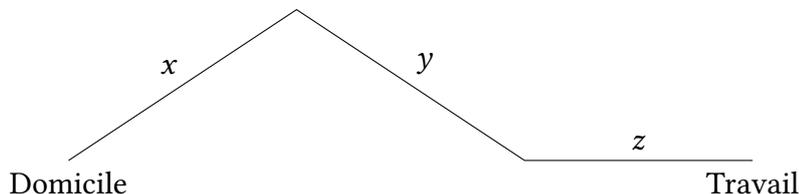


Partie 1 - Raisonnement logique

EXERCICE 1 : VFVF

Un rapide schéma permet de résumer et simplifier le trajet de Pierre. On note x , y et z les sommes respectives des montées, des descentes et des plats du parcours.



Les montées se font à 10 km/h, les descentes à 30 km/h et les plats à 15 km/h.

En utilisant la formule $v = \frac{d}{t} \iff t = \frac{d}{v}$, on peut découper le trajet de Pierre de la façon suivante :

- Dans le sens domicile-travail, le temps de parcours est donné par : $\frac{x}{10} + \frac{y}{30} + \frac{z}{15}$.
- Dans le sens travail-domicile, on a : $\frac{z}{15} + \frac{y}{10} + \frac{x}{30}$.

On sait par ailleurs que Pierre a 2 heures de trajet aller-retour par jour, il vient donc l'égalité :

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{10} + \frac{y}{30} + \frac{z}{15}\right) + \left(\frac{z}{15} + \frac{y}{10} + \frac{x}{30}\right) &= 2 \iff \frac{x \times 3}{10 \times 3} + \frac{y}{30} + \frac{z \times 2}{15 \times 2} + \frac{z \times 2}{15 \times 2} + \frac{y \times 3}{10 \times 3} + \frac{x}{30} = \frac{2 \times 30}{1 \times 30} \\ &\iff 3x + y + 2z + 2z + 3y + x = 60 \\ &\iff 4x + 4y + 4z = 60 \\ &\iff \boxed{x + y + z = 15} \quad \text{en divisant chaque membre par 4} \end{aligned}$$

Item A : Vrai

Si $x = y$, le temps à l'aller est : $\frac{x \times 3}{10 \times 3} + \frac{y}{30} + \frac{z \times 2}{15 \times 2} = \frac{3x}{30} + \frac{x}{30} + \frac{2z}{30} = \frac{4x + 2z}{30}$ heures.

Le temps au retour est : $\frac{z \times 2}{15 \times 2} + \frac{y \times 3}{10 \times 3} + \frac{x}{30} = \frac{2z}{30} + \frac{3x}{30} + \frac{x}{30} = \frac{4x + 2z}{30}$ heures.

Item B : Faux

D'après l'égalité $x + y + z = 15$, la somme des kilomètres en montées, descentes et plats est égale à 15 et est donc inférieure à 16 kilomètres.

Item C : Vrai

Si $x = 4$ et $y = 8$ alors il vient : $x + y + z = 15 \iff 4 + 8 + z = 15 \iff z = 3$.

A l'aller, Pierre effectue donc le trajet en un temps égal à :

$$\frac{4}{10} + \frac{8}{30} + \frac{3}{15} = \frac{12}{30} + \frac{8}{30} + \frac{6}{30} = \frac{26}{30} = \frac{52}{60} \text{ heures soit 52 minutes}$$

S'il met 52 minutes à l'aller, il mettra $120 - 52 = 68$ minutes au retour, soit 16 minutes de plus.

Item D : Faux

Si $x = 5$ et $y = 7$ alors on a $x + y + z = 15 \iff 5 + 7 + z = 15 \iff z = 3$ et son temps de trajet sur le plat à l'aller est donc $\frac{3}{15} = \frac{12}{60}$ heures soit 12 minutes.

≡ EXERCICE 2 : VFVF

Posons les événements suivants :

- S : « Pierre fait du sport » ;
- P : « Pierre postule pour une classe préparatoire » ;
- A : « Pierre a une activité associative ».

Et \bar{S} , \bar{P} , \bar{A} leurs événements contraires associés.

Pour chaque déclaration de Pierre, **celui-ci ment une seule fois et une seule**. Nous allons donc faire la supposition qu'il ment sur un certain événement de sa première déclaration et observer la cohérence de son propos dans sa deuxième déclaration. Pierre affirme : $S - P - \bar{A}$ et $\bar{S} - \bar{A}$.

