Mathématiques-Corrigés

Dérivées

1. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies par

$$a)f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 3\right) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$b)g(x) = \frac{1}{x}e^{-2x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*$$

Corrigé :

(a) On a une dérivée de la forme $(\ln(w))' = \frac{w'}{w}$ avec $w(x) = x^2 - 2x + 3$ et $w'(x) = 2x - 2$

On obtient :

$\boxed{f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+3}}$

(b) On a une dérivée de la forme $(uv)' = u'v + uv'$ avec :

— $u(x) = \frac{1}{x}$ et $u'(x) = \frac{-1}{x^2}$
— $v(x) = e^{-2x}$ et $v'(x) = -2e^{-2x}$ car $(e^w)' = w'e^w$ avec $w(x) = -2x$ et $w'(x) = -2$

On obtient :

$\boxed{g'(x) = -(\frac{e^{-2x}}{x^2} + \frac{2e^{-2x}}{x})}$

2. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$a)f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$$

$$b)g(x) = 2x\ln\left(x^2 + 1\right)$$

Corrigé :

(a) On a une dérivée de la forme $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec :

— $u(x) = 2x^2 + 1 \quad \text{et} \quad u'(x) = 4x$

On obtient :

$\boxed{f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}}$

(b) On a une dérivée de la forme $(uv)' = u'v + uv'$ avec :

— $u(x) = 2x \quad \text{et} \quad u'(x) = 2$
— $v(x) = \ln(x^2+1) \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ car $(\ln(w))' = \frac{w'}{w}$ avec $w(x) = x^2 + 1$ et $w'(x) = 2x$

On obtient :

$\boxed{g'(x) = 2\ln(x^2+1) + \frac{4x^2}{x^2+1}}$

3. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies par

$$a)f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3x+2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{1;2\}$$

$$b)g(x) = \left(2x^3 - x + 1\right)^{2020} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Corrigé :

(a) On a une dérivée de la forme $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

— $u(x) = x^2 + 1 \quad \text{et} \quad u'(x) = 2x$
— $v(x) = x^2 - 3x - 2 \quad \text{et} \quad v'(x) = 2x - 3$

On obtient :

$f'(x) = \frac{2x(x^2-3x-2)-(x^2+1)(2x-3)}{(x^2-3x-2)^2}$

$\boxed{f'(x) = \frac{-3x^2-6x+3}{(x^2-3x-2)^2}}$

(b) On a une dérivée de la forme $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ avec $n = 2020$ et :

— $u(x) = 2x^3 - x + 1$ et $u'(x) = 6x^2 - 1$

On obtient :

$\boxed{g'(x) = 2020(6x^2 - 1)(2x^3 - x + 1)^{2019}}$

4. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$a) f(x) = xe^{1/x} + 3\sqrt{x^2+1}$$

$$b) g(x) = \Big(\sin(x) + \cos(x)\Big)^{20}$$

Corrigé :

(a) La dérivée d'une somme est la somme des dérivées. Pour le premier terme, on a une dérivée de la forme $(uv)' = u'v + uv'$ avec :

— $u(x) = x$ et $u'(x) = 1$
— $v(x) = e^{\frac{1}{x}}$ et $v'(x) = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ car $(e^w)' = w'e^w$ avec $w(x) = \frac{1}{x}$ et $w'(x) = \frac{-1}{x^2}$

D'où :

$(xe^{\frac{1}{x}})' = e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = e^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{x})$

Pour le second terme on a une dérivée de la forme $3(\sqrt{u})' = \frac{3u'}{2\sqrt{u}}$ avec :

— $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$

On obtient :

$(3\sqrt{x^2+1})' = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$

Finalement :

$\boxed{f'(x) = e^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{x}) + \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}}$

(b) On a une dérivée de la forme $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ avec $n = 20$ et :

— $u(x) = \sin(x) + \cos(x)$ et $u'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

On obtient :

$$\boxed{g'(x) = 20\Big(\cos(x) - \sin(x)\Big)\Big(\sin(x) + \cos(x)\Big)^{19}}$$

5. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies par

$$a) f(x) = e^{2x}\ln(2x+1) \quad \text{pour tout } x > \frac{1}{2}$$

$$b) g(x) = \Big(\ln(x^2+1)\Big)^{18} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Corrigé :

(a) On a une dérivée de la forme $(uv)' = u'v + uv'$ avec :

— $u(x) = e^{2x}$ et $u' = 2e^{2x}$ car $(e^w)' = w'e^w$ avec $w(x) = 2x$ et $w'(x) = 2$
— $v(x) = \ln(2x+1)$ et $v'(x) = \frac{2}{2x+1}$ car $(\ln(w))' = \frac{w'}{w}$ avec $w(x) = 2x+1$ et $w'(x) = 2$

On obtient :

$$\boxed{f'(x) = 2e^{2x}\ln(2x+1) + \tfrac{2e^{2x}}{2x+1}}$$

(b) On a une dérivée de la forme $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ avec $n = 18$ et :

— $u(x) = \ln(x^2+1)$ et $u'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ car $(\ln(w))' = \frac{w'}{w}$ avec $w(x) = x^2+1$ et $w'(x) = 2x$

On obtient :

$$\boxed{g'(x) = \tfrac{36x}{x^2+1}(\ln(x^2+1))^{17}}$$

Convexité-Points d'inflexion

6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+1)e^x$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

(a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et préciser les éventuels points d'inflexion pour la courbe C_f.

Corrigé

(a) $f = uv$ donc $f' = u'v + v'u$

$$f'(x) = 2x \times e^x + (x^2+1) \times e^x$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = e^x(x^2+2x+1)$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = e^x(x+1)^2$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) \geq 0$ donc $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}$

(b) Pour étudier la convexité de f, on établit le signe de la dérivée seconde f''.
$f' = uv$ où $u(x) = (x+1)^2$ et $v(x) = e^x$, donc $f'' = u'v + v'u$. On a alors :

$$f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x+1)e^x$$
$$\Leftrightarrow f''(x) = e^x(x^2+4x+3)$$

Comme pour tout réel x, $e^x > 0$, alors $f''(x)$ prend le signe de x^2+4x+3. On résout $x^2+4x+3 = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 3 \times 1 = 4 = 2^2$$

donc
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2}{2} = -1$
on obtient alors :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		*convexe*		*concave*		*convexe*	

Sur chacun des intervalles $]-\infty;-3]$ et $[-1;+\infty[$, $f'' \geqslant 0$ donc f est convexe sur ces intervalles.
Sur l'intervalle $[-3;-1]$, $f'' \leqslant 0$ donc f est concave sur cet intervalle.
Aux points d'abscisses $x = -3$ et $x = -1$, $f''(x)$ s'annule en changeant de signe, donc ces 2 points sont des points d'inflexion de la courbe de f.

7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} + x^2 - 4$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orhogonal.

(a) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit a un réel. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a.

(c) Déduire l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

(d) Montrer que pour tout réel x, $e^{-x} + x^2 - 4 \geqslant -x - 3$.

