+\infty}[X_k \leqslant X_1]\Big) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \Longrightarrow P(A) = 1.$

3.a) La famille $\big((X_1 \leqslant t), (X_1 > t)\big)$ forme un système complet d'événements et la formule des probabilités totales $\Longrightarrow P\Big(\bigcap_{k=2}^{n}[X_k \leqslant X_1]\Big) = P\Big(\bigcap_{k=2}^{n}[X_k \leqslant X_1] \cap [X_1 \leqslant t]\Big) + P\Big(\bigcap_{k=2}^{n}[X_k \leqslant X_1] \cap [X_1 > t]\Big)$, d'où,

$P\Big(\bigcap_{k=2}^{n}[X_k \leqslant X_1]\Big) \leqslant P\Big(\bigcap_{k=2}^{n}[X_k \leqslant t]\Big) + P([X_1 > t]) = \big(F(t)\big)^{n-1} + \big(1 - F(t)\big).$

b) Puisque f est strictement positive sur $\mathbf{R}$, la fonction F réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]0,1[$.

Il existe donc un unique réel t tel que $F(t) = 1 - \varepsilon \in]0,1[$.

c) Le même raisonnement que celui de la question 2.d) conduit, lorsque n tend vers $+\infty$, à :

$\forall \varepsilon > 0,\ P(\overline{A}) \leqslant \varepsilon$, puisque $\lim_{n\to+\infty}(1-\varepsilon)^{n-1} = 0$. Conclusion : $P(A) = 1$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 203

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisable. On note P un polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$.

Établir l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $P(M) = A$.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 203

Posons $A = QDQ^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ (certains λ_i pouvant être égaux). D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme $P(X) - \lambda_i$ admet au moins une racine $\mu_i \in \mathbf{C}$.

Dans ces conditions, la matrice $M = Q\,\mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)\,Q^{-1}$ convient.

EXERCICE PRINCIPAL S 209

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles à densité, indépendantes et de même loi, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et dont une densité f est de classe C^1 et à valeurs strictement positives sur $\mathbf{R}$. On note F la fonction de répartition de X_1. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose : $U_k(t) = \mathbf{1}_{[X_k \leqslant t]}$.

1. Question de cours : énoncer le théorème de Slutsky.

2. Pour n entier supérieur ou égal à 1 et t réel, on définit les variables aléatoires $F_n(t)$ et $f_n(t)$ par :

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k(t) \quad \text{et} \quad f_n(t) = \frac{\sqrt{n}}{2}\left(F_n\Big(t+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) - F_n\Big(t-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\right).$$

a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $nF_n(t)$. En déduire $E\big(F_n(t)\big)$ et $V\big(F_n(t)\big)$.

b) Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $\big(\sqrt{n}(F_n(t) - F(t))\big)_{n\geqslant 1}$.

3.a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose : $Y_k(t) = U_k\Big(t+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big) - U_k\Big(t-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$.

Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y_k(t)$ et en déduire pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$, la loi de la variable aléatoire $2\sqrt{n}f_n(t)$.

b) Déterminer pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E\big(f_n(t)\big)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,V\big(f_n(t)\big)$.

On admet alors que la suite $\Big(n^{\frac{1}{4}}\big(f_n(t) - E(f_n(t))\big)\Big)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\Big(0, \dfrac{f(t)}{2}\Big)$.

4. À l'aide de la question 3, déterminer la limite en loi de la suite de variables aléatoires $\big(n^{\frac{1}{4}}(f_n(t) - f(t))\big)_{n\geqslant 1}$.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 209

1. Cours.

2.a) Les X_k sont indépendantes, donc les variables aléatoires de Bernoulli $U_k(t)$, pour t donné, sont indépendantes, d'où : $nF_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k(t) \hookrightarrow \mathcal{B}\big(n, F(t)\big)$, $E\big(F_n(t)\big) = F(t)$ et $V\big(F_n(t)\big) = \dfrac{1}{n}F(t)\big(1-F(t)\big)$.

b) Les conditions d'application du théorème limite central sont réunies, donc la suite $\left(\dfrac{F_n(t) - E\big(F_n(t)\big)}{\sqrt{V\big(F_n(t)\big)}}\right)_{n\geqslant 1}$,

c'est-à-dire la suite $\left(\sqrt{n}\dfrac{\big(F_n(t) - F(t)\big)}{\sqrt{F(t)\big(1-F(t)\big)}}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers $A \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Donc, la suite $\big(\sqrt{n}(F_n(t) - F(t))\big)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers $B \hookrightarrow \mathcal{N}\big(0, F(t)\big(1-F(t)\big)\big)$.

3.a) La définition de $Y_k(t)$ montre que $\big(Y_k(t)\big)(\Omega) = \{0, 1\}$ et que $P\big(Y_k(t) = 1\big) = P\Big(t - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant X_k \leqslant t + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$.

Donc, $Y_k(t)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n(t) = F\Big(t+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big) - F\Big(t-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$. D'autre part,

$$2\sqrt{n}f_n(t) = n\left(F_n\Big(t+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) - F_n\Big(t-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\right) = \sum_{k=1}^{n} Y_k(t) \hookrightarrow \mathcal{B}\big(n, p_n(t)\big) \text{ par indépendance des } Y_k(t).$$

b) Par linéarité de l'espérance, on a : $E\big(f_n(t)\big) = \dfrac{n}{2\sqrt{n}}\,p_n(t) = \dfrac{\sqrt{n}}{2}\left(F\Big(t+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big) - F\Big(t-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)\right)$.

Puisque f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, la fonction F est de classe au moins C^1 sur $\mathbf{R}$. Un développement limité à l'ordre 1 donne : $E\big(f_n(t)\big) = \dfrac{\sqrt{n}}{2}\Big(F(t) + \dfrac{1}{\sqrt{n}}f(t) + o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big) - F(t) + \dfrac{1}{\sqrt{n}}f(t) + o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big) = f(t) + o(1)$.

Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} E\big(f_n(t)\big) = f(t)$. De même, avec le même développement limité, on obtient,

$4nV\big(f_n(t)\big) = np_n(t)\big(1-p_n(t)\big) = 2\sqrt{n}f(t) + o(\sqrt{n}) \Longrightarrow \sqrt{n}\,V\big(f_n(t)\big) = \dfrac{f(t)}{2} + o(1) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,V\big(f_n(t)\big) = \dfrac{f(t)}{2}$.

4. On a : $n^{\frac{1}{4}}\big(f_n(t) - f(t)\big) = n^{\frac{1}{4}}\big(f_n(t) - E\big(f(t)\big)\big) + n^{\frac{1}{4}}\big(E\big(f_n(t)\big) - f(t)\big)$.

Posons : $Z_n = n^{\frac{1}{4}}\big(f_n(t) - f(t)\big)$, $Q_n = n^{\frac{1}{4}}\big(f_n(t) - E\big(f_n(t)\big)\big)$ et $u_n = n^{\frac{1}{4}}\big(E\big(f_n(t)\big) - f(t)\big) \Longrightarrow Z_n = Q_n + u_n$.
La fonction f admet une dérivée f' continue sur $\mathbf{R}$, donc bornée sur tout segment. Un développement limité à l'ordre 2 montre alors que : $E\big(f_n(t)\big) = f(t) + \dfrac{1}{2\sqrt{n}}f'(t) + o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big) \Longrightarrow u_n = \dfrac{1}{2\,n^{\frac{1}{4}}}f'(t) + o\Big(\dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\Big)$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Donc, $\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,N,\ n \geqslant N \Longrightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon$. On peut supposer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires certaines ; ainsi, $[|u_n| \leqslant \varepsilon] = \Omega \Longrightarrow \exists\,N,\ n \geqslant N \Longrightarrow P\big(|u_n| \geqslant \varepsilon\big) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} P\big(|u_n| \geqslant \varepsilon\big) = 0$.
La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0. Le théorème de Slutsky nous apprend alors que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1} = (Q_n + u_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers $Z = Q + 0 = Q$, où $Q \hookrightarrow \mathcal{N}\Big(0, \dfrac{f(t)}{2}\Big)$.

Bilan : la suite $\big(Z_n = n^{\frac{1}{4}}(f_n(t) - f(t))\big)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers $Z \hookrightarrow \mathcal{N}\Big(0, \dfrac{f(t)}{2}\Big)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 209

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique $\langle\, ,\rangle$ et de sa norme associée $\|.\|$. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbf{R}^n$. On pose : $\rho = \max\big\{|\lambda|,\ \lambda \in \text{Spectre}(f)\big\}$.