Scénario 1 : Supposons qu'il ment quand il dit qu'il fait du sport.

S	P	\bar{A}	alors	\bar{S}	\bar{A}	→ impossible
Ment	Dit vrai	Dit vrai		Dit vrai	Dit vrai	

Scénario 2 : Supposons qu'il ment quand il dit qu'il postule pour une classe préparatoire.

S	P	\bar{A}	alors	\bar{S}	\bar{A}	→ possible
Dit vrai	Ment	Dit vrai		Ment	Dit vrai	

Scénario 3 : Supposons qu'il ment quand il dit qu'il n'a pas d'activité associative.

S	P	\bar{A}	alors	\bar{S}	\bar{A}	→ impossible
Dit vrai	Dit vrai	Ment		Ment	Ment	

La seule situation envisageable est donc celle du scénario 2 dans lequel Pierre :

- fait du sport ;
- ne postule pas pour une classe préparatoire car il ment quand il dit qu'il y postule ;
- n'a pas d'activité associative.

Soit les événements : $S - \bar{P} - \bar{A}$

🔍 Item A : Vrai

D'après le scénario 2, si Pierre dit qu'il ne fait pas de sport et qu'il postule pour une classe préparatoire alors on a $\bar{S} - P$ et il ment effectivement deux fois.

🔍 Item B : Faux

D'après le scénario 2, Pierre fait du sport.

🔍 Item C : Vrai

D'après le scénario 2, Pierre fait effectivement du sport et n'a pas d'activité associative.

🔍 Item D : Faux

D'après le scénario 2, Pierre ne postule pas pour une classe préparatoire.

≡ EXERCICE 3 : VVFFV

Posons P_e , P_i et P_a les primes de transport respective de Perrine, Pierre et Paul et traduisons les affirmations de l'énoncé en équations.

La prime de Paul vaut 3 € de moins que 7 fois celle de Perrine se traduit par : $P_a = 7P_e - 3$.

La prime de Pierre vaut 14 € de moins que 3 fois celle de Paul se traduit par : $P_i = 3P_a - 14$.

La prime de Pierre vaut 13 € de plus que 12 fois celle de Perrine se traduit par : $P_i = 12P_e + 13$.

Il vient alors le système à résoudre :

$$\begin{aligned} \begin{cases} P_a = 7P_e - 3 \\ P_i = 3P_a - 14 \\ P_i = 12P_e + 13 \end{cases} &\iff \begin{cases} P_a = 7P_e - 3 \\ 12P_e + 13 = 3P_a - 14 \\ P_i = 12P_e + 13 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} P_a - 7P_e = -3 & (e_1) \\ -3P_a + 12P_e = -27 & (e_2) \\ P_i = 12P_e + 13 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} P_a - 7P_e = -3 \\ -21P_e + 12P_e = -9 + (-27) & (3 \times e_1 + e_2) \\ P_i = 12P_e + 13 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} P_a - 7P_e = -3 \\ -9P_e = -36 \\ P_i = 12P_e + 13 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} P_a = 7 \times 4 - 3 \\ P_e = 4 \\ P_i = 12 \times 4 + 13 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} P_a = 25 \\ P_e = 4 \\ P_i = 61 \end{cases} \end{aligned}$$

Perrine, Pierre et Paul perçoivent donc des primes de transport mensuelle respectivement égales à 4 €, 61 € et 25 €.

🔹 Item A : Vrai

La moyenne de la prime mensuelle de transport des trois salariés est de : $\frac{4 + 61 + 25}{3} = \frac{90}{3} = 30$ €.

🔹 Item B : Vrai

La médiane est la **valeur centrale de la série ordonnée** des primes de transport soit : $4 - \boxed{25} - 61$.