Corrigé :

(a) Pour tout réel x,

$$f'(x) = -e^{-x} + 2x$$

$$f''(x) = e^{-x} + 2$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ d'où $f''(x) > 0$ alors $\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}}$

(b) Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = (-e^{-a} + 2a)(x - a) + e^{-a} + a^2 - 4$$

$$\boxed{y = (2a - e^{-a})x + ae^{-a} - a^2 + e^{-a} - 4}$$

(c) Il suffit de remplacer a par 0 dans l'équation précédente. On obtient :

$$y_0 = (0 - e^0)x + 0 + e^0 - 4$$

$$y_0 = -x + 1 - 4$$

$$\boxed{y_0 = -x - 3}$$

(d) f étant convexe sur $\mathbb{R}$, C_f se trouve donc toujours au-dessus de ses tangentes et en particulier C_f est au-dessus de la tangente au point d'abscisse 0. On en déduit que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{e^{-x} + x^2 - 4 \geqslant -x - 3}$

8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^3 - 120x^2 + 3$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orhogonal.

(a) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et préciser les éventuels points d'inflexion pour la courbe C_f.

(b) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

(c) Montrer que pour tout réel $x \in [-4; 5]$, $x^4 - 2x^3 - 120x^2 + 3 \leqslant 3$.

Corrigé :

(a) Pour étudier la convexité de f, on établit le signe de sa dérivée seconde.
$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 240x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 240$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = 12(x^2 - x - 20)$$

On étudie le signe de $f''(x)$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \times 20 = 81 = 9^2$$

donc

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8}{2} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10}{2} = 5$$

On obtient :

x	$-\infty$		-4		5		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		*convexe*		*concave*		*convexe*	

Sur chacun des intervalles $]-\infty;-4]$ et $[5;+\infty[$, $f'' \geqslant 0$ donc f est convexe sur ces intervalles.
Sur l'intervalle $[-4;5]$, $f'' \leqslant 0$ donc f est concave sur cet intervalle.
Aux points d'abscissex $x = -4$ et $x = -5$, $f''(x)$ s'annule en changeant de signe, donc ces 2 points sont des points d'inflexion de la courbe de f.

(b) On a :

$$f(0) = 0 - 0 - 0 + 3 = 3$$

$$f'(0) = 0 - 0 - 0 = 0$$

L'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est donnée par :

$$y_0 = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y_0 = 3}$$

(c) f étant concave sur $[-4;5]$, C_f se trouve donc en-dessous de ses tangentes sur cet intervalle , en particulier C_f est en-dessous de la tangente au point d'abscisse 0. On en déduit que :

$\forall x \in [-4;5]$, $\boxed{x^4 - 2x^3 - 120x^2 + 3 \leqslant 3.}$

9. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orhogonal.

(a) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et préciser les éventuels points d'inflexion pour la courbe C_f.

(b) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

(c) Montrer que pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Corrigé :

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Sur $]0;+\infty[$ f'' est positive donc f est convexe.

(b) On a :

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$
$$f'(1) = 1 - 1 = 0$$

L'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1 est donnée par :

$$y_1 = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{y_1 = 2}$$

(c) f étant convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, C_f se trouve donc au-dessus de ses tangentes, on en déduit donc que :

$$f(x) \geq y_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \in]0;+\infty[\,,\ x + \tfrac{1}{x} \geq 2.}$$

Raisonnement par récurrence

10. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

Corrigé

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ la propriété : « $\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$ »

(a) Initialisation : comme il faut démontrer $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (donc à partir de $n=1$), on initialise à $n=1$.

Les deux membres de l'égalité donnée par $P(1)$ sont

$$\text{à gauche : } \frac{1}{1\times 3}=\frac{1}{3} \qquad \text{et à droite : } \frac{1}{2\times 1+1}=\frac{1}{3}$$

Ainsi, ils sont bien égaux et la propriété $P(1)$ est vraie.

(b) Hérédité : il faut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie : $\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

Il faut en déduire que $P(n+1)$ aussi est vraie :

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}$$

Or $\underbrace{\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}}_{\frac{n}{2n+1}}+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{n}{2n+1}+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

Il reste donc à montrer que : $\dfrac{n}{2n+1}+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{n+1}{2n+3}$.

Or $\dfrac{n}{2n+1}+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{n(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)}+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}$

et $\dfrac{n+1}{2n+3}=\dfrac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}$

Ainsi, on a bien $\dfrac{n}{2n+1}+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{n+1}{2n+3}$ et $P(n+1)$ est donc vraie si $P(n)$ l'est.

(c) Conclusion : on a montré d'une part que $P(1)$ est vraie, d'autre part que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

Cela démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

11. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$.

Corrigé

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ la propriété : « $1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$ »

(a) Initialisation : on initialise à $n = 1$ en montrant que $P(1)$ est vraie.
Les deux termes de l'égalité donnée par $P(1)$ sont

à gauche : $1^3 = 1$ et à droite : $2\times 1^4 - 1^2 = 1$

Ainsi, ils sont bien égaux et $P(1)$ est vérifiée.

(b) Hérédité : il faut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie : $1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$.
Il faut en déduire que $P(n+1)$ aussi est vraie :

$$\underbrace{1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3}_{2n^4 - n^2} + (2n+1)^3 = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$$

Il faut donc montrer que : $2n^4 - n^2 + (2n+1)^3 = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$.

Or

$$\begin{aligned} 2n^4 - n^2 + (2n+1)^3 &= 2n^4 - n^2 + (2n+1)(4n^2+4n+1) \\ &= 2n^4 - n^2 + 8n^3 + 8n^2 + 2n + 4n^2 + 4n + 1 \\ &= 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2(n+1)^4 - (n+1)^2 &= (n+1)^2\big(2(n+1)^2 - 1\big) \\ &= (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1) \\ &= 2n^4 + 4n^3 + n^2 + 4n^3 + 8n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 1 \\ &= 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien : $2n^4 - n^2 + (2n+1)^3 = 2(n+1)^4 - (n+1)^2$.

$P(n+1)$ est donc vérifiée dès que $P(n)$ est vérifiée.

(c) Conclusion : on a montré d'une part que $P(1)$ est vérifiée, d'autre part que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.
Cela démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vérifiée.

12. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Corrigé

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété : « $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ »

(a) Initialisation : comme il faut montrer la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$ (donc à partir de $n = 0$), on initialise à $n = 0$.
Les deux termes de l'inégalité qui définit $P(0)$ sont

à gauche : $(1+a)^0 = 1$ et à droite : $1 + 0\times a = 1$

On a bien : « $1 \leqslant 1$ » donc la propriété $P(0)$ est vérifiée.

(b) Hérédité : il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vérifiée : $(1+a)^n \geqslant 1+na$
Montrons que $P(n+1)$ est vérifiée : $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$

Or

$$(1+a)^{n+1} = (1+a) \times \underbrace{(1+a)^n}_{\geqslant 1+na} \geqslant (1+a)(1+na)$$

Donc

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &\geqslant 1+na+a+na^2 \\ &\geqslant 1+(n+1)a+na^2\end{aligned}$$

Comme $na^2 \geqslant 0$, on en déduit : $1+(n+1)a+na^2 \geqslant 1+(n+1)a$

Finalement,

$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a+na^2 \geqslant 1+(n+1)a$$

La propriété $P(n+1)$ est donc aussi vérifiée dès lors que $P(n)$ est vérifiée.