Montrer que $\rho = \sup\Big\{\dfrac{|\langle f(x), x\rangle|}{\|x\|^2},\ x \in \mathbf{R}^n,\ x \neq 0_{\mathbf{R}^n}\Big\}$.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 209

Puisque l'endomorphisme f est symétrique, il est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ où $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, e_i est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i.

Soit $x \in \mathbf{R}^n$. On a $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \Longrightarrow \langle f(x), x\rangle = \langle \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i, \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \rho \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \rho\|x\|^2$.

Par suite, $\sup\Big\{\dfrac{|\langle f(x), x\rangle|}{\|x\|^2},\ x \in \mathbf{R}^n,\ x \neq 0_{\mathbf{R}^n}\Big\} \leqslant \rho$.

Soit k l'indice pour lequel on a $\rho = \lambda_k$. Pour $x = e_k$, on a : $|\langle f(x), x\rangle| = |\langle \lambda_k e_k, e_k\rangle| = \lambda_k = \rho$.

Finalement, on a bien : $\rho = \sup\Big\{\dfrac{|\langle f(x), x\rangle|}{\|x\|^2},\ x \in \mathbf{R}^n,\ x \neq 0_{\mathbf{R}^n}\Big\}$.

EXERCICE PRINCIPAL S 212

1. Question de cours : polynômes annulateurs d'endomorphisme ; définition et propriétés.

Soit $E = \mathbf{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $E_n = \mathbf{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On note $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E_n. Soit s un réel fixé.

2. Soit P un polynôme de E. On pose : $\forall x \in \mathbf{R},\ \widehat{P}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-s}\displaystyle\int_s^x P(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \neq s \\ P(s) & \text{si } x = s \end{cases}$.

a) Montrer que $x \longmapsto \widehat{P}(x)$ est continue sur $\mathbf{R}$ et que $\widehat{P}$ est un polynôme.

b) Soit φ l'application définie sur E par : $\varphi(P) = \widehat{P}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, E_n est stable par φ.

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note φ_n la restriction de φ à E_n. Montrer que φ_n est un automorphisme de E_n.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose $T_0(x) = 1$ et pour tout $k \in [\![1,3]\!]$ et tout $x \in \mathbf{R}$, on pose : $T_k(x) = (x-s)^k$.

3.a) Montrer que (T_0, T_1, T_2, T_3) est une base de E_3 formée de vecteurs propres de φ_3.

b) Décomposer le polynôme e_3 sur cette base.

4. On note $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les quatre valeurs propres de φ_3, avec $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.

On pose : $L(x) = (x-\lambda_0)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$. On définit les fonctions polynômiales L_0, L_1, L_2 et L_3 par :

$$L_0(x) = \frac{4\,L(x)}{x-\lambda_0},\ L_1(x) = \frac{-48\,L(x)}{x-\lambda_1},\ L_2(x) = \frac{108\,L(x)}{x-\lambda_2} \text{ et } L_3(x) = \frac{-64\,L(x)}{x-\lambda_3}.$$

a) Calculer $L_0 + L_1 + L_2 + L_3$ et $L_0 + \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{3}L_2 + \frac{1}{4}L_3$.

b) On définit les endomorphismes : $\ell = L(\varphi_3)$ et pour tout $k \in [\![0,3]\!]$, $\ell_k = L_k(\varphi_3)$.

(i) Déterminer ℓ. (ii) Pour tout $k \in [\![0,3]\!]$, déterminer $\ell_k^2 - \ell_k$. (iii) Pour tout $k \in [\![0,3]\!]$, expliciter $\operatorname{Im} \ell_k$.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 212

1. Cours.

2.a) Soit $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme de E. La fonction $x \longmapsto \widehat{P}(x)$ est clairement continue pour $x \neq s$.

D'autre part, pour $x \neq s$, on a $\widehat{P}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\frac{x^{k+1}-s^{k+1}}{x-s} = \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}\sum_{j=0}^{k} s^j x^{k-j}$ et $\displaystyle\lim_{x\to s}\widehat{P}(x) = P(s)$.

Donc, $x \longmapsto \widehat{P}(x)$ est continue sur $\mathbf{R}$ et $\widehat{P}$ est un polynôme de E.

b) De plus, $\deg \widehat{P} = \deg P$, donc E_n est stable par φ.

c) On remarque que φ est linéaire par linéarité de l'intégration et à valeurs dans E_n d'après la question b). L'image de la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de $(n+1)$ polynômes de degrés respectifs $0, 1, \ldots, n$, donc libre dans E_n. Donc, φ_n est bijective de E_n dans E_n.

3.a) Soit $k \in [\![0,3]\!]$. On a : $\widehat{T_k}(x) = \dfrac{1}{x-s}\displaystyle\int_s^x (t-s)^k\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}(x-s)^k$. Donc, T_k est un vecteur propre de φ_3 associé à la valeur propre $\dfrac{1}{k+1}$ · Ces valeurs propres $(1, 1/2, 1/3, 1/4)$ étant deux à deux distinctes, la famille (T_0, T_1, T_2, T_3) forme une famille libre de E constituée de quatre vecteurs propres de φ_3 : c'est une base de E_3.

b) On applique la formule de Taylor à $f(x) = x^3$ à l'ordre 3 au point s. On obtient :
$x^3 = f(s) + f'(s)(x-s) + \dfrac{f''(s)}{2}(x-s)^2 + \dfrac{f^{(3)}(s)}{6}(x-s)^3 \Longrightarrow x^3 = s^3T_0 + 3s^2T_1 + 3sT_2 + T_3$.

4.a) On pose : $Q = L_0 + L_1 + L_2 + L_3 \Longrightarrow Q(1) = L_0(1) = 1, Q(1/2) = 1, Q(1/3) = 1$ et $Q(1/4) = 1$.
Or, Q est de degré $4 \Longrightarrow Q(x) - 1 = \alpha\, L(x)$. Une comparaison des cœfficients constants $\Longrightarrow 1 + \alpha/24 = 1 \Longrightarrow$ $\alpha = 0$ et $Q = 1$. On aurait pu trouver ce résultat plus rapidement en remarquant que deux polynômes de $\mathbf{R}_3[X]$ prenant la même valeur en quatre points distincts sont égaux (*).

On pose : $R = L_0 + \dfrac{1}{2}L_1 + \dfrac{1}{3}L_2 + \dfrac{1}{4}L_3$. On trouve par un calcul analogue au précédent que $R(x)$ prend les valeurs respectives $1, 1/2, 1/3, 1/4$ aux points $1, 1/2, 1/3, 1/4$. Grâce à la remarque (*), on en déduit que R est le polynôme e_1 $(R(x) = x)$.

b) (i) $\ell = 0$ car φ_3 diagonalisable est associé à une matrice du type $D = \mathrm{diag}(1, 1/2, 1/3, 1/4)$ telle que $L(D) = 0$.
(ii) $\ell_0 = L_0(\varphi_3) = 4(\varphi_3 - 1/2\,\mathrm{id}) \circ (\varphi_3 - 1/3\,\mathrm{id}) \circ (\varphi_3 - 1/4\,\mathrm{id}) \Longrightarrow (\varphi_3 - \mathrm{id}) \circ \ell_0 = 4\ell = 0 \Longrightarrow \varphi_3 \circ \ell_0 = \ell_0$.
De plus, $(\varphi_3 - 1/4\,\mathrm{id}) \circ \ell_0 = 3/4\,\ell_0$ et $(\varphi_3 - 1/3\,\mathrm{id}) \circ 3/4\,\ell_0 = 3/4\,\ell_0 - 1/4\,\ell_0 = 1/2\,\ell_0$.
Enfin, $4(\varphi_3 - 1/2\,\mathrm{id}) \circ 1/2\,\ell_0 = 2(\ell_0 - 1/2\,\ell_0) = \ell_0$, ce qui donne en définitive, $\ell_0^2 = \ell_0$: donc, ℓ_0 est un projecteur et il en est de même pour tous les ℓ_k.
(iii) $(\varphi_3 - \mathrm{id}) \circ \ell_0 = 0 \Longrightarrow \mathrm{Im}(\ell_0) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_3 - \mathrm{id})$. Or, 1 étant valeur propre de φ_3 et φ_3 ayant quatre valeurs propres distinctes en dimension 4, $\mathrm{Ker}(\varphi_3 - \mathrm{id})$ est de dimension 1. D'autre part, ℓ_0 n'est pas nul sinon ce serait un polynôme annulateur de φ_3 et il n'a que trois racines. Donc, $\mathrm{Im}(\ell_0) = \mathrm{Ker}(\varphi_3 - \mathrm{id})$.
Résultats identiques *mutatis mutandis* avec les autres ℓ_k.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 212

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Dans cet exercice, X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Soit N la variable aléatoire prenant pour valeur le plus petit entier n tel que $[X \leqslant n]$ est réalisé, c'est-à-dire que : $\forall\, \omega \in \Omega,\ N(\omega) = \min\{n \in \mathbf{N},\ X(\omega) \leqslant n\}$. Déterminer la loi de N.