🔹 Item C : Faux

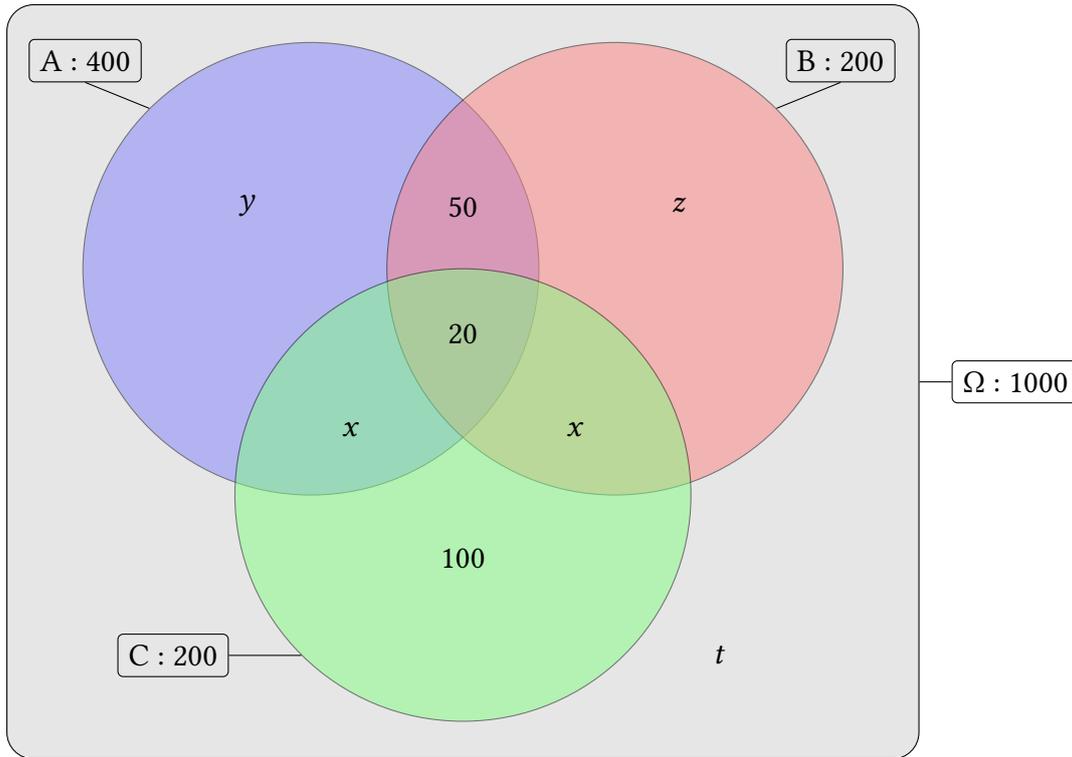
La prime mensuelle de transport de Perrine étant de 4 €, elle est donc inférieure à 5 €.

🔹 Item D : Vrai

La prime mensuelle de transport de Pierre étant de 61 €, elle est bien supérieure à 60 €.

≡ EXERCICE 4 : FFFV

L'énoncé permet de construire le diagramme de Venn ci-dessous :



🔍 Item A : Faux

Le diagramme permet de poser l'équation : $x + 20 + x + 100 = 200 \iff 2x = 80 \iff x = 40$

🔍 Item B : Faux

Sachant que $x = 40$, on a : $50 + 20 + x + z = 200 \iff z = 200 - 50 - 20 - 40 \iff z = 90$.

🔍 Item C : Faux

Les salariés ayant suivis au moins deux formations, c'est-à-dire deux ou trois, sont au nombre de : $x + 50 + x + 20 = 40 + 50 + 40 + 20 = 150$.

🔍 Item D : Vrai

Déterminons y : $y + 50 + 20 + x = 400 \iff y = 400 - 50 - 20 - 40 \iff y = 290$.

Le nombre de salariés t n'ayant suivi aucune formation est donc :

$$t = 1000 - (y + 50 + z + 20 + x + x + 100) \iff t = 1000 - (290 + 50 + 90 + 20 + 2 \times 40 + 100) \\ \iff t = 370$$

≡ EXERCICE 5 : VVFV

Un code de carte bleue est une liste de 4 éléments choisis parmi 10 chiffres de 0 à 9 avec répétitions possibles. Le nombre total de listes possibles est donc de $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000$.

➤ *Item A : Vrai*

Si le code est un nombre divisible par 5 alors son dernier chiffre est un 0 ou un 5. On peut donc choisir :

- le premier chiffre parmi 10 possibilités (chiffre de 0 à 9) ;
- le deuxième chiffre parmi 10 possibilités ;
- le troisième chiffre parmi 10 possibilités ;
- le quatrième chiffre en revanche ne peut être choisi que parmi 2 possibilités (le 0 ou le 5).

Il y a donc $10 \times 10 \times 10 \times 2 = 2\,000$ combinaisons possibles.