(c) Conclusion : on a montré d'une part que $P(0)$ est vraie, d'autre part que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.
Cela démontre par récurrence que $P(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

13. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8^n - 1$ est divisible par 7.

Corrigé

Précisons d'abord que, pour tout $a \in \mathbb{N}$, la propriété « a est divisible par 7 » s'écrit :
« il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 7k$ »
Ce nombre k est en fait égal à $\frac{a}{7}$. L'important est qu'il appartient à $\mathbb{N}$: c'est un nombre *entier*.
Notons donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ la propriété : « $8^n - 1$ est divisible par 7 »

(a) Initialisation : montrons que $P(0)$ est vraie.
Quand $n = 0$, $8^n - 1 = 8^0 - 1 = 0$. Ce nombre est bien divisible par 7 donc $P(0)$ est vérifiée.

(b) Hérédité : il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vérifiée : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $8^n - 1 = 7k$.
Démontrons que $P(n+1)$ est aussi vérifiée : il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $8^{n+1} - 1 = 7k'$.

Si $8^n - 1 = 7k$ alors on a aussi $8^n = 7k+1$. Donc

$$\begin{aligned}8^n = 7k+1 &\Longrightarrow 8 \times 8^n = 8 \times (7k+1) \\ &\Longrightarrow 8^{n+1} = 8 \times 7k + 8 \\ &\Longrightarrow 8^{n+1} - 1 = 7 \times 8k + 7 = 7 \times (8k+1)\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $k' = 8k+1$, on obtient : $8^{n+1} - 1 = 7k'$ et k' est bien un nombre entier.

Donc $8^{n+1} - 1$ est aussi divisible par 7 et $P(n+1)$ est vérifiée.

(c) Conclusion : on a montré d'une part que $P(0)$ est vraie, d'autre part que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

Cela démontre par récurrence que $P(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

14. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Corrigé

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ la propriété : « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ »

(a) Initialisation : comme il faut montrer la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc à partir de $n = 1$, on initialise à $n = 1$.

Dans ce cas, la partie gauche de la relation est

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

et la partie droite est

$$2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Il y a donc bien égalité et la propriété $P(1)$ est vérifiée.

(b) Hérédité : il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vérifiée : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

Montrons que $P(n+1)$ l'est aussi ; : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$

Or

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}}_{2-\frac{n+2}{2^n}} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+1} \frac{k}{2^k}}_{\frac{n+1}{2^{n+1}}}$$

Il faut donc montrer que : $2 - \dfrac{n+2}{2^n} + \dfrac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \dfrac{n+3}{2^{n+1}}$.

Or

$$\begin{aligned} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} &= 2 - \frac{2(n+2)}{2\times 2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{2n+4}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

La propriété $P(n+1)$ est donc aussi vérifiée quand $P(n)$ est vérifiée.

(c) Conclusion : on a montré d'une part que $P(1)$ est vérifiée, d'autre part que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

Cela démontre par récurrence que $P(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Suites

15. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$ et $u_{15} = 10$.

(a) Déterminer u_{30}.

(b) Déterminer $u_{15} + u_{16} + \cdots + u_{30}$.

Corrigé :

(a) La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 3$ avec $u_{15} = 10$. On cherche u_{30}.

On sait que pour tout n et p entiers, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Ainsi, pour $n = 30$, $p = 15$ et $q = 3$, on a $\boxed{u_{30} = u_{15} \times 3^{30-15} = 10 \times 3^{15}}$

(b) On veut déterminer $u_{15} + u_{16} + \cdots + u_{30}$.

On sait, dans la cas d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$, que pour tous n et p entiers tels que $p \leqslant n$, $u_p + \cdots + u_n = u_p \times \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$.

Ainsi, pour $n = 30$, $p = 15$ et $q = 3$, on obtient

$u_{15} + u_{16} + \cdots + u_{30} = u_{15} \times \frac{1-3^{30-15+1}}{1-3} = 10 \times \frac{1-3^{16}}{1-3} = -5\left(1 - 3^{16}\right) = \boxed{5 \times 3^{16} - 5}$

16. Soit $S = \dfrac{1}{2} + 2 + \dfrac{7}{2} + \cdots + \dfrac{19}{2} + 11$.

Déterminer S après avoir vérifié que S est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Corrigé :

On remarque que $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 2$, $2 + \dfrac{3}{2} = 7$ et que $\dfrac{19}{2} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{22}{2} = 11$.

S est donc la somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (u_n) de raison $r = \dfrac{3}{2}$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

Pour savoir le nombre de termes dans S, il faut d'abord chercher l'entier n pour lequel $u_n = 11$.

On sait que, pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$. On résout alors l'équation $11 = \dfrac{1}{2} + n \times \dfrac{3}{2}$.

Cela donne $\dfrac{3}{2}n = 11 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{21}{2}$. On en déduit ainsi que $n = \dfrac{21}{2} \times \dfrac{2}{3} = 7$.

Par conséquent, $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_7 = \frac{7+1}{2}\left(u_0 + u_7\right) = 4\left(\frac{1}{2} + 11\right) = 4 \times \frac{23}{2} = 2 \times 23$

D'où $\boxed{S = 46}$

17. Soient (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$
Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).

Corrigé :

(a) Étudions d'abord la monotonie de la suite (u_n).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc strictement croissante}}$.

(b) Étudions maintenant la monotonie de la suite (v_n).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) \\ &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{2n - (n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{n-1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{n-1}{n(n+1)} \geq 0$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n \geq 0$.
$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc croissante}}$.

18. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 4$ et $u_0 = 2$.

Soit $(v_n) = (u_n + 2)$.

(a) Montrer que (v_n) est géométrique.

(b) En déduire (v_n) puis (u_n) en fonction de n.

Corrigé :

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = 3u_n + 4 + 2 = 3u_n + 6 = 3\left(u_n + 2\right) = 3v_n$$

$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc géométrique}}$ de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 2 = 2 + 2 = 4$.

(b) De la question précédente, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = q^n \times v_0 = 3^n \times 4$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = v_n - 2 = 3^n \times 4 - 2}$.

19. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 6$ et $u_5 = 3$.

(a) Déterminer u_{20}.

(b) Déterminer $u_5 + u_6 + \cdots + u_{20}$.

Corrigé :

(a) On remarque que la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 6$ avec $u_5 = 3$.

On sait, dans le cas d'une suite arithmétique, que pour tous n et p entiers, $u_n = u_p + (n-p)r$. Ainsi, pour $n = 20$, $p = 5$ et $r = 6$, on a $u_{20} = u_5 + (20-5) \times 6 = 3 + 15 \times 6 = \boxed{93}$

(b) Comme la suite (u_n) est arithmétique, on sait que, pour tous n et p entiers tels que $p \leqslant n$,

$$u_p + \cdots + u_n = \frac{n-p+1}{2}\,(u_p + u_n)$$

Ainsi, pour $p = 5$ et $n = 20$, on obtient
$u_5 + u_6 + \cdots + u_{20} = \frac{20-5+1}{2}\,(u_5 + u_{20}) = 8\,(3 + 93) = \boxed{768}$

20. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ et $u_0 = 2$.