2. Soit M la variable aléatoire prenant pour valeur le plus grand entier n tel que $[X \geqslant n]$ est réalisé. Montrer que N et $M + 1$ sont de même loi.

3. Donner une simulation en *Scilab* de la variable aléatoire M pour une valeur de λ entrée par l'utilisateur.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 212

1. $N(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ [N = n] = [n - 1 < X \leqslant n] \Longrightarrow P(N = n) = \mathrm{e}^{-\lambda(n-1)}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})$.

2. $\forall n \in \mathbf{N},\ [M = n] = [n \leqslant X < n + 1] \Longrightarrow P(M = n) = \mathrm{e}^{-\lambda n}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}) \Longrightarrow P(M + 1 = n) = P(M = n - 1)$ c'est-à-dire que $P(M + 1 = n) = P(N = n)$.

3. On peut proposer :

```
lambda=input('entrez la valeur de lambda :')
M=grand(1,1,'geom',1-exp(-lambda))+1
```

EXERCICE PRINCIPAL S 213

1. Question de cours : stabilité de la loi γ pour la somme.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans l'exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $(T_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre 1. On pose $T_0 = 0$.

Une puce se déplace sur un axe orienté infini. Au temps 0, elle se trouve à l'origine (point d'abcisse 0). Au bout du temps T_1, la puce se déplace d'une unité vers la droite : elle atteint alors le point d'abscisse 1.

De façon générale, si la puce arrive à l'instant t ($t \in \mathbf{N}^*$) au point d'abcisse n ($t \in \mathbf{N}^*$), elle se déplace d'une unité

vers la droite au bout d'un temps T_n. Ainsi, elle sera au point d'abscisse $(n+1)$ au temps $(t+T_n)$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au temps que met la puce pour atteindre le point d'abscisse n.

2.a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer X_n en fonction de $T_1, T_2, \dots, T_n$. Préciser la loi de X_n.

b) Soit λ un réel positif et $n \in \mathbf{N}^*$. Pour quelles valeurs de λ la variable aléatoire $\mathrm{e}^{\lambda T_n}$ admet-elle une espérance ? Calculer cette espérance lorsqu'elle existe.

c) En déduire l'espérance de $\mathrm{e}^{\lambda X_n}$ lorsqu'elle existe.

3. Soit α un réel strictement supérieur à $\frac{1}{2}\cdot$ Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose : $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \times \left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}\right)^n$.

a) À l'aide de l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire $\exp\left(\dfrac{X_n}{\sqrt{n}}\right)$, montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a : $P([X_n \geqslant n + n^\alpha]) \leqslant u_n \times \exp\left(-n^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)$.

b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

c) En déduire l'existence d'un réel K indépendant de n tel que : $\forall n \geqslant 2,\ P([X_n \geqslant n+n^\alpha]) \leqslant K \times \exp\left(-n^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)$.

d) Quelle est la nature de la série de terme général $\exp\left(-n^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)$?

4. *On admet* la proposition qui suit. Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$. Si la somme $\sum_n P(A_n)$ est finie, alors la probabilité qu'une infinité d'événements A_n se réalisent simultanément est nulle.

En déduire qu'à partir d'un certain rang, l'événement $[X_n < n + n^\alpha]$ est réalisé presque sûrement.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 213

1. Cours.

2.a) On a : $X_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$ et les T_k sont indépendantes et de même loi $\gamma(1) \Longrightarrow X_n$ suit la loi $\gamma(n)$ par stabilité de la loi γ pour la somme.

b) Sous réserve d'existence, on a d'après le théorème de transfert, $E(\mathrm{e}^{\lambda T_n}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ et cette intégrale est convergente si et seulement si $\lambda < 1$. Dans ce cas, $E(\mathrm{e}^{\lambda T_n}) = \dfrac{1}{1-\lambda}\cdot$

c) On a : $\mathrm{e}^{\lambda X_n} = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda T_k}$ et puisque les variables aléatoires T_k sont indépendantes, il en est de même des variables aléatoires $\mathrm{e}^{\lambda T_k}$ (lemme des coalitions). D'où : pour $\lambda < 1$, $E(\mathrm{e}^{\lambda X_n}) = \prod_{k=1}^{n} E(\mathrm{e}^{\lambda T_k}) = \dfrac{1}{(1-\lambda)^n}\cdot$

3.a) On a : $[X_n \geqslant n + n^\alpha] = \Big[\dfrac{X_n}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n} + n^{\alpha-\frac{1}{2}}\Big] = \Big[\exp\Big(\dfrac{X_n}{\sqrt{n}}\Big) \geqslant \exp\big(\sqrt{n} + n^{\alpha-\frac{1}{2}}\big)\Big]$.

On applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $\exp\Big(\dfrac{X_n}{\sqrt{n}}\Big)$ dont l'espérance existe d'après la question précédente, puisque $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 1$, et vaut $\Big(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}\Big)^n$.

Il vient : $P\Big[\exp\Big(\dfrac{X_n}{\sqrt{n}}\Big) \geqslant \exp\big(\sqrt{n} + n^{\alpha-\frac{1}{2}}\big)\Big] = P\big([X_n \geqslant n + n^\alpha]\big) \leqslant u_n \times \exp\big(-n^{\alpha-\frac{1}{2}}\big)$.

b) On a : $u_n = \exp\Big(-\sqrt{n} - n\ln\Big(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big)$ et $\ln\Big(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big) = -\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

Par suite, $u_n = \exp\big(-1 + o(1)\big)$, donc, la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers e^{-1}.

c) La suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente donc bornée. En effet, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $n > n_0 \Longrightarrow \mathrm{e}^{-1} - \varepsilon < u_n < \mathrm{e}^{-1} + \varepsilon$.

Soit $m = \inf\{u_2, u_3, \dots, u_{n_0}, \mathrm{e}^{-1} - \varepsilon\}$ et $M = \sup\{u_2, u_3, \dots, u_{n_0}, \mathrm{e}^{-1} + \varepsilon\}$. Alors, $\forall n \geqslant 2$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.

Soit K un majorant de $(u_n)_{n\geqslant 2}$. On a bien : $\forall n \geqslant 2$, $P\big([X_n \geqslant n + n^\alpha]\big) \leqslant K \times \exp\big(-n^{\alpha-\frac{1}{2}}\big)$.

d) On a : $\exp\big(-n^{\alpha-\frac{1}{2}}\big) = o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ par exemple, donc la série de terme général $\exp\big(-n^{\alpha-\frac{1}{2}}\big)$ converge.

4. Soit $A_n = [X_n \geqslant n + n^\alpha]$. Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $P(A_n)$ converge. D'après le résultat admis (lemme de Borel-Cantelli), la probabilité que seulement un nombre fini des A_n se réalisent est égal à 1. Cela signifie qu'il existe n_0 tel que pour $n > n_0$, on a $P(A_n) = 0$, c'est-à-dire que pour $n > n_0$, on a $P\big([X_n < n + n^\alpha]\big) = 1$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 213

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, p un projecteur de E et u un endomorphisme de E.
Montrer que p et u commutent si et seulement si $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 213

On sait que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

On suppose que $p \circ u = u \circ p$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(p)$, alors $p \circ u(x) = u \circ p(x) = 0$, donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ est stable par u.

Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$, alors $p \circ u(y) = u \circ p(y) = u(y)$, donc $p(u(y)) = u(y) \in \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ est stable par u.

Bilan : $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.

On suppose que Ker(p) et Im(p) sont stables par u.

Pour tout vecteur $z = x + y \in E$, avec $x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $y \in \mathrm{Im}(p)$, on a :

$p \circ u(z) = p \circ u(x) + p \circ u(y) = u(y)$ et $u \circ p(z) = u \circ p(x) + u \circ p(y) = u(y)$.

Bilan : $p \circ u = u \circ p$.

EXERCICE PRINCIPAL S 215

1. Question de cours : définition et propriétés d'un produit scalaire.

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ muni d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$.

Dans tout l'exercice, on considère un endomorphisme φ de E antisymétrique.