➤ *Item B : Vrai*

La plage de codes possibles s'étend de 0000 à 9999. Un nombre pair étant un nombre divisible par 2, 0000 est donc un nombre pair et il y a bien $\frac{10\,000}{2} = 5\,000$ nombres pairs et 5 000 nombres impairs.

➤ *Item C : Faux*

Si le voleur sait que les deux premiers chiffres sont identiques alors on peut choisir :

- le premier chiffre parmi 10 possibilités (chiffre de 0 à 9) ;
- le deuxième en revanche doit être identique au premier donc il n'y a qu'une seule et unique possibilité ;
- le troisième parmi 10 possibilités ;
- le quatrième parmi 10 possibilités.

Il y a donc $10 \times 1 \times 10 \times 10 = 1\,000$ combinaisons possibles.

➤ *Item D : Vrai*

Si le voleur connaît un chiffre du code et son emplacement exacte alors les codes deviennent pour lui des combinaisons avec répétitions de 3 éléments choisis parmi 10 et le nombre de codes possibles se réduit à $10^3 = 1\,000$.

Partie 2 - Raisonnement mathématique

≡ EXERCICE 6 : VFVV

Soit la fonction f définie par : $\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$.

🔍 Item A : Vrai

Cherchons la valeur interdite de f . Le nombre $f(x)$ existe si et seulement si $x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$.
Par conséquent $f(x)$ est définie pour tout réel x différent de 1.

🔍 Item B : Faux

$$\begin{aligned} f(x) = 4 &\iff \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = -4 \\ &\iff x^2 - 4x + 3 = -4(x - 1) \quad \text{avec } x \neq 1 \\ &\iff x^2 - 4x + 3 = -4x + 4 \\ &\iff x^2 - 1 = 0 \\ &\iff (x - 1)(x + 1) = 0 \\ &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1 \end{aligned}$$

Or $x = 1$ est une valeur interdite donc l'équation $f(x) = -4$ admet une seule et unique racine qui est 1.

🔍 Item C : Vrai

Étudions les variations de la fonction f . Pour cela, dérivons $f(x)$ en utilisant la formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Pour tout x différent de 1, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 - 4x + 3)'(x - 1) - (x^2 - 4x + 3)(x - 1)'}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{(2x - 4)(x - 1) - (x^2 - 4x + 3) \times 1}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2x - 4x + 4 - x^2 + 4x - 3}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

🔍 Item D : Vrai

Cherchons à factoriser $x^2 - 4x + 3$. Pour cela, on calcule le discriminant du polynôme :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 - 12 = 4 > 0$. On a donc :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2}{2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

On obtient alors la factorisation $x^2 - 4x + 3 = a(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1)(x - 3)$.

Par conséquent, on a pour tout x différent de 1 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} \\ &= \frac{\cancel{(x - 1)}(x - 3)}{\cancel{x - 1}} \\ &= \boxed{x - 3} \end{aligned}$$

≡ EXERCICE 7 : VFFF

🔍 Item A : Vrai

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ et $e - 2 > 0$ donc on peut faire apparaître les valeurs d'annulations de la fonction f dans le tableau de variations :

x	0	α	$\frac{1}{e}$	β	e	3	5	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
f	7	0	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	0	3	$f(3)$	$e - 2$	2

L'équation $f(x) = 0$ admet donc bien deux solutions réelles distinctes α et β .

🔍 Item B : Faux

D'après le tableau de variations, 0 est une valeur interdite de la fonction car on observe une double barre en 0. Par conséquent $f(0)$ n'existe pas car f n'est pas définie en 0. En revanche, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 7$.

🔍 Item C : Faux

L'équation de la tangente en 3 est donné par la formule $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$. **On retiendra une notion fondamentale qui est évaluée à chaque session du concours** et qu'il faut donc en permanence garder à l'esprit : **c'est que le coefficient directeur de cette tangente est $f'(3)$** .

D'après le tableau de signes de la dérivée $f'(x)$, on note que $f'(3) < 0$ puisque $e < 3 < 5$ et il est donc impossible que $f'(3) = 2$.

🔍 Item D : Faux

D'après le tableau de variations, pour tout réel $x \in]\alpha; \beta[$, $f(x) < 0$.