(a) Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante et minorée par 1.

(b) Étudier la convergence de (u_n).

Corrigé :

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P_n : 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

• Initialisation pour $n = 0$.
On a $u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{3}$ et $1 \leq \sqrt{3} \leqslant 2$. Ainsi, $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$ et P_1 est vraie.

• Hérédité.

On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

On sait ainsi que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. D'où , $2 \leqslant u_{n+1} + 1 \leqslant u_n + 1$.

Comme la fonction racine carrée est croissante, on en déduit que $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{u_{n+1}+1} \leqslant \sqrt{u_n + 1}$.
De plus, on sait que $1 \leqslant \sqrt{2}$. Ainsi, on obtient $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.
On en déduit que P_{n+1} est vraie.

• Conclusion.

Des deux étapes précédentes, on conclut, d'après le principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1.

(b) La suite (u_n) est décroissante et minorée. On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge}}$.

Notons l sa limite.
Pour tout entier n, on a $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{u_n + 1} = \sqrt{l+1}$, on en déduit, par unicité de la limite, que $l = \sqrt{l+1}$.
Ainsi, $l^2 = l + 1$, c'est-à-dire $l^2 - l - 1 = 0$.

Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 5$. Ces racines sont donc $l_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$ et $l_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \geq 1$.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$, on a $l \geq 1$. Ainsi, $\boxed{l = l_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Limites

21. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x}{3x^2+x+4} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+2x+2}{x+3}$$

Corrigé :
Pour la première limite demandée, commençons par constater que cette fraction rationnelle présente une indétermination de type « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ». Il faut lever l'indétermination en mettant en facteur, au numérateur et au dénominateur, le terme prépondérant. Nous aurons ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x}{3x^2+x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2(1-\frac{5x}{2x^2})}{3x^2(1+\frac{x}{3x^2}+\frac{4}{3x^2})} = \frac{2}{3} \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{5}{2x}}{1+\frac{1}{3x}+\frac{4}{3x^2}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{5}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{3x}+\frac{4}{3x^2} = 1$. On a donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x}{3x^2+x+4} = \frac{2}{3}}$$

Pour la seconde limite demandée, nous rencontrons le même type d'indétermination. Mais cette fois nous allons transformer la fraction de manière à utiliser une limite usuelle du cours parmi les limites usuelles obtenues par croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2\times\frac{e^{2x}}{2x} = 2\times\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = 2\times\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X}$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x} = +\infty}$$

La troisième limite demandée présente toujours une indétermination de type « $\frac{+\infty}{+\infty}$ ». Nous allons, comme nous l'avons fait pour la première fraction, mettre en facteur le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+2x+2}{x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1+\frac{2x}{e^x}+\frac{2}{e^x})}{x(1+\frac{3}{x})};$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

En effet, $\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{2x}{e^x} + \frac{2}{e^x} = 1$ par croissances comparées et $\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{3}{x} = 1$
Nous pouvons donc conclure avec la même limite usuelle du cours que dans l'exercice précédent à savoir $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées.

22. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \ln(x)}{3x^2 - x + 2}$$

Corrigé :
La première limite demandée, bien que la fraction présente une indétermination en $+\infty$, est une limite usuelle vue en cours. En effet, par croissances comparées nous avons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

Par conséquent et en particulier pour $\alpha = 2$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0}$$

Pour la seconde limite demandée, nous sommes à nouveau face à une indétermination de type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Comme dans l'exercice précédent nous allons mettre en facteur le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur. Nous aurons ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \ln(x)}{3x^2 - x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1 + \frac{\ln(x)}{x^2})}{3x^2(1 - \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2})}$$

Or comme nous venons de voir que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$, on a $\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\ln(x)}{x^2} = 1$.
De plus, $\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2} = 1$. À l'aide de cette technique de mise en facteur du terme prépondérant, on peut donc conclure :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + \ln(x)}{3x^2 - x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}}$$

23. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x} \sin(x) \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Corrigé :

À un facteur constant près, la première limite est une limite usuelle du cours.

En effet, d'après le cours nous savons que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

Ainsi en détachant le facteur $\frac{1}{2}$ nous pouvons conclure :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\sin(x)=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin(x)=\frac{1}{2}}$$

Quant à la seconde limite demandée, ici pas d'indétermination. En effet, nous avons :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$$

Puis par composition avec la fonction $x\mapsto\cos(x)$, de limite 1 en 0 :

$$\lim_{x\to +\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

Nous avons un produit dont un facteur a pour limite 1, par conséquent la limite du produit dépend de celle du second facteur et en conclusion :

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to +\infty}x=+\infty}$$

24. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+4x}\right)\quad,\quad\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin(x)}{x^2+3}$$

Corrigé :

La première limite demandée présente une indétermination de type « $+\infty-\infty$ ». C'est un cas typique où on peut lever l'indétermination à l'aide de la quantité conjuguée. Pour x assez grand, (dès $x\geq 2$), nous avons :

$$\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+4x}=(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+4x})\times\frac{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x^2+4x}}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x^2+4x}}=\frac{-3-4x}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{x^2+4x}}$$

Après ces transformations, nous avons une forme affine de limite infinie au numérateur, que nous allons factoriser par le terme prépondérant. Ensuite pour clarifier ce qui se passe au dénominateur, nous allons commencer par factoriser chacun des deux polynômes sous les radicaux, pour ensuite factoriser le dénominateur :

$$\frac{-4x(1+\frac{-3}{-4x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{3}{x^2})}+\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x})}} = \frac{-4x(1+\frac{-3}{-4x})}{x(\sqrt{(1-\frac{3}{x^2})}+\sqrt{(1+\frac{4}{x})})} = \frac{-4(1+\frac{-3}{-4x})}{\sqrt{(1-\frac{3}{x^2})}+\sqrt{(1+\frac{4}{x})}}$$

Remarquons au passage que comme nous cherchons à calculer une limite en plus l'infini, nous pouvons considérer que x est strictement positif et par conséquent $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Ainsi le numérateur a pour limite (-4) alors que le dénominateur tend vers 2. Par opération sur les limites et en conclusion :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+4x}\right) = -2}$$

Pour la deuxième limite, nous pouvons utiliser le théorème d'encadrement dit « des gendarmes ». En effet, pour tout x réel, nous avons :

$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \iff \frac{-1}{x^2+3} \leqslant \frac{\sin(x)}{x^2+3} \leqslant \frac{1}{x^2+3} \text{ car } x^2+3>0$$

En conclusion comme $\dfrac{-1}{x^2+3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{1}{x^2+3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, nous avons par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x^2+3} = 0}$$

25. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-2x+3x^2}{4+x+6x^2} \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x}$$