On dit qu'un endomomorphisme φ est antisymétrique si : $\forall (x,y) \in E \times E$, on a : $\langle x, \varphi(y) \rangle = -\langle \varphi(x), y \rangle$.

2. Établir les propriétés suivantes :

a) Pour tout $x \in E$, on a : $\langle x, \varphi(x) \rangle = 0$.

b) $\mathrm{Im}(\varphi) = \big(\mathrm{Ker}(\varphi)\big)^{\perp}$.

c) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si F est stable par φ, alors $F^{\perp}$ est stable par φ.

d) $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$, où $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.

e) Le spectre de φ est soit vide soit réduit à $\{0\}$.

3. Montrer que toutes les valeurs propres de φ^2 sont négatives ou nulles.

4. Soit :

- F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \geqslant 2$;
- α un réel strictement positif ;
- u un endomorphisme antisymétrique de F tel que $u^2 = -\alpha^2\,\mathrm{id}_F$, où id_F est l'endomorphisme identité de F.

a) On suppose que $p = 2$. Établir l'existence d'une base orthonormale de F dans laquelle la matrice A_α de u est donnée par : $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur p, montrer qu'il existe une base de F dans laquelle la matrice B_α de u est de la forme : $B_\alpha = \begin{pmatrix} A_\alpha & (0) & & \\ (0) & A_\alpha & & \vdots \\ & (0) & \ddots & (0) \\ & & (0) & A_\alpha \end{pmatrix}$.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 215

1. Cours.

2.a) Soit $x \in E$. On a : $\langle x, \varphi(x) \rangle = -\langle x, \varphi(x) \rangle = 0$.

b) Soit $x \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Alors, il existe $y \in E$ tel que $x = \varphi(y)$. Soit $z \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, d'où $\varphi(z) = 0$.

On a : $\langle x, z \rangle = \langle \varphi(y), z \rangle = -\langle y, \varphi(z) \rangle = 0$. Donc, $x \perp z$ et $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \big(\mathrm{Ker}(\varphi)\big)^{\perp}$.

De plus, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)^{\perp}) = n - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$, d'où l'égalité.

c) Soit F stable par φ. Soit $x \in F$ et $z \in F^{\perp}$. Alors, $\langle \varphi(x), z \rangle = 0$ car $\varphi(z) \in F$. Or, $\langle \varphi(x), z \rangle = -\langle x, \varphi(z) \rangle$, donc, $\varphi(z) \in F^{\perp}$ et par suite, $F^{\perp}$ est stable par φ.

d) On a déjà $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi^2)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi^2)$. On a : $\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = -\langle x, \varphi^2(x) \rangle = 0$.

D'où, $\|\varphi(x)\| = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

e) Si le spectre de φ n'est pas vide, soit λ une valeur propre de φ et $x \neq 0$ un vecteur propre associé.

On a : $\langle x, \varphi(x) \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$. Mais, $\langle x, \varphi(x) \rangle = -\langle \varphi(x), x \rangle = -\lambda \langle x, x \rangle = -\lambda \|x\|^2$

En conséquence, $\lambda \|x\|^2 = 0$ et comme $x \neq 0$, on a $\lambda = 0$.

3. Il est clair que φ^2 est symétrique réel et admet donc des valeurs propres réelles.

Soit λ une valeur propre de φ^2 et $x \neq 0$ un vecteur propre associé.

On a : $\langle x, \varphi^2(x) \rangle = \lambda \|x\|^2 = -\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = -\|\varphi(x)\|^2 \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{\|\varphi(x)\|^2}{\|x\|^2} \leqslant 0$.

4.a) Soit e_1 un vecteur unitaire de F. On pose : $e_2 = \dfrac{1}{\alpha}\, u(e_1)$. On a : $\langle e_1, e_2 \rangle = \dfrac{1}{\alpha}\langle e_1, u(e_1) \rangle = 0$ (d'après 2.a).

Donc, e_1 et e_2 sont orthogonaux. De plus, $\|e_2\|^2 = \langle e_2, e_2 \rangle = \dfrac{1}{\alpha^2}\langle u(e_1), u(e_1) \rangle = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2}\langle e_1, e_1 \rangle = 1$.

Bilan : la base (e_1, e_2) est orthonormée. Comme $u(e_1) = \alpha\, e_2$ et $u(e_2) = -\dfrac{1}{\alpha}u^2(e_1) = -\dfrac{1}{\alpha}\alpha^2 e_1 = -\alpha e_1$, on obtient
la matrice A_α demandée.

b) On suppose la proposition démontrée pour tout sous-espace de dimension inférieure ou égale à $p-1$.
Soit (e_1, e_2) une famille orthonormale de F définie comme dans le cas $p = 2$.
Soit $G = \big(\mathrm{Vect}(e_1, e_2)\big)^{\perp}$. D'après 2.c), G est stable par u et de dimension $p-2$. On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe une base orthonormale $(e_3, e_4, \ldots, e_p)$ de G dans laquelle la matrice de u est de la forme proposée. Sur la base $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$, on obtient le résultat cherché.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 215

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que X et les X_n admettent une espérance et qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $|X| \leqslant K$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $|X_n| \leqslant K$.

1. Dans cette question, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} E\big(|X_n - X|\big) = 0$. Montrer que la suite $(X_n - X)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

2. On suppose que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers X. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} E\big(|X_n - X|\big) = 0$.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 215

1. D'après l'inégalité de Markov, on a : $\forall\, \varepsilon > 0$, $P\big(|X_n - X| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \dfrac{E\big(|X_n - X|\big)}{\varepsilon} \to 0$ quand n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que la suite $(X_n - X)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

2. Soit $\varepsilon > 0$ et le système complet d'événements $\big(|X_n - X| > \varepsilon, |X_n - X| \leqslant \varepsilon\big)$. On a l'égalité :
$|X_n - X| = |X_n - X| \times \mathbf{1}_{[|X_n - X| > \varepsilon]} + |X_n - X| \times \mathbf{1}_{[|X_n - X| \leqslant \varepsilon]}$. Par suite,
$E\big(|X_n - X|\big) = E\big(|X_n - X| \times \mathbf{1}_{[|X_n - X| > \varepsilon]}\big) + E\big(|X_n - X| \times \mathbf{1}_{[|X_n - X| \leqslant \varepsilon]}\big)$, d'où,
$E\big(|X_n - X|\big) \leqslant E\big(2K\, \mathbf{1}_{[|X_n - X| > \varepsilon]}\big) + E\big(\varepsilon\, \mathbf{1}_{[|X_n - X| \leqslant \varepsilon]}\big) \leqslant 2K\, P\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) + \varepsilon\, P\big(|X_n - X| \leqslant \varepsilon\big)$, soit encore,
$E\big(|X_n - X|\big) \leqslant 2K\, P\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) + \varepsilon$. Puisque la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers X, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $2K\, P\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) \leqslant \varepsilon$.
Ainsi, pour $n \geqslant n_0$, on a $E\big(|X_n - X|\big) \leqslant 2\,\varepsilon$ et comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} E\big(|X_n - X|\big) = 0$.

EXERCICE PRINCIPAL S 216

On rappelle le résultat suivant :

Soit $(a_{ij})_{(i,j)\in \mathbf{N}^*\times \mathbf{N}^*}$ une suite de réels positifs ou nuls, indexée par $\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$, qui vérifie les deux conditions :

- *pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, la série $\sum\limits_{j\in\mathbf{N}^*} a_{ij}$ est convergente de somme $L_i = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} a_{ij}$;*
- *la série $\sum\limits_{i\in\mathbf{N}^*} L_i$ est convergente.*

Alors, pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, la série $\sum\limits_{i\in\mathbf{N}^*} a_{ij}$ est convergente et la série de terme général $C_j = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_{ij}$ est convergente. De plus, on a $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} L_i = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} C_j$, c'est-à-dire $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{j=1}^{+\infty} a_{ij}\Big) = \sum\limits_{j=1}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_{ij}\Big)$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi. Pour tout $z \in [0,1]$, on pose : $\Phi(z) = E(z^{X_1})$.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et si $k \in \mathbf{N}^*$, on note A_k l'événement : $A_k = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}^*} [T_n = k]$.

1. Question de cours : espérance du produit de variables aléatoires indépendantes.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ deux suites réelles bornées. Justifier pour tout réel $z \in [0,1[$, la convergence des séries $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}^*} u_n z^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}^*} v_n z^n$.

On admet l'équivalence : $\big(\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = v_n\big) \iff \big(\forall z \in [0,1[,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n z^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n z^n\big)$.