≡ EXERCICE 8 : VVVF

🔍 Item A : Vrai

$f(x)$ existe si et seulement si $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} > 0$ car $\ln u(x)$ existe si et seulement si $u(x) > 0$. Or $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est du signe de $e^x - 1$ car $e^x + 1$ est toujours positif :

$$\begin{aligned} e^x - 1 > 0 &\iff e^x > 1 \\ &\iff \ln e^x > \ln 1 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.

On peut aussi dresser un tableau de signes pour déterminer sur quel intervalle la quantité $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est **strictement positive**.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+
$e^x + 1$	+		+
$\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$	-	0	+

C'est sur l'intervalle $]0; +\infty[$ que $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ est strictement positive, par conséquent, $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.

🔍 Item B : Vrai

On utilise ici conjointement les formules $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

On obtient alors pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)'}{\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)} \\ &= \frac{(e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)}{\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)} \\ &= \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} \times \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \\ &= \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)(e^x + 1)} \times \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \\ &= \frac{2e^x}{(e^x + 1)(e^x - 1)} \\ &= \boxed{\frac{2e^x}{e^{2x} - 1}} \end{aligned}$$

► **Item C : Vrai**

Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}e^x - 1 < e^x + 1 &\iff \frac{e^x - 1}{e^x + 1} < 1 \\ &\iff \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) < \ln(1) \\ &\iff f(x) < 0\end{aligned}$$

► **Item D : Faux**

D'après le résultat précédent, l'équation $f(x) = 1$ n'a aucune solution puisque $f(x) < 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

≡ EXERCICE 9 : FFVV

🔹 Item A : Faux

$\ln u(x)$ existe si et seulement si $u(x) > 0$. Or $e^x + e^{-x} > 0$ pour tout réel x , par conséquent :

$$\boxed{D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[.}$$

🔹 Item B : Faux

Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}} \\ &= \frac{e^x + (-1) \times e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= \boxed{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} \end{aligned}$$

🔹 Item C : Vrai

Par définition, le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a est le nombre dérivé $f'(a)$. Or :

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} \\ &= \frac{e^{-a} \left(\frac{e^a}{e^{-a}} - 1 \right)}{e^{-a} \left(\frac{e^a}{e^{-a}} + 1 \right)} \\ &= \frac{e^{-a} (e^{a-(-a)} - 1)}{e^{-a} (e^{a-(-a)} + 1)} \\ &= \boxed{\frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1}} \end{aligned}$$

🔹 Item D : Vrai

C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées si et seulement si f est une fonction paire c'est-à-dire si on a $f(-x) = f(x)$.

Vérifions :

$$f(-x) = \ln(e^{(-x)} + e^{-(-x)}) = \ln(e^{-x} + e^{+x}) = f(x)$$

Donc f est paire et sa courbe représentative admet bien l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

≡ EXERCICE 10 : VVFV

🔍 Item A : Vrai

$$\begin{aligned}P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\&= 1 - P(X = 1) \\&= 1 - (1 - p)^{1-1} \times p \\&= 1 - (1 - p)^0 \times p \quad \text{avec } a^0 = 1 \\&= 1 - 1 \times p \\&= \boxed{1 - p}\end{aligned}$$

🔍 Item B : Vrai

$$\begin{aligned}P(X \leq 2) &= P(X = 1) + P(X = 2) \\&= (1 - p)^0 \times p + (1 - p)^1 \times p \\&= 1 \times p + (1 - p) \times p \quad \text{on factorise par } p \\&= p(1 + 1 - p) \\&= \boxed{p(2 - p)}\end{aligned}$$

🔍 Item C : Faux

$$\begin{aligned}P(1 \leq X \leq n + 1) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + \dots + P(X = n + 1) \\&= (1 - p)^0 \times p + (1 - p)^1 \times p + (1 - p)^2 \times p + \dots + (1 - p)^n \times p \quad \text{on factorise par } p \\&= p \underbrace{\left(1 + (1 - p)^1 + (1 - p)^2 + \dots + (1 - p)^n\right)}_{\text{somme de } n + 1 \text{ termes d'une suite géométrique de raison } 1 - p} \\&= \boxed{p \left(1 \times \frac{1 - (1 - p)^{n+1}}{1 - p}\right)}\end{aligned}$$

🔍 Item D : Vrai

$$\begin{aligned}f(p) &= \frac{1}{2}P(X = 2) + 1 \\&= \frac{1}{2}(1 - p)p + 1 \\&= \frac{1}{2}(p - p^2) + 1 \\&= \boxed{-\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p + 1}\end{aligned}$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} > 0$$

Donc f admet bien deux racines distinctes.