Corrigé :
Pour le calcul de la première limite, nous constatons une indétermination de type « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Nous allons mettre en facteur dans chaque polynôme le terme prépondérant en l'infini qui n'est autre que le monôme de plus haut degré. Nous aurions alors :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-2x+3x^2}{4+x+6x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2(1-\frac{2}{3x}+\frac{2}{3x^2})}{6x^2(1+\frac{1}{6x}+\frac{4}{6x^2})} = \frac{3}{6}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{3x}+\frac{2}{3x^2}}{1+\frac{1}{6x}+\frac{4}{6x^2}}$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{2-2x+3x^2}{4+x+6x^2} = \frac{1}{2}}$$

Pour la deuxième limite demandée, l'indétermination est de type « $\frac{0}{0}$ ». Ici on peut s'appuyer sur une limite usuelle du cours que nous avons déjà utilisée dans un exercice antérieur : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Transformons notre fraction :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x} \times \frac{3}{3} \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \times \frac{3}{2} = \lim_{X\to 0} \frac{\sin(X)}{X} \times \frac{3}{2}$$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{3}{2}}$$

Logarithme-Exponentielle

26. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\ln(1-2x) = \ln(x+2) + \ln 3$$

Corrigé :

Cette équation est bien définie pour $1-2x > 0$ et $x+2 > 0$ c'est à dire sur l'ensemble : $]-2, \frac{1}{2}[$

Pour tout x de $]-2, \frac{1}{2}[$ on a :

$\ln(1-2x) = \ln(x+2) + \ln 3$
$\Leftrightarrow \exp(\ln(1-2x)) = \exp(\ln(x+2) + \ln 3)$
$\Leftrightarrow \exp(\ln(1-2x)) = \exp(\ln(x+2))\exp(\ln 3)$
$\Leftrightarrow 1-2x = 3(x+2)$
$\Leftrightarrow 1-2x = 3x+6$
$\Leftrightarrow 5x+5 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$
Comme $-1 \in]-2; \frac{1}{2}[$, on en déduit que $\boxed{S = \{-1\}}$

27. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\ln(2-x) \leqslant \ln(2x+1) - \ln 3$$

Corrigé :

Cette équation est bien définie pour $2x+1 > 0$ et $2-x > 0$ c'est 0 dire sur l'ensemble : $]-\frac{1}{2}, 2[$

Pour tout x de $]-\frac{1}{2}, 2[$ on a :

$\ln(2-x) \leqslant \ln(2x+1) - \ln 3$
$\Leftrightarrow \exp(\ln(2-x)) \leqslant \exp(\ln(2x+1) - \ln 3)$, car $\exp(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow 2-x \leqslant \exp(\ln(2x+1))\exp(-\ln 3)$

$\Leftrightarrow 2-x \leqslant \frac{2x+1}{\exp(\ln 3)}$
$\Leftrightarrow 2-x \leqslant \frac{2x+1}{3}$
$\Leftrightarrow 6-3x \leqslant 2x+1$
$\Leftrightarrow 1 \leqslant x$

Donc $\boxed{S=[1;2[}$

28. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x)=e^{x}\,(2x-3)$$

(a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

(b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x)=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x)=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0}$ par croissance comparée.

(b) On étudie la dérivée de f sur $\mathbb{R}$:

On a une dérivée de la forme $(uv)'=u'v+uv'$ avec :

— $u(x)=\exp(x)$ et $u'(x)=\exp(x)$
— $v(x)=2x-3$ et $v'(x)=2$

On obtient :

$$f'(x)=(2x-3)\exp(x)+2\exp(x)=\exp(x)(2x-1)$$

On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-2\sqrt{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

29. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$e^x - 2e^{-x} - 1 = 0$$

Corrigé :

$e^x - 2e^{-x} - 1 = 0$
$\Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x - 2 = 0$ en multipliant par e^x

On pose $X = e^x$ et on cherche les solutions de :

$X^2 - X - 2 = 0$, un polynôme de degré 2 dont le discriminant est $\Delta = 9$. Les racines sont donc $X_1 = -1$ et $X_2 = 2$. On a deux solutions : $e^{x_1} = -1$, ce qui est impossible car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $e^{x_2} = 2 \Leftrightarrow x_2 = \ln(2)$.

Finalement, l'équation a pour solution $\boxed{x = \ln(2)}$

30. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2e^x + e^{-x} + x$$

(a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\left(e^x + 1\right)\left(2e^x - 1\right)}{e^x}$.

(c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On a $f(x) = x(\frac{2e^x}{x} + \frac{e^{-x}}{x} + 1)$ et :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2e^x}{x} = 0$ par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty$ par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2e^x}{x} + \frac{e^{-x}}{x} + 1 = -\infty$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

(b) Calculons la dérivée de f :

La dérivée d'une somme est la somme des dérivées et on a $(e^w)' = w'e^w$ donc $f'(x) = 2e^x - e^{-x} + 1$.

Par ailleurs, en développant l'expression cherchée on trouve :

$\frac{(e^x+1)(2e^x-1)}{e^x} = \frac{2e^{2x}-e^x+2e^x-1}{e^x} = \frac{2e^{2x}+e^x-1}{e^x} = \boxed{2e^x + 1 - e^{-x} = f'(x)}$

(c) On cherche le signe de f. Comme e^x est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $2e^x - 1$. On a :

$2e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x > \ln(\frac{1}{2})$ car $\ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow x > -\ln(2)$

On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$3-\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

31. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}$$

(a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

(b) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

(c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Corrigé :

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln(x)-1}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt{e}}$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln(x)-1}{x} > 0$
$\Leftrightarrow 2\ln(x) - 1 > 0$ car $x > 0$
$\Leftrightarrow \boxed{x > \sqrt{e}}$ car $\exp(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Pour déterminer les variations de f, on étudie le signe de la dérivée. On a une dérivée de la forme $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

— $u(x) = 2\ln(x) - 1$ et $u'(x) = \frac{2}{x}$
— $v(x) = x$ et $v'(x) = 1$

On obtient :

$f'(x) = \frac{3-2\ln(x)}{x^2}$

De plus : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3 - 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x < e^{\frac{3}{2}}$ car $\exp(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On cherche les limites de f. On a :

$f(x) = \frac{2\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$ et :

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\ln(x)}{x} = -\infty$ par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-1}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$2e^{\frac{-3}{2}}$	$\searrow$	0

32. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x}$$

(a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.

(b) Déterminer f' puis dresser le tableau de variation de f.

(c) Déterminer une primitive de f.

Corrigé :

(a) On a :

$\lim\limits_{x\to 0} x + 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$ par croissance comparée donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}=0$ par croissance comparée donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

(b) On a :

$(1+x)'=1$ et $(\frac{\ln(x)}{x})'=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$ car on a une dérivée de la forme $(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

— $u(x)=\ln(x)$ et $u'(x)=\frac{1}{x}$
— $v(x)=x$ et $v'(x)=1$

Ainsi on a :

$\boxed{f'(x)=1+\frac{1-\ln(x)}{x^2}=\frac{1+x^2-\ln(x)}{x^2}}$

Pour déterminer les variations de f on étudie la dérivée. Le signe de $f'(x)$ est déterminé par le signe de $x^2+1-\ln(x)$. On va donc étudier cette fonction en posant $g(x)=x^2+1-\ln(x)$. On a :

$g'(x)=2x-\frac{1}{x}$ et $2x-\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ car on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$. On a donc :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}+\ln(\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi g admet un minimum en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et comme $\frac{3}{2}+\ln(\sqrt{2})>0$, $g(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut en déduire que $f'(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

On obtient :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(c) On cherche une primitive de f :

$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(1+x+\frac{\ln(x)}{x})\,\mathrm{d}x=\int 1\,\mathrm{d}x+\int x\,\mathrm{d}x+\int\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x=x+\frac{x^2}{2}+\int\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$

On reconnait une intégrale de la forme : $\int u(x)u'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{u(x)^2}{2}$ avec $u(x)=\ln(x)$ et $u'(x)=\frac{1}{x}$

Ainsi une primitive de f est : $\boxed{x + \frac{x^2}{2} + \frac{\ln(x)^2}{2}}$

33. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = (3 - x^2)e^{-x}$$

(a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

(b) Déterminer f' puis le tableau de variation de f.