3.a) Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on pose : $p_k = P(A_k)$. Justifier la relation : $p_k = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(T_n = k)$.

b) Si $z \in [0,1]$ et $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(T_n = k)\, z^k$ en fonction de $\Phi(z)$.

c) En déduire que pour tout $z \in [0,1[$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k z^k = \dfrac{\Phi(z)}{1-\Phi(z)}$.

4. Montrer que la suite $(p_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est constante égale à c si et seulement si la loi des X_n $(n \in \mathbf{N}^*)$ est géométrique. Quelle relation a-t-on alors entre c et $E(X_n)$?

5. On suppose que la loi des X_n $(n \in \mathbf{N}^*)$ est géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, soit $\mathbf{1}_{A_k}$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement A_k. Préciser la loi des $\mathbf{1}_{A_k}$ $(k \in \mathbf{N}^*)$ et montrer que ces variables aléatoires sont indépendantes.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 216

1. Cours.

2. Par hypothèse, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bornée par M, donc, $0 \leqslant |u_n z^n| \leqslant M|z|^n$, ce qui assure l'absolue convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}^*} u_n z^n$ pour $|z| < 1$.

3.a) Si $k \in \mathbf{N}^*$, A_k est la réunion disjointe des événements $(T_n = k)$ $(n \in \mathbf{N}^*)$; donc, $p_k = \sum_{n=1}^{+\infty} P(T_n = k)$.

b) On a : $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_n = k)\, z^k = E(z^{T_n}) = E\Big(\prod_{k=1}^{n} z^{X_k}\Big) = \big(\Phi(z)\big)^n$ (indépendance et similitude de loi des X_k).

c) La suite $(p_k)_k$ est bornée par 1, donc si $z \in [0,1[$, la série $\sum_k p_k\, z^k$ converge et d'après la question a), on a :

$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k\, z^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} P(T_n = k) z^k\Big)$. Pour $z \in [0,1[$, on a $\Phi(z) < \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_n = k) = 1$. *Le résultat rappelé* $\Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k\, z^k = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_n = k) z^k\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\Phi(z)\big)^n = \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)}\,.$$

4. Si $(p_k)_k$ est une suite constante égale à c, on a nécessairement $c > 0$ car $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} A_k$ qui sont tous de probabilité égale à c. *Le résultat admis* $\Longrightarrow$ $\big(\forall\, k \in \mathbf{N}^*,\ p_k = c\big) \iff \big(\forall\, z \in [0,1[,\ \sum_{k=1}^{+\infty} p_k\, z^k = \sum_{k=1}^{+\infty} c\, z^k\big) \iff$

$\big(\forall\, z \in [0,1[,\ \dfrac{\Phi(z)}{1-\Phi(z)} = \dfrac{cz}{1-z}\big) \iff \big(\forall\, z \in [0,1[,\ \Phi(z) = \dfrac{cz}{1-(1-c)z} = \sum_{k=1}^{+\infty} c(1-c)^{k-1} z^k\big)$, ce qui équivaut au

fait que X_n suit une loi géométrique de paramètre c. On a évidemment $c \times E(X_n) = 1$.

5. D'après 4, si $X_n \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a $P(\mathbf{1}_{A_k} = 1) = P(A_k) = p$, donc X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour montrer l'indépendance des $(\mathbf{1}_{A_k})_{k \in \mathbf{N}^*}$, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, les événements $[\mathbf{1}_{A_k} = 1]$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ sont indépendants.

Or, $P\big([\mathbf{1}_{A_1} = 1] \cap \ldots \cap [\mathbf{1}_{A_n} = 1]\big) = P\big([X_1 = 1] \cap \ldots \cap [X_n = 1]\big) = p^n = \prod_{k=1}^{n} P\big([\mathbf{1}_{A_k} = 1]\big)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 216

On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Soit A une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, associe la matrice $\varphi_A(M) = AM$.
1. Comparer les spectres de A et φ_A.
2. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que φ_A est diagonalisable.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 216

1. φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Soit λ est une valeur propre de A et v un vecteur propre associé. Alors, $A\,v = \lambda\, v$ et $M_v = [v\, v \ldots v]$ est une matrice $\neq 0$ telle que $\varphi_A(M_v) = [Av\, Av \ldots Av] = \lambda[v\, v \ldots v] = \lambda M_v$. S'il existe une matrice $M = [m_1\, m_2 \ldots m_n] \neq 0$ telle que $AM = \varphi_A(M) = \mu M$, alors, l'un des m_j est un vecteur non nul et vérifiant $Am_j = \mu\, m_j$.

2. On a : $A = P^{-1}DP$ avec $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. On considère la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Le système formé par les $P^{-1}E_{i,j}$ est toujours une base et il vérifie :

$$\varphi_A(P^{-1}E_{i,j}) = AP^{-1}E_{i,j} = P^{-1}DE_{i,j} = d_i P^{-1}E_{i,j}\,.$$

Ce système est donc une base de vecteurs propres, ce qui prouve que φ est diagonalisable.

EXERCICE PRINCIPAL S 218

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} X_k$ et $U_n = \dfrac{1}{2^n} Z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{X_k}{2^k}$.

2.a) Déterminer les lois respectives de Z_1 et Z_2.

b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $Z_{n+1} = 2\,Z_n + X_{n+1}$. En déduire par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire Z_n suit la loi uniforme sur $[\![\, 0, 2^n - 1 \,]\!]$.

3.a) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, la série de terme général $\dfrac{X_k(\omega)}{2^k}$ converge.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $U(\omega) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n(\omega) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} Z_n(\omega)$ et $U = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{X_k}{2^k}$.

On admet que U est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

b) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, on a : $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{X_k(\omega)}{2^k} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, puis $0 \leqslant U_n(\omega) \leqslant U(\omega) \leqslant U_n(\omega) + \dfrac{1}{2^n} \leqslant 1$.

c) Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $\Big[U_n + \dfrac{1}{2^n} \leqslant x\Big] \subset [U \leqslant x] \subset [U_n \leqslant x]$.

d) En déduire que U suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

4. Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers U.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 218

1. Cours.

2.a) On a : $Z_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)$ ou encore $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![\, 0, 1]\!])$. D'autre part, $Z_2 = 2\,X_1 + X_2$ et $Z_2(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.

On a par exemple, $[Z_2 = 3] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1] \Longrightarrow P(Z_2 = 3) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$. De même, on trouve sans difficulté, $P(Z_2 = 0) = P(Z_2 = 1) = P(Z_2 = 2) = 1/4$, d'où $Z_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![\, 0, 3]\!])$.

b) $Z_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} 2^{n+1-k} X_k = 2 \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} X_k + X_{n+1} = 2\,Z_n + X_{n+1}$. On note que $2\,Z_n$ et X_{n+1} sont indépendantes.

Pour tout $n \geqslant 1$, soit $\mathcal{H}_n$: "Z_n suit la loi uniforme sur $[\![\, 0, 2^n - 1 \,]\!]$".

- $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont vraies.
- Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Alors, $2\,Z_n$ suit la loi uniforme sur $\big\{2k$ tels que $k \in [\![\, 0, 2^n - 1 \,]\!]\big\} = \{0, 2, 4, \ldots, 2^{n+1} - 2\}$. Comme X_{n+1} ne prend que les valeurs 0 et 1, Z_{n+1} prend les valeurs $\big\{2k$ tels que $k \in [\![\, 0, 2^n - 1 \,]\!]\big\}$ quand $X_{n+1} = 0$ et $\big\{2k + 1$ tels que $k \in [\![\, 0, 2^n - 1 \,]\!]\big\}$ quand $X_{n+1} = 1$. Pour $k \in [\![\, 0, 2^n - 1 \,]\!]$, on a :

$$\begin{cases} [Z_{n+1} = 2k] = [Z_n = 2k] \cap [X_{n+1} = 0] \Longrightarrow P(Z_{n+1} = 2k) = 1/2^n \times 1/2 = 1/2^{n+1} \\ [Z_{n+1} = 2k + 1] = [Z_n = 2k] \cap [X_{n+1} = 1] \Longrightarrow P(Z_{n+1} = 2k + 1) = 1/2^n \times 1/2 = 1/2^{n+1} \end{cases}$$

Bilan : $Z_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![\, 0, 2^{n+1} - 1]\!])$.

- Pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{H}_n$ est vraie.