Partie 3 - Problème mathématique

≡ EXERCICE 11 : VVFV

🔍 Item A : Vrai

Mois	x - Numéro du mois	y - Quantité vendue en tonnes
Janvier	1	$103 = 3 \times 1 + 100$
Février	2	$106 = 3 \times 2 + 100$
Mars	3	$109 = 3 \times 3 + 100$
Avril	4	$112 = 3 \times 4 + 100$
Mai	5	$115 = 3 \times 5 + 100$
Juin	6	$118 = 3 \times 6 + 100$

On constate effectivement que $y = 3x + 100$.

🔍 Item B : Vrai

Le numéro du mois de décembre étant $x = 12$ et en utilisant la fonction mis en évidence précédemment, on obtient que la quantité de clous vendue en décembre est bien de $f(12) = 3 \times 12 + 100 = 136$ tonnes.

🔍 Item C : Faux

Au début du mois de juillet, on considère que la quantité de clous vendue est celle de fin juin, soit 118 tonnes. À fin décembre, la quantité vendue est celle du mois de décembre, soit 136 tonnes. La variation de la quantité vendue entre ces deux dates est donc :

$$\frac{V_a - V_d}{V_d} \times 100 = \frac{136 - 118}{118} \times 100$$
$$\approx \boxed{+15,3\%} \neq 20\%$$

🔍 Item D : Vrai

Sur les six derniers mois de l'année, la moyenne des ventes mensuelles est de :

$$\frac{121 + 124 + 127 + 130 + 133 + 136}{6} = \boxed{128,5} > 125 \text{ tonnes}$$

≡ EXERCICE 12 : FVVV

🔍 Item A : Faux

$$\begin{aligned} Y(1) &= F(1,5) - F(0,5) \\ &= \left(\frac{3}{2} \times 1,5^2 + 100 \times 1,5 \right) - \left(\frac{3}{2} \times 0,5^2 + 100 \times 0,5 \right) \\ &= \frac{3}{2} (1,5^2 - 0,5^2) + 150 - 50 \\ &= \frac{3}{2} (1,5 - 0,5) (1,5 + 0,5) + 100 \\ &= \frac{3}{2} \times 1 \times 2 + 100 \\ &= \boxed{103} \end{aligned}$$

🔍 Item B : Vrai

$$\begin{aligned} Y(2) &= F(2,5) - F(0,5) \\ &= \left(\frac{3}{2} \times 2,5^2 + 100 \times 2,5 \right) - \left(\frac{3}{2} \times 0,5^2 + 100 \times 0,5 \right) \\ &= 209 \end{aligned}$$

$$\text{Et } Y(2) - Y(1) = 209 - 103 = \boxed{106}$$

🔍 Item C : Vrai

$Y(m)$ représente la quantité totale vendue du 1^{er} au $m^{\text{ième}}$ mois. Ainsi, durant l'année écoulée, l'entreprise a vendu une quantité de clous égale à :

$$Y(12) = 103 + 106 + 109 + \dots + 136 = \boxed{1\,434 \text{ tonnes}}$$

Que l'on peut également calculer avec la formule précédente :

$$\begin{aligned} Y(12) &= F(12,5) - F(0,5) \\ &= \left(\frac{3}{2} \times 12,5^2 + 100 \times 12,5 \right) - \left(\frac{3}{2} \times 0,5^2 + 100 \times 0,5 \right) \\ &= \boxed{1\,434} \end{aligned}$$

🔍 Item D : Vrai

Chaque kilogramme de clous étant vendu 1 € soit 1 000 € la tonne, le montant total des ventes pour l'année écoulée est donc de $1\,434 \times 1\,000 = 1\,434\,000$ € qui est bien supérieur à 1 400 000 €.