Corrigé :

(a) On a :

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3 - x^2 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

Par ailleurs on a :

$f(x) = 3e^{-x} - x^2e^{-x}$ d'où :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$ par croissance comparée donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

(b) On a une dérivée de la forme $(uv)' = u'v + uv'$ avec :

— $u(x) = 3 - x^2$ et $u'(x) = -2x$
— $v(x) = e^{-x}$ et $v'(x) = -e^{-x}$ car $(e^w)' = w'e^w$ avec $w(x) = -x$

D'où : $f'(x) = -2xe^{-x} - (3 - x^2)e^{-x} \iff \boxed{f'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 3)}$
On cherche le signe de la dérivée on doit donc étudier le signe de $x^2 - 2x - 3$ un polynôme de degré 2 dont le discriminant est $\Delta = 16$. Les racines sont donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$.

On obtient :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$2e$	$\searrow$	$\frac{-6}{e^3}$	$\nearrow$	0

Domaine de définition

34. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 4\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln\Big(\ln(\sqrt{x-1})\Big)$$

Corrigé :

(a) Concernant la fonction f, la fonction ln étant définie pour tout réel strictement positif nous pouvons définir le domaine D de f comme suit :

$$D = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4 > 0\}$$

Or nous savons déterminer le signe d'un polynôme du second degré en fonction de ses racines et :

$$x^2 - 4 > 0 \iff (x-2)(x+2) > 0 \iff x > 2 \text{ ou } x < -2$$

En conclusion $\boxed{D =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[}$

(b) Pour la fonction g, les contraintes sont plus nombreuses. Elles sont liées au fait que la fonction racine carrée est définie pour x positif, et la fonction ln pour x strictement positif. Attention toutefois au principe de composition des fonctions.

Nous pouvons poser ces contraintes sans chercher à les lier dans un premier temps :

$$D = \left\{x \in \mathbb{R},\ x - 1 \geqslant 0 \ \text{ et } \ \sqrt{x-1} > 0 \ \text{ et } \ \ln\left(\sqrt{x-1}\right) > 0\right\}$$

Mais les deux premières inéquations sont redondantes et leur conjonction équivaut à $(x > 1)$. Ainsi :

$$D = \left\{x \in \mathbb{R},\ x > 1 \ \text{ et } \ \ln\left(\sqrt{x-1}\right) > 0\right\}$$

Or pour $x > 1$:

$$\ln\left(\sqrt{x-1}\right) > 0 \iff \sqrt{x-1} > 1 \iff x - 1 > 1 \iff x > 2$$

En conclusion $\boxed{D =]\ 2, +\infty\ [}$

35. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 - 5x + 6}\right)$$

Corrigé :

(a) Le domaine de f contient tous les réels et seulement les réels pour lesquels le polynôme du second degré sous le radical est positif. Nous pouvons définir D comme suit :

$D = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 5x + 6 \geqslant 0\}$

Il nous reste plus qu'à résoudre l'inéquation :

$x^2 - 5x + 6 \geqslant 0 \Longleftrightarrow (x - 2)(x - 3) \geqslant 0 \Longleftrightarrow (x \leqslant 2) \quad \text{ou} \quad (x \geqslant 3)$

En conclusion $\boxed{D =] - \infty, 2\ ] \cup [\ 3,\ +\infty\ [}$

(b) Pour g nous avons toujours les contraintes de f, mais de nouvelles contraintes s'ajoutent :

$D = \left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 5x + 6 \geqslant 0 \ \text{ et } \sqrt{x^2 - 5x + 6} > 0\right\}$

Un nombre positif est strictement positif si et seulement s'il est différent de zéro. Par conséquent :

$D = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 5x + 6 > 0\}$

En conclusion $\boxed{D =] - \infty, 2\ [\cup]\ 3,\ +\infty\ [}$

36. Déterminer le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}}{x^2 - 3x - 4}$$

Corrigé :

Ici le polynôme sous le radical doit être positif et celui au dénominateur non nul, car la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$. En prenant en considération le principe de composition des fonctions, nous avons :

$D = \{x \in \mathbb{R},\ 2x^2 + 3x - 2 \geq 0 \ \text{ et } \ x^2 - 3x - 4 \neq 0\}$

En posant le discriminant où en remarquant l'existence d'une racine évidente on peut factoriser chacun de ces deux polynômes et on obtient :

$(2x^2+3x-2 \geq 0) \iff 2(x-\frac{1}{2})(x+2) \geq 0 \iff (x \leqslant -2)$ ou $(x \geq \frac{1}{2})$

Et concernant les valeurs interdites au dénominateur :

$(x^2-3x-4=0) \iff (x+1)(x-4)=0 \iff (x=-1)$ ou $(x=4)$

En conclusion, en excluant ces deux valeurs interdites de l'ensemble des solutions de l'inéquation précédente (en réalité seule 4 est concerné) :

$\boxed{D =]-\infty,-2] \cup [\frac{1}{2},4[\cup]4,+\infty[}$

37. Déterminer le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2+3x+1}}$$

Corrigé :
Pour f nous allons à nouveau mettre en équations et inéquations toutes les conditions pour qu'un réel x appartienne au domaine de définition de la fonction, comme nous l'avons fait pour les exercices précédents :

$D = \Big\{x \in \mathbb{R},\ x^2-x+1 \geq 0 \text{ et } x^2+3x+1 \geq 0 \text{ et } \sqrt{x^2+3x+1} \neq 0\Big\}$

En regardant de plus près on se rend compte que le premier polynôme n'a pas de racines ($\Delta = -3 < 0$) et ce polynôme est toujours de signe positif. Par ailleurs, la conjonction de la deuxième inéquation et de l'inégalité nous donne finalement :

$D = \{x \in \mathbb{R},\ x^2+3x+1 > 0\}$

En calculant à nouveau le discriminant qui vaut 5 ici nous avons :

$(x^2+3x+1>0) \iff \Big(x < \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\Big)$ ou $\Big(x > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\Big)$

En conclusion $\boxed{D = \Big]-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\Big[\cup \Big] \frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ +\infty\Big[}$

38. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x^2+x-6} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln\Big(x^2+x+1\Big)$$

Corrigé :