3.a) Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a : $0 \leqslant \dfrac{X_k(\omega)}{2^k} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$, donc la série de terme général $\dfrac{X_k(\omega)}{2^k}$ converge vers un réel positif, inférieur ou égal à $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$.

b) De même, $\forall\, \omega \in \Omega,\ 0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{X_k(\omega)}{2^k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}\cdot$ Comme $U(\omega) = U_n(\omega) + \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{X_k(\omega)}{2^k}$, on a bien $0 \leqslant U_n(\omega) \leqslant U(\omega) \leqslant U_n(\omega) + \dfrac{1}{2^n} \leqslant 1$.

c) D'après b), $U_n(\omega) + \dfrac{1}{2^n} \leqslant x \Longrightarrow U(\omega) \leqslant x \Longrightarrow U_n(\omega) \leqslant x$. Donc, $\left[U_n + \dfrac{1}{2^n} \leqslant x\right] \subset [U \leqslant x] \subset [U_n \leqslant x]$.

d) Par suite, $P\Big(U_n + \dfrac{1}{2^n} \leqslant x\Big) \leqslant P(U \leqslant x) \leqslant P(U_n \leqslant x)$. Or, $P(U_n \leqslant x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor 2^n x \rfloor} P(Z_n = k) = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor + 1}{2^n}$ et $P\Big(U_n + \dfrac{1}{2^n} \leqslant x\Big) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor 2^n x \rfloor - 1} P(Z_n = k) = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$, d'où, $\dfrac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n} \leqslant P(U \leqslant x) \leqslant \dfrac{\lfloor 2^n x \rfloor + 1}{2^n}\cdot$

Comme $2^n x - 1 < \lfloor 2^n x \rfloor \leqslant 2^n x$, on a : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ x - \dfrac{1}{2^n} \leqslant P(U \leqslant x) \leqslant x + \dfrac{1}{2^n}\cdot$

Par passage à la limite, on en déduit que $\forall x \in [0,1],\ P(U \leqslant x) = x$, donc U suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

5. Soit $x \in [0,1]$. D'après 4.d), $F_{U_n}(x) - F_U(x) \geqslant 0$ (F_{U_n} et F_U : fonctions de répartition de U_n et U). Or, $x \in [0,1] \Longrightarrow F_{U_n}(x) - F_U(x) = \dfrac{\lfloor 2^n x \rfloor + 1}{2^n} - x = \dfrac{\lfloor 2^n x \rfloor - 2^n x + 1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, car $-1 < \lfloor 2^n x \rfloor - 2^n x \leqslant 0$.

Le théorème d'encadrement $\Longrightarrow \displaystyle\lim_{n \to +\infty} |F_{U_n}(x) - F_U(x)| = 0$, donc la suite $(U_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers U.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 218

Pour tout entier naturel k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f_k(x) = x^k\, \mathrm{e}^x$.

On note $\mathcal{F}_3$ le sous-espace vectoriel engendré par f_0, f_1, f_2, f_3.

1. Exhiber une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}_3$.

Soit Φ l'application qui à toute fonction $f \in \mathcal{F}_3$, associe $\Phi(f) : x \in \mathbf{R} \longmapsto \displaystyle\int_\alpha^x f(t)\, \mathrm{d}t$.

2. On suppose que $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que Φ n'est pas un endomorphisme de $\mathcal{F}_3$.

3. On suppose que $\alpha = -\infty$.

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{F}_3$.

b) Déterminer la matrice M de Φ dans la base $\mathcal{B}$ ainsi que son inverse M^{-1}.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 218

On note $f_0 = \exp$.

1. On écrit une combinaison linéaire nulle : $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$.
Si on avait $\lambda_j \neq 0$ pour un certain j, alors, en notant m le plus grand j tel que $\lambda_j \neq 0$, le membre de gauche se comporterait en $+\infty$ comme $\lambda_m f_m$ et donc divergerait vers $\pm\infty$, ce qui contredirait l'égalité à 0.
Donc, $\forall j \in [\![0,3]\!]$, $\lambda_j = 0$: la famille (f_0, f_1, f_2, f_3) est libre et c'est une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}_3$.
(*on peut aussi raisonner par des évaluations en* $x = 0$ *et des dérivations successives*)

2. L'application Φ est linéaire. On a $\Phi(f_0) : x \longmapsto \displaystyle\int_\alpha^x \exp(t)\,\mathrm{d}t = \exp(x) - \exp(\alpha) = f_0(x) - \exp(\alpha)$.
Donc, $\Phi(f_0) \in \mathcal{F}_3$ si et seulement si la fonction constante égale à 1 appartient à $\mathcal{F}_3$.
Mais, si on pouvait écrire $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 1$ pour des réels λ_j, alors, selon le même raisonnement qu'à la question 1, on aurait $\forall j \in [\![0,3]\!]$, $\lambda_j = 0$, ce qui aboutirait à une contradiction du type $1 = 0$.

3.a) On a clairement $\Phi(f_0) = f_0$ et $\forall j \in [\![1,3]\!]$, une intégration par parties donne $\Phi(f_j) = f_j - j\Phi(f_{j-1})$, ce qui prouve par une récurrence immédiate que $\Phi(\mathcal{F}_3) \subset \mathcal{F}_3$.
b) En exploitant les calculs précédents, on a : $\Phi(f_0) = f_0$, $\Phi(f_1) = f_1 - \Phi(f_0) = f_1 - f_0$,
$\Phi(f_2) = f_2 - 2\Phi(f_1) = f_2 - 2f_1 + 2f_0$ et $\Phi(f_3) = f_3 - 3\Phi(f_2) = f_3 - 3f_2 + 6f_1 - 6f_0$, soit la représentation matricielle suivante : $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
La matrice M est inversible (triangulaire sans 0 sur la diagonale principale) et l'inverse de Φ est donnée sur $\mathcal{F}_3$ par l'opérateur de dérivation : $f_0' = f_0$ et $\forall j \in [\![1,3]\!]$, $f_j' = f_j + j f_{j-1}$, soit,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE PRINCIPAL S 220

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : donner la définition de la convergence en loi et de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à densité, indépendantes, de même loi de fonction de répartition commune notée F. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $m_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

2. On suppose dans cette question l'existence de deux réels a et b $(a < b)$ tels que :

$$(i)\ \forall x \in]\,a, b\,[,\quad 0 < F(x) < 1,\quad (ii)\ \forall x \leqslant a,\quad F(x) = 0 \quad \text{et} \quad (iii)\ \forall x \geqslant b,\quad F(x) = 1\,.$$

a) Exprimer les fonctions de répartition respectives G_n et H_n des variables aléatoires M_n et m_n à l'aide de F.
b) Étudier la convergence en loi des suites de variables aléatoires $(M_n)_{n\geqslant 1}$ et $(m_n)_{n\geqslant 1}$.

3. Dans cette question, on suppose que la loi commune des X_n est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de G_n dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
a) Représenter dans ce repère les courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$. Préciser la tangente à l'origine de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$ ainsi que le point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_n$. Décrire le déplacement de $\mathcal{C}_n$ en fonction de n.
b) La suite $\left(\dfrac{M_n}{\ln n}\right)_{n\geqslant 2}$ converge-t-elle en loi vers la variable certaine $\dfrac{1}{\lambda}$?
c) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{M_n}{\ln n}\right)_{n\geqslant 2}$ converge en probabilité vers la variable certaine $\dfrac{1}{\lambda}$.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 220

1. Cours.

2.a) $\forall x \in \mathbf{R}$, $[M_n \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x] \Longrightarrow G_n(x) = \big(F(x)\big)^n$. De même, $\forall x \in \mathbf{R}$, $H_n(x) = 1 - \big(1 - F(x)\big)^n$.

b) $\forall x \leqslant a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 0$, $\quad \forall x \in]\,a, b\,[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 0$ car $0 < F(x) < 1$ et $\forall x > b$, $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 1$.
Bilan : la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable certaine égale à b. De même,
$\forall x \leqslant a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n(x) = 0$, $\quad \forall x \in]\,a, b\,[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n(x) = 1$ car $0 < 1 - F(x) < 1$ et $\forall x > b$, $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n(x) = 1$.
Bilan : la suite $(m_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable certaine égale à a.