≡ EXERCICE 13 : VVFV

On définit la notion d'élasticité-prix notée E par :

$$E = \frac{\frac{Q_{\text{vendue}} - Q_{\text{attendue}}}{Q_{\text{attendue}}}}{\frac{P_{\text{vendu}} - P_{\text{attendu}}}{P_{\text{attendu}}}} \quad \text{où } Q \text{ est la quantité et } P \text{ le prix}$$

🔍 Item A : Vrai

On calcule d'abord la quantité attendue si l'entreprise n'avait pas modifié son prix. En janvier de l'année suivante (13^{ième} mois de l'étude), elle aurait pu vendre $f(13) = 3 \times 13 + 100 = 139$ tonnes de clous. Or elle n'en a vendu que 111,2 tonnes suite à son augmentation de prix. La variation relative de la demande est donc de :

$$\frac{Q_{\text{vendue}} - Q_{\text{attendue}}}{Q_{\text{attendue}}} = \frac{111,2 - 139}{139} = -0,2 \text{ soit } -20\%$$

🔍 Item B : Vrai

Calculons la variation relative du prix :

$$\frac{P_{\text{vendu}} - P_{\text{attendu}}}{P_{\text{attendu}}} = \frac{1,1 - 1}{1} = 0,1$$

L'élasticité-prix est donc $E = \frac{-0,2}{0,1} = -2$.

🔍 Item C : Faux

Sans augmentation de son prix, l'entreprise aurait vendu 139 tonnes de clous à 1 000 € la tonne et aurait donc réalisé un chiffre d'affaires de $139 \times 1\,000 = 139\,000$ € au mois de janvier.

Ayant augmenté son prix, elle ne vend plus que 111,2 tonnes de clous à 1 100 € la tonne et son chiffre d'affaires est désormais de $111,2 \times 1,1 = 122\,320$ €.

Si elle n'avait pas augmenté son prix, son chiffre d'affaires aurait donc été supérieur de $139\,000 - 122\,320 = 16\,680$ € qui est inférieur à 27 800.

🔍 Item D : Vrai

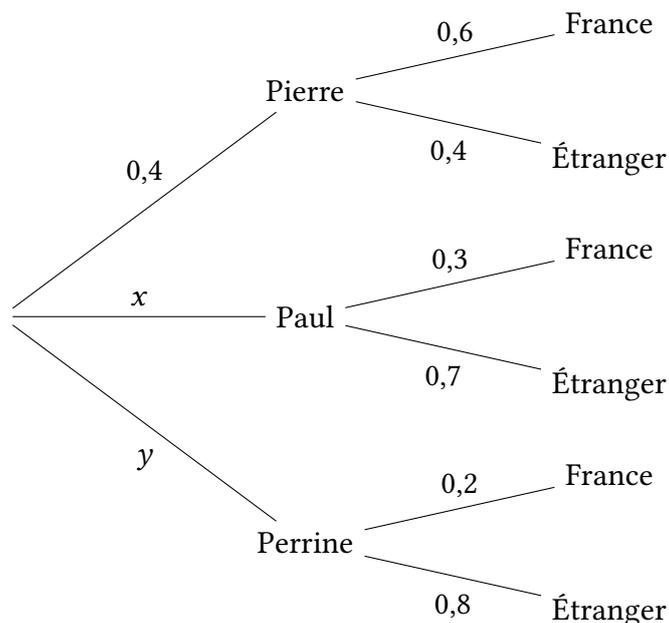
$$E > 0 \iff \begin{cases} \frac{Q_{\text{vendue}} - Q_{\text{attendue}}}{Q_{\text{attendue}}} > 0 \quad \text{ET} \quad \frac{P_{\text{vendu}} - P_{\text{attendu}}}{P_{\text{attendu}}} > 0 \\ \text{OU} \\ \frac{Q_{\text{vendue}} - Q_{\text{attendue}}}{Q_{\text{attendue}}} < 0 \quad \text{ET} \quad \frac{P_{\text{vendu}} - P_{\text{attendu}}}{P_{\text{attendu}}} < 0 \end{cases}$$

Ainsi, si $E > 0$ et si P_{vendu} augmente alors $\frac{P_{\text{vendu}} - P_{\text{attendu}}}{P_{\text{attendu}}} > 0$ et par conséquent on doit avoir

$\frac{Q_{\text{vendue}} - Q_{\text{attendue}}}{Q_{\text{attendue}}} > 0$. Pour cela, il faut que $Q_{\text{vendue}} - Q_{\text{attendue}} > 0$ c'est-à-dire $Q_{\text{vendue}} > Q_{\text{attendue}}$.