(a) Pour la fonction f, le domaine contient tous les réels et uniquement les réels pour lesquels le polynôme sous le radical est positif. Donc à nouveau nous devons, comme dans les exercices précédents, considérer le signe d'un polynôme du second degré :

$$D = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 6 \geq 0\}$$

En calculant à nouveau le discriminant qui vaut 25 ici nous avons :

$$(x^2 + x - 6 > 0) \iff (x-2)(x+3) > 0 \iff (x < -3)\ ou\ (x > 2)$$

En conclusion $\boxed{D =]-\infty, -3\ [\cup]\ 2,\ +\infty\ [}$

(b) Concernant g nous avons :

$$D = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 + x + 1 > 0\}$$

Mais comme le polynôme $(x^2 + x + 1)$ n'a pas de racine (discriminant -3 < 0) il ne s'annule jamais et il est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

En conclusion g est défini sur $\mathbb{R}$ et nous avons simplement : $\boxed{D = \mathbb{R}}$

39. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{-3x^2 + x + 10}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln\left(1 - e^x\right)$$

Corrigé :

(a) Pour la fonction f il y a deux sources de contrainte : nous devons déterminer les valeurs de x pour lesquelles le polynôme sous le radical est positif ; mais il faut également tenir compte du fait que la fonction ln n'est définie que pour les réels strictement positis. Ce qui nous donne l'ensemble suivant :

$$D = \{x \in \mathbb{R},\ -3x^2 + x + 10 \geq 0 \ \text{ et } \ \sqrt{-3x^2 + x + 10} > 0\}$$

Comme nous l'avons expliqué dans les exercices précédents, la conjonction de ces deux inéquations équivaut à la seule inéquation suivante :

$$D = \{x \in \mathbb{R},\ -3x^2 + x + 10 > 0\}$$

En calculant à nouveau le discriminant du polynôme qui vaut 121 ou bien en le factorisant à l'aide d'une racine évidente nous avons :

$(-3x^2 + x + 10 > 0) \iff -3(x-2)(x+\frac{5}{3}) > 0 \iff (-\frac{5}{3} < x < 2)$

En conclusion $\boxed{D =]-\frac{5}{3}, 2[}$

(b) Pour g, seule la fonction ln restreint l'ensemble de définition ici. On peut caractériser D comme suit :

$D = \{x \in \mathbb{R},\ 1 - e^x > 0\}$

Résolvons l'inéquation :

$(1 - e^x > 0) \iff (1 > e^x) \iff (0 > x)$

En conclusion : $\boxed{D =]-\infty, 0\,[= \mathbb{R}_-^*}$

40. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln\Big(20 - x - x^2\Big) \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

Corrigé :

(a) Pour f nous devons, comme nous l'avons expliqué dans les exercices précédents, déterminer les valeurs de x pour lesquelles le polynôme est strictement positif puisque seules ces valeurs peuvent avoir une image par la fonction ln. On écrit alors :

$D = \{x \in \mathbb{R},\ 20 - x - x^2 > 0\}$

En calculant le discriminant qui vaut 81 ici nous avons :

$(20 - x - x^2 > 0) \iff -(x-4)(x+5) > 0 \iff (-5 < x < 4)$

En conclusion $\boxed{D =]-5, 4[}$

(b) Pour g il faut et il suffit que le polynôme sous le radical soit positif. Une fois de plus on se penche sur le signe d'un polynôme du second degré après avoir caractérisé D comme suit :

$D = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 3x + 2 \geq 0\}$

La résolution de l'inquation par équivalence et en remarquant l'existence de deux racines évidentes que sont 1 et 2 nous donne :

$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x-2) \geq 0$

En conclusion $\boxed{D =]-\infty, 1\ [\cup]\ 2,\ +\infty\ [}$

Primitives et équations différentielles

41. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-5}{(x+3)^2}$ et g la fonction définie sur par $g(x) = x(x^2+1)^5$.

(a) Déterminer les primitives de f.

(b) Déterminer la primitive G de g vérifiant $G(0) = 0$.

Corrigé

(a)

$$f(x) = 5 \times \frac{-1}{(x+3)^2}$$

f est donc du type : « $k \times \dfrac{-u'}{u^2}$ »

Les primitives de f s'expriment alors sous la forme : « $k \times \dfrac{1}{u}$ »

On a donc :

$$\boxed{F(x) = \frac{5}{x+3} + K} \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}$$

(b)

$$g(x) = \frac{1}{2} \times 2x(x^2+5)^5$$

g est donc du type : « $k \times u'u^n$ »

Les primitives de g s'expriment alors sous la forme : « $k \times \dfrac{1}{n+1} u^{n+1}$ »

On a donc :

$$G(x) = \frac{1}{2 \times 6}(x^2+5)^6 + K$$

$$G(x) = \frac{1}{12}(x^2+5)^6 + K \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}$$

Sachant que $G(0) = 0$, on a :

$$\frac{1}{12} \times 5^6 + K = 0$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{-5^6}{12}$$

On obtient alors :

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{12}\left[(x^2+5)^6 - 5^6\right]}$$

42. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$ et g la fonction définie par $g(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x+1}}$

(a) Déterminer les primitives de f.

(b) Déterminer la primitive G de g vérifiant $G(0) = 2$.

Corrigé

(a)

$$f(x) = -3 \times \frac{-1}{(x+2)^2}$$

f est donc du type : « $k \times \dfrac{-u'}{u^2}$ »

Les primitives de f s'expriment alors sous la forme : « $k \times \dfrac{1}{u}$ »

On a donc :

$$\boxed{F(x) = \frac{-3}{x+2} + K} \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}$$

(b)

$$g(x) = \frac{6x+4}{2\sqrt{3x^2+4x+1}}$$

g est donc du type : « $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ »

Les primitives de g s'expriment alors sous la forme : « $\sqrt{u}$ »

On a donc :

$$G(x) = \sqrt{3x^2+4x+1} + K \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}$$

Sachant que $G(0) = 2$, on a :

$$\sqrt{0+0+1} + K = 2$$

$$\Leftrightarrow K = 1$$

On obtient alors :

$$\boxed{G(x) = \sqrt{3x^2+4x+1} + 1}$$

43. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}$ et g la fonction définie par $g(x) = (x-1)e^{x^2-2x}$.

(a) Déterminer les primitives de f.

(b) Déterminer la primitive G de g vérifiant $G(\sqrt{2}) = 1$.

Corrigé

(a)

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}$$

f est donc du type : « $k \times \dfrac{u'}{u}$ »
Les primitives de f s'expriment alors sous la forme : « $k \times \ln(u)$ »
On a donc :

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\ln\Big(\sin(2x)\Big) + K} \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}$$

(b)

$$g(x) = \frac{1}{2} \times (2x-2)e^{x^2-2x}$$

g est donc du type : « $k \times u'e^u$ »
Les primitives de g s'expriment alors sous la forme : « $k \times e^u$ »
On a donc :

$$G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-2x} + K \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}$$

Sachant que $G(\sqrt{2}) = 1$, on a :

$$\frac{1}{2}e^{2-2\sqrt{2}} + K = 1$$
$$\Leftrightarrow K = 1 - \frac{1}{2}e^{2-2\sqrt{2}}$$

On obtient alors :

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x^2-2x} - e^{2-2\sqrt{2}}\right) + 1}$$

44. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{x^2-3}$ et g la fonction définie par $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}e^{\sqrt{x^2-1}}$

(a) Déterminer les primitives de g.