3.a) Soit $x > 0$. On a $G_n(x) = \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\big)^n$ et $G_{n+1}(x) = G_n(x)\big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\big)$, donc $G_{n+1}(x) < G_n(x)$: la courbe $\mathcal{C}_{n+1}$ est située au-dessous de la courbe $\mathcal{C}_n$. La droite $y = 1$ est asymptote à chacune de ces deux courbes.
$G_n'(x) = n\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\big)^{n-1}$, donc $G_n'(0) = 0$: la courbe $\mathcal{C}_n$ a une tangente à l'origine horizontale.
$G_n''(x) = n\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\big)^{n-2}\big(-1 + n\mathrm{e}^{-\lambda x}\big) \Longrightarrow \mathcal{C}_n$ admet un point d'inflexion en $\dfrac{\ln n}{\lambda}$ et ce point d'inflexion s'éloigne indéfiniment lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Soit S_n la fonction de répartition de $\dfrac{M_n}{\ln n}$. On a : $S_n(x) = \begin{cases} G_n(x \ln n) = \big(1 - \exp(-\lambda\, x \ln n)\big)^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Or, pour $x > 0$, $\big(1 - \exp(-\lambda\, x \ln n)\big)^n = \big(1 - n^{-\lambda x}\big)^n = \exp\big(n \ln(1 - n^{-\lambda x})\big)$ et $n \ln(1 - n^{-\lambda x}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^{\lambda x - 1}}$.

1er cas : $\lambda x - 1 > 0 \Longleftrightarrow x > 1/\lambda \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n^{\lambda x-1}} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = 1$.

2ème cas : $\lambda x - 1 < 0 \iff x < 1/\lambda \implies \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^{\lambda x-1}} = -\infty \implies \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 0$.

3ème cas : $\lambda x - 1 = 0 \iff x = 1/\lambda \implies \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^{\lambda x-1}} = -1 \implies \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 1/\mathrm{e}$.

On pose : $S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/\lambda \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1/\lambda \end{cases}$. La fonction S est la fonction de répartition de la variable certaine $\frac{1}{\lambda}\cdot$

La fonction S est continue sur $\mathbf{R}\setminus\{1/\lambda\}$ et $\forall x \in \mathbf{R}\setminus\{1/\lambda\}$, on a $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x)$.

Bilan : la suite $\left(\frac{M_n}{\ln n}\right)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers la variable certaine $\frac{1}{\lambda}\cdot$

c) Soit $\varepsilon > 0$. On pose $p_n = P\left(\left|\frac{M_n}{\ln n} - \frac{1}{\lambda}\right| \leqslant \varepsilon\right)$ et on veut montrer que $\lim_{n\to+\infty} p_n = 1$.

$p_n = P\Big(\big(-\varepsilon + 1/\lambda\big)\ln n \leqslant M_n \leqslant (\varepsilon + 1/\lambda)\ln n\Big) = G_n\Big((\varepsilon + 1/\lambda)\ln n\Big) - G_n\Big(\big(-\varepsilon + 1/\lambda\big)\ln n\Big)$, soit encore,

$p_n = \Big(1 - \exp\big(-\lambda(\varepsilon + 1/\lambda)\ln n\big)\Big)^n - \Big(1 - \exp\big(-\lambda(-\varepsilon + 1/\lambda)\ln n\big)\Big)^n = \left(1 - \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon+1}}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{n^{-\lambda\varepsilon+1}}\right)^n$.

Or, $\left(1 - \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon+1}}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon+1}}\right)\right)$ et $n\ln\left(1 - \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\frac{1}{n^{\lambda\varepsilon+1}} = -\frac{1}{n^{\lambda\varepsilon}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Donc, $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon+1}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon+1}}\right)\right) = 1$. De même,

$\left(1 - \frac{1}{n^{-\lambda\varepsilon+1}}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{1}{n^{-\lambda\varepsilon+1}}\right)\right)$ et $n\ln\left(1 - \frac{1}{n^{-\lambda\varepsilon+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\frac{1}{n^{-\lambda\varepsilon+1}} = -\frac{1}{n^{-\lambda\varepsilon}} \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$.

Donc, $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^{-\lambda\varepsilon+1}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{1}{n^{-\lambda\varepsilon+1}}\right)\right) = 0$.

Finalement, $\lim_{n\to+\infty} p_n = 1$ et la suite $\left(\frac{M_n}{\ln n}\right)_{n\geqslant 2}$ converge en probabilité vers la variable certaine $\frac{1}{\lambda}\cdot$

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 220

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles.

1. L'ensemble $\mathcal{S}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$?

2. Montrer que si $P \in \mathcal{S}$ et n'est pas constant, alors $P' \in \mathcal{S}$.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 220

1. L'ensemble $\mathcal{S}$ n'est pas un sous-espace vectoriel car X^2 et 1 appartiennent à $\mathcal{S}$ mais $X^2 + 1 \notin \mathcal{S}$.

2. *Si P est à racines simples* $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ ($n = \deg P$), alors par le théorème de Rolle, P' s'annule au moins une fois sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Le polynôme P' est de degré $(n-1)$ et possède $(n-1)$ racines réelles distinctes, donc il appartient à $\mathcal{S}$.

Si P n'est pas à racines simples, soit $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ses racines avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ et soit $k_1, k_2, \ldots, k_p$ leurs ordres de multiplicié respectifs. Alors, comme précédemment, P' s'annule au moins une fois sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, ce qui donne $(p-1)$ racines de P'. Par ailleurs, toute racine d'ordre k_i de P est racine d'ordre $(k_i - 1)$ de P'. La somme des ordres de multiplicité des racines indiquées est donc égale à :

$$(p-1) + \sum_{i=1}^{p}(k_i - 1) = \Big(\sum_{i=1}^{p} k_i\Big) - 1 = \deg P - 1 = \deg P'.$$

Donc, $P' \in \mathcal{S}$.

EXERCICE PRINCIPAL S 227

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $a \in]0,1[$ et X une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & \text{si } x \in [0,a] \\ \dfrac{1}{2(1-a)} & \text{si } x \in]a,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour n entier de $\mathbf{N}^*$, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

On suppose que a est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1. Question de cours : énoncer le théorème de Slutsky.

2.a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Tracer le courbe représentative de F dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

3.a) Calculer $E(X)$. On donne $V(X) = \dfrac{4+(2a-1)^2}{48}$.

b) Construire à partir de $\overline{X}_n$ un estimateur T_n sans biais et convergent du paramètre a.

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $U_n = \dfrac{T_n - a}{\sqrt{V(T_n)}}$ et $Z_n = \dfrac{2\sqrt{3n}(T_n - a)}{\sqrt{4+(2T_n-1)^2}}$.

a) Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

b) En déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

c) Construire un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 227

1. Cours.

2.a) On trouve : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{2a} & \text{si } x \in [0,a] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x-a}{2(1-a)} & \text{si } x \in]a,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

b) Le dessin doit montrer la non dérivabilité de F en 0, a et 1.

3.a) $E(X) = \displaystyle\int_0^a \frac{x}{2a}\,\mathrm{d}x + \int_a^1 \frac{x}{2(1-a)}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{4a} + \frac{1-a^2}{4(1-a)} = \frac{a}{2} + \frac{1}{4}$.

b) On a $E(\overline{X}_n) = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{4} \Longrightarrow T_n = 2\overline{X}_n - \dfrac{1}{2}$ est un estimateur sans biais de a (on peut remarquer que T_n est un estimateur car c'est une fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendante de a).

Par indépendance des X_n, on a : $V(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{n}V(X) = \dfrac{4+(2a-1)^2}{48n} \Longrightarrow V(T_n) = 4V(\overline{X}_n) = \dfrac{4+(2a-1)^2}{12n}$,
et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} V(T_n) = 0$, l'estimateur T_n est convergent.

4.a) On pose : $S_n = \dfrac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sqrt{V(\overline{X}_n)}}$. Le théorème limite central permet d'affirmer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(0,1)$. Or, on trouve sans difficulté que $S_n = \dfrac{T_n - a}{\sqrt{V(T_n)}} = U_n$.

Par conséquent, la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(0,1)$.

b) On sait que la suite $(\overline{X}_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $E(X) = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{4}$. La fonction $f : x \longmapsto 2x - \dfrac{1}{2}$ est continue sur $\mathbf{R}$ et $f(\overline{X}_n) = T_n$. D'après le cours, la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers a.

De même, par continuité de la fonction $x \longmapsto \sqrt{4+(2x-1)^2}$, on peut dire que la suite $\left(\sqrt{4+(2T_n-1)^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $\sqrt{4+(2a-1)^2}$. Par conséquent, en posant $R_n = \dfrac{\sqrt{4+(2a-1)^2}}{\sqrt{4+(2T_n-1)^2}}$, la suite $(R_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la constante égale à 1.