≡ EXERCICE 14 : VVFV

Dressons un arbre de probabilités de la situation :



🔍 Item A : Vrai

On sait que les 80% des quantités vendues par Perrine à l'étranger représentent 20% des quantités totales vendues par l'entreprise, ce qui signifie que :

$$\begin{aligned} 0,8 \times y = 0,2 &\iff y = \frac{0,2}{0,8} \\ &\iff y = 0,25 \end{aligned}$$

On a alors $x = 1 - 0,25 - 0,4 = 0,35$. Paul a par conséquent vendu 35% des quantités totales vendues par l'entreprise.

🔍 Item B : Vrai

Sur le marché français, Pierre a vendu $0,4 \times 0,6 = 0,24$ soit 24% des quantités totales de l'entreprise. Sur le marché étranger, Perrine a vendu $0,25 \times 0,8 = 0,2$ soit 20% des quantités totales de l'entreprise. Pierre a donc vendu plus de clous que Perrine sur le marché étranger.

🔍 Item C : Faux

En France, l'entreprise a vendu $0,4 \times 0,6 + 0,35 \times 0,3 + 0,25 \times 0,2 = 0,395$ soit 39,5% de sa production de clous et par conséquent elle en a vendu 60,5% à l'étranger. Elle a donc vendu plus de clous sur le marché étranger qu'en France.

🔍 Item D : Vrai

Parmi l'ensemble des clous vendus à l'étranger, Perrine en a vendu une proportion égale à :

$$p_{\text{Étranger}}(\text{Perrine}) = \frac{p(\text{Perrine et Étranger})}{p(\text{Étranger})} = \frac{0,25 \times 0,8}{0,605} \approx 0,3306 < \frac{1}{3}$$

≡ EXERCICE 15 : FFFF

🔍 Item A : Faux

On sait que $Fixe_{Pierre}$ est 20% plus élevé que $Fixe_{Paul}$ c'est-à-dire $Fixe_{Pierre} = 1,2 \times Fixe_{Paul}$:

$$\begin{aligned} Salaire_{Pierre} &= Fixe_{Pierre} + (Ventes_Totales_{Pierre} \times \alpha) \\ &= 1,2 \times Fixe_{Paul} + (350 + 250) \times 40 \\ &= 1,2 \times 10\,000 + 600 \times 40 \\ &= \boxed{36\,000 \text{ €}} \end{aligned}$$

🔍 Item B : Faux

On sait que $Salaire_{Pierre} = Salaire_{Paul}$ et en notant (e) l'égalité :

$$Salaire_{Paul} = Fixe_{Paul} + (Ventes_France_{Paul} \times \alpha) + (Ventes_Etranger_{Paul} \times \beta)$$

On peut isoler β dans (e) :

$$\begin{aligned} (e) &\iff Salaire_{Paul} - Fixe_{Paul} - (Ventes_France_{Paul} \times \alpha) = (Ventes_Etranger_{Paul} \times \beta) \\ &\iff \beta = \frac{Salaire_{Paul} - Fixe_{Paul} - (Ventes_France_{Paul} \times \alpha)}{Ventes_Etranger_{Paul}} \\ &\iff \beta = \frac{Salaire_{Pierre} - 10\,000 - 150 \times 40}{400} \\ &\iff \beta = \frac{36\,000 - 10\,000 - 6\,000}{400} \\ &\iff \boxed{\beta = 50} \end{aligned}$$

🔍 Item C : Faux

Si $Fixe_{Perrine} = 15\,000$ alors :

$$\begin{aligned} Salaire_{Perrine} &= Fixe_{Perrine} + (Ventes_France_{Perrine} \times 0,1 \times \alpha^2) + (Ventes_Etranger_{Perrine} \times \beta) \\ &= 15\,000 + 50 \times 0,1 \times 40^2 + 300 \times 50 \\ &= \boxed{38\,000 \text{ €}} \end{aligned}$$

Le salaire de Perrine est par conséquent différent de celui de Paul, ce dernier étant le même que Pierre à savoir 36 000 €.

🔍 Item D : Faux

Si $Fixe_{Perrine} = 3\,000$ et $\alpha_{Perrine} = 66$ alors :

$$\begin{aligned} Salaire_{Perrine} &= Fixe_{Perrine} + (Ventes_France_{Perrine} \times 0,1 \times \alpha^2) + (Ventes_Etranger_{Perrine} \times \beta) \\ &= 3\,000 + 50 \times 0,1 \times 66^2 + 300 \times 50 \\ &= \boxed{39\,780 \text{ €}} \neq Salaire_{Pierre} \end{aligned}$$