

Sujet Maths EML ECS 2017

PROBLÈME 1

PARTIE I : Étude d'un exemple

On considère la matrice A de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle inversible ? Quel est son rang ?
2. Quelles sont les valeurs propres de A ? La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$?
3. Déterminer une matrice P de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, telles que : $A = PDP^{-1}$.

PARTIE II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n , et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

On note, pour tout polynôme P de E , $T(P) = (X(X-1)P')'$, où l'accent désigne la dérivation.

Par exemple, si $P = X^2$, alors $P' = 2X$, et donc

$$T(P) = (X(X-1)2X)' = (2X^3 - 2X^2)' = 6X^2 - 4X.$$

4. Montrer que T est un endomorphisme de E .
5. Calculer, pour tout k de $\{0, \dots, n\}$, $T(X^k)$. En déduire la matrice M de T dans la base \mathcal{B} .
6. L'endomorphisme T est-il bijectif ? Quel est le rang de T ? Déterminer $\text{Ker}(T)$.
7. Quelles sont les valeurs propres de T ? L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

PARTIE III : Intervention d'un produit scalaire

On conserve les notations de la partie II.

On considère l'application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx.$$

8. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
9. Démontrer : $\forall (P, Q) \in E^2, \quad \varphi(T(P), Q) = - \int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x)dx.$
10. En déduire que T est un endomorphisme symétrique de E pour le produit scalaire φ . Quel résultat de la partie II peut-on retrouver ainsi ?
11. a. Établir : $\forall P \in E, \quad \varphi(T(P), P) \geq 0.$
b. Déterminer l'ensemble des polynômes P de E tels que $\varphi(T(P), P) = 0.$

PARTIE IV : Retour sur l'exemple de la partie I

On conserve les notations des parties II et III et on suppose dans cette partie que $n = 2$.

12. Quelle est la matrice de T dans la base \mathcal{B} de E ?
13. En utilisant les résultats obtenus dans la question 3 de la partie I, déterminer une base orthonormale \mathcal{C} de E pour le produit scalaire φ , formée de vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de T dans l'ordre croissant.
14. Déterminer, par sa matrice dans la base \mathcal{C} de E , un endomorphisme V de E , symétrique pour le produit scalaire φ , tel que

$$\begin{cases} V \circ V = T \\ \forall P \in E, \quad \varphi(V(P), P) \geq 0 \end{cases}.$$

PROBLÈME 2

On définit la fonction réelle H d'une variable réelle x par : $H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt$.

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

PARTIE I : Premières propriétés de la fonction H

- Justifier que la fonction H est définie sur I .
- Montrer que H est décroissante sur I .
- Calculer $H(1)$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $H(n) = 2n(H(n) - H(n+1))$.
En déduire une expression de $H(n+1)$ en fonction de n et de $H(n)$.
 - Écrire un programme Scilab qui, étant donné un entier n de \mathbb{N}^* , renvoie la valeur de $H(n)$.
 - Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, H(n) = \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}$.

PARTIE II : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$

- Montrer que la fonction $\varphi : u \mapsto \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
Préciser $\varphi^{-1}(0)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(t)$.
 - A l'aide du changement de variables $t = \varphi(u)$, montrer :

$$\forall x \in I, H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} du.$$

- Justifier : $\forall u \in [0; +\infty[, e^u \leq e^u + e^{-u} \leq 2e^u$.
 - En déduire : $\forall x \in I, \frac{1}{2x-1} \leq H(x) \leq \frac{4^x}{2(2x-1)}$.
- Déterminer la limite de H en $\frac{1}{2}$ et un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

PARTIE III : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

- Montrer : $\forall u \in [0; 1], \ln(1+u) \geq \frac{u}{2}$.
 - A l'aide d'une loi normale bien choisie, montrer que, pour tout x de I , l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt^2/2} dt$ converge et donner sa valeur.

- c. En déduire : $\forall x \in I, 0 \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \int_0^1 e^{-xt^2/2} dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$
- d. Montrer : $\forall x \in I, 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt \leq \frac{1}{2x-1}.$
- e. En déduire la limite de H en $+\infty$.
8. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(H(n)) + \frac{\ln(n)}{2}.$
- a. Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
On pourra utiliser le résultat obtenu à la question **3.b**.
- b. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.
- c. En déduire l'existence d'un réel K strictement positif tel que : $H(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}.$
9. Donner enfin un équivalent simple de $H(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$ à l'aide de K .

PARTIE IV : Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{2}{\pi(1+t^2)} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

10. Montrer que f est une densité.
11. On considère une variable aléatoire X à densité, de densité f .
- a. Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
- b. La variable X admet-elle une espérance ? une variance ?
12. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à densité, à valeurs strictement positives, mutuellement indépendantes, dont chacune a pour densité f .
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Z_n = \frac{n}{M_n}.$
- a. Déterminer, pour tout n de \mathbb{N}^* , la fonction de répartition F_{M_n} de M_n .
- b. Justifier : $\forall u \in]0; +\infty[, \text{Arctan}(u) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}$
et $\text{Arctan}(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u.$
- c. Montrer alors, pour tout n de \mathbb{N}^* : $\forall x \in]0; +\infty[, \mathbf{P}(Z_n \leq x) = 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n.$
- d. En déduire que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on reconnaîtra la loi.