De plus, compte tenu des définitions des suites en jeu et des résultats précédents, il est facile de montrer que $\forall n \geqslant 1$, on a $Z_n = U_n \times R_n$. Or la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, la suite $(R_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la constante 1. Le théorème de Slutsky permet alors d'affirmer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers $1\times U = U \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

c) On note Φ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$ et $t_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right)$. On a alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(-t_\alpha \leqslant Z_n \leqslant t_\alpha\big) = 1-\alpha$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(-t_\alpha \leqslant \dfrac{2\sqrt{3n}(T_n-a)}{\sqrt{4+(2T_n-1)^2}} \leqslant t_\alpha\right) = 1-\alpha$, et finalement :

$\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(T_n - \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{3n}}\sqrt{4+(2T_n-1)^2} \leqslant a \leqslant T_n + \dfrac{t_\alpha}{2\sqrt{3n}}\sqrt{4+(2T_n-1)^2}\right)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 227

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension $3n$.

Soit f un endomorphisme de E de rang $2n$ et g la restriction de f au sous-espace vectoriel $\mathrm{Im} f$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im} f^2$ et $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$.
2. On note $\mathrm{rg}(f^2)$ le rang de f^2. Déduire de la question précédente que $\mathrm{rg}(f^2) \geqslant n$.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 227

1. Montrons que $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im} f^2$.
   - *Soit $y \in \mathrm{Im} g$.* Il existe $x \in \mathrm{Im} f$ tel que $y = g(x)$. Donc, $\exists u \in E,\ x = f(u) \Longrightarrow y = f^2(u) \in \mathrm{Im} f^2$.
   - *Soit $y \in \mathrm{Im} f^2$.* Il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$. Or, $f(x) \in \mathrm{Im} f \Longrightarrow y = g\big(f(x)\big) \in \mathrm{Im}\, g$.

Bilan : $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im} f^2$.

Montrons que $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$.

- *Soit $x \in \mathrm{Ker} g$.* D'après la définition de g, on a $x \in \mathrm{Im} f$ et $g(x) = f(x) = 0_E$. Donc, $x \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$.
- *Soit $x \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$.* Alors, $f(x) = 0_E$. Or, $x \in \mathrm{Im} f$, donc $g(x) = f(x)$ et $x \in \mathrm{Ker}\, g$.

Bilan : $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$.

2. D'après la question 1, on a $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker} f$ et puisque $\dim \mathrm{Ker} f = n$ (théorème du rang), on a : $\dim \mathrm{Ker}\, g \leqslant n$.

D'autre part, d'après le théorème du rang, on a :

$\dim \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{rg}\,(g) = \dim \mathrm{Im} f \Longrightarrow \mathrm{rg}(f^2) = 2n - \dim \mathrm{Ker}\, g \geqslant n$, donc, $\mathrm{rg}(f^2) \geqslant n$.

EXERCICE PRINCIPAL S 225

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X.

1. Question de cours : énoncer des conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.

Dans tout l'exercice, on considère trois variables aléatoires réelles X_1, X_2 et X_3 centrées et admettant un moment d'ordre 2.

Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ m_{i,j} = E(X_iX_j)$.

2. Justifier que la matrice M est diagonalisable.

3. Montrer que les valeurs propres de M sont positives ou nulles.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Montrer que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de M.

Quel est le spectre de M ?

5. Soit Z une variable aléatoire centrée. Soit φ la fonction définie sur $\mathbf{R}^3$ à valeurs réelles telle que :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3,\ \varphi(x_1, x_2, x_3) = E\big((Z - x_1X_1 - x_2X_2 - x_3X_3)^2\big).$$

a) Déterminer la matrice hessienne $\nabla^2(\varphi)(x_1, x_2, x_3)$ de φ en (x_1, x_2, x_3).

b) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que φ admette un minimum en $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est :

$$M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(ZX_1) \\ E(ZX_2) \\ E(ZX_3) \end{pmatrix}.$$

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur Z pour que la fonction φ admette un minimum.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 225

1. Cours.

2. La matrice M est symétrique réelle, donc diagonalisable;

3. Soit λ une valeur propre de M et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. On a :

$${}^t xMx = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i m_{i,j} x_j = E\Big(\sum_{i=1}^{3}(x_iX_i)^2 + 2\sum_{i\neq j}(x_iX_i)(x_jX_j)\Big) = E\Big(\Big(\sum_{i=1}^{3} x_iX_i\Big)^2\Big) \geqslant 0.$$

D'autre part, ${}^t xMx = \lambda\, {}^t xx = \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ avec $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$, donc $\lambda \geqslant 0$.

4. On trouve : $Mv_1 = 0$, $Mv_2 = 3v_2$ et $Mv_3 = 3v_3$. De plus, v_2 et v_3 ne sont pas colinéaires. Les réels 0 et 3 sont valeurs propres de M et il n'y en a pas d'autre car, en notant E_0 et E_3 les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 0 et 3, on a $\dim E_0 + \dim E_3 = 3$. Donc, $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 3\}$.

5.a) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = E(Z^2) - 2\sum_{i=1}^{3} x_iE(ZX_i) + \sum_{i=1}^{3} x_i^2E(X_i^2) + 2\sum_{i\neq j} x_ix_jE(X_iX_j)$. Par suite :

$\partial_i(\varphi)(x_1, x_2, x_3) = -2E(ZX_i) + 2\sum_{j=1}^{3} x_jE(X_iX_j)$ et $\partial_{i,j}^2(\varphi)(x_1, x_2, x_3) = 2E(X_iX_j) \Longrightarrow \nabla^2(\varphi)(x_1, x_2, x_3) = 2M$.

b) Déterminons les points critiques de φ. On pose : $x = (x_1, x_2, x_3)$. On obtient :

$$\begin{cases} \partial_1(\varphi)(x) = 2x_1E(X_1^2) + 2x_2E(X_1X_2) + 2x_3E(X_1X_3) - 2E(ZX_1) \\ \partial_2(\varphi)(x) = 2x_1E(X_1X_2) + 2x_2E(X_2^2) + 2x_3E(X_2X_3) - 2E(ZX_2) \\ \partial_3(\varphi)(x) = 2x_1E(X_1X_3) + 2x_2E(X_2X_3) + 2x_3E(X_3^2) - 2E(ZX_3) \end{cases}.$$

L'équation $\nabla(\varphi)(x) = 0 \Longleftrightarrow Mx = \begin{pmatrix} E(ZX_1) \\ E(ZX_2) \\ E(ZX_3) \end{pmatrix}$ (1) . La condition (1) est nécessaire. La forme quadratique associée à M ayant des valeurs propres positives est elle-même positive. La condition (1) est suffisante.

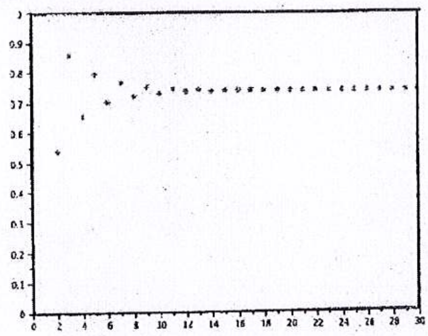
c) L'application φ admet un minimum si et seulement s'il existe $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tel que $Mx = \begin{pmatrix} E(ZX_1) \\ E(ZX_2) \\ E(ZX_3) \end{pmatrix}$.

L'endomorphisme u canoniquement associé à M est de rang 2 et son image est engendrée par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. D'où $\mathrm{Im}(u) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ -\lambda \\ -\mu \end{pmatrix}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}$. Puisque les deux sous-espaces propres de M sont orthogonaux (et supplémentaires), la condition $x \in \mathrm{Im}(u)$ se traduit par $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
La condition nécessaire et suffisante demandée pour Z est : $E\big(Z(X_1 + X_2 + X_3)\big) = 0$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 225

On exécute le programme *Scilab* suivant qui retourne la courbe ci-dessous :

```
nmax=30 ;
U=zeros(nmax,1) ;
U(1)=0 ;
for i=1:nmax
U(i+1)=cos(U(i))
end
plot(0:nmax,U,'*')
```



Justifier le résultat obtenu.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 225

La courbe trace les 31 premiers termes de la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$. Sur $[0, 1]$, la fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est stable et contractante : $f([0,1]) \subset [0,1]$ et $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \sin(1)|x - y|$, avec le théorème des accroissements finis par exemple. Elle possède un unique point fixe ℓ tel que $\cos(\ell) = \ell$ avec $\ell \simeq 0.739028$. On a donc : $|u_n - \ell| \leqslant \big(\sin(1)\big)^n |u_0 - \ell| \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

On peut ensuite remarquer que $f(x) > \ell$ si $x < \ell$ et réciproquement pour justifier le caractère alterné des signes de $(u_n - \ell)$. La croissance des termes pairs se montre facilement par récurrence (on vérifie que $\cos(\cos(0)) > 0$).