(b) Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(3) = \sqrt{6}$.

Corrigé

(a)

$$g(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}e^{\sqrt{x^2-1}}$$

g est donc du type : « $u'e^u$ »
Les primitives de g s'expriment alors sous la forme : « e^u »
On a donc :

$$\boxed{G(x) = e^{\sqrt{x^2-1}} + K} \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}$$

(b)

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-3}$$

f est donc du type : « $\dfrac{u'}{u}$ »
Les primitives de f s'expriment alors sous la forme : « $\ln(u)$ »
On a donc :

$$F(x) = \ln(x^2 - 3) + K \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}$$

Sachant que $F(3) = \sqrt{6}$, on a :

$$\ln(9-3) + K = \sqrt{6}$$
$$\Leftrightarrow K = \sqrt{6} - \ln(6)$$

On obtient alors :

$$\boxed{F(x) = \ln(x^2 - 3) + \sqrt{6} - \ln(6)}$$

45. On considère les équations différentielles $(\mathrm{E}_1) : 2y' + 5y = 0$ et $(\mathrm{E}_2) : y' + \frac{1}{4}y = 1$

(a) Résoudre les deux équations .

(b) Déterminer la solution f de (E_1) vérifiant $f(2) = 1$.

Corrigé

(a)

$$(\mathrm{E}_1) : y' + \frac{5}{2}y = 0$$

L'équation différentielle (E_1) est du type : « $y' + ay = 0$ » avec $a = \dfrac{5}{2}$
Sa solution est donc de la forme : « $y = Ke^{-ax}$ » où $K \in \mathbb{R}$
On a donc :

$$\boxed{f_1(x) = K_1 \cdot e^{-\frac{5}{2}x}} \quad \text{où} \quad K_1 \in \mathbb{R}$$

$$(\mathrm{E}_2) : y' + \frac{1}{4}y = 1$$

L'équation différentielle (E_2) est du type : « $y' + ay = b$ » avec $a = \dfrac{1}{4}$ et $b = 1$
Sa solution est donc de la forme : « $y = Ke^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ » où $K \in \mathbb{R}$
On a donc :

$$\boxed{f_2(x) = K_2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + 4} \quad \text{où} \quad K_2 \in \mathbb{R}$$

(b) Sachant que $f_1(2) = 1$ on a :

$$K_1 \cdot e^{-5} = 1$$
$$\Leftrightarrow K_1 = e^5$$

On obtient alors :

$$\boxed{f_2(x) = e^{5 - \frac{5}{2}x}}$$

46. On considère l'équation différentielle $y^{'} - 3y = 2$.

(a) Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.

(b) Déterminer la solution f de cette équation vérifiant $f(0) = 1$.

(c) Déterminer la solution g de cette équation sachant que sa courbe représentative admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 3.

Corrigé

(a) L'équation différentielle est du type : « $y' + ay = b$ » avec $a = -3$ et $b = 2$
Sa solution est donc de la forme : « $y = Ke^{-ax} + \frac{b}{a}$ » où $K \in \mathbb{R}$
On a donc :

$$\boxed{f(x) = K \cdot e^{3x} - \frac{2}{3}} \quad \text{où} \quad K \in \mathbb{R}$$

(b) Sachant que $f(0) = 1$ on a :

$$K \cdot e^{0} - \frac{2}{3} = 1$$
$$\Leftrightarrow K = \frac{5}{3}$$

On obtient alors :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{3}\left(5e^{3x} - 2\right)}$$

(c) Les solutions sont de la forme générale : $g(x) = K_g \cdot e^{3x} - \frac{2}{3}$ où $K_g \in \mathbb{R}$
D'après les données, nous avons :

$$g'(0) = 3$$
$$\Leftrightarrow 3K_g \cdot e^{0} = 3$$
$$\Leftrightarrow K_g = 1$$

Donc, on obtient :

$$\boxed{g(x) = e^{3x} - \frac{2}{3}}$$

47. On considère les équations différentielles $(\mathrm{E}_1) : 2y^{'} - 3y = 1$ et $(\mathrm{E}_2) : y^{'} - xy^2 = 0$.

(a) Déterminer l'ensemble des solutions de (E_1).

(b) Déterminer la solution f de (E_1) vérifiant $f(0) = 1$.

(c) La fonction h définie par $h(x) = \frac{-2}{x^2+3}$ est-elle une solution de (E_2) ?

Corrigé

(a)

$$(\mathrm{E}_1) : \; y' - \frac{3}{2}y = \frac{1}{2}$$

L'équation différentielle (E_1) est du type : « $y' + ay = b$ » avec $a = -\frac{3}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$
Sa solution est donc de la forme : « $y = K_1 \cdot e^{-ax} + \frac{b}{a}$ » où $K_1 \in \mathbb{R}$

On a donc :

$$\boxed{f(x) = K_1 \cdot e^{\frac{3}{2}x} - \frac{1}{3}} \quad \text{où} \quad K_1 \in \mathbb{R}$$

(b) Sachant que $f(0) = 1$ on a :

$$K_1 \cdot e^0 - \frac{1}{3} = 1$$
$$\Leftrightarrow K_1 = \frac{4}{3}$$

On obtient alors :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{3}\left(4e^{\frac{3}{2}x} - 1\right)}$$

(c)

$$h'(x) = -2 \times \frac{-2x}{(x^2+3)^2} = \frac{4x}{(x^2+3)^2}$$

Donc :

$$h'(x) - x\Big(h(x)\Big)^2 = \frac{4x}{\left(x^2+3\right)^2} - x \times \frac{4}{\left(x^2+3\right)^2}$$
$$h'(x) - x\Big(h(x)\Big)^2 = \frac{4x-4x}{(x^2+3)^2}$$
$$h'(x) - x\Big(h(x)\Big)^2 = 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{La fonction } h \text{ définie par } h(x) = \frac{-2}{x^2+3} \text{ est solution de } (\mathrm{E}_2)}$

48. On considère l'équation différentielle (E) : $y^{'} - 2y = xe^x$.

(a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y^{'} - 2y = 0$.

(b) Déterminer les réels a et b tels que la fonction u définie par $u(x) = (ax+b)e^x$ soit une solution de l'équation (E).

(c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Corrigé

(a) L'équation différentielle est du type : « $y' + ay = 0$ » avec $a = -2$
Sa solution est donc de la forme : « $y = K \cdot e^{-ax}$ » où $K \in \mathbb{R}$
On a donc :

$$\boxed{f(x) = K \cdot e^{2x}} \quad \text{où} \quad K \in \mathbb{R}$$

(b) Nous avons $u'(x) = ae^x + (ax+b)e^x = (ax+a+b)e^x$ donc :

$$u'(x) - 2u(x) = xe^x$$
$$\Leftrightarrow (ax+a+b)e^x - 2(ax+b)e^x = xe^x$$
$$\Leftrightarrow (ax+a+b-2ax-2b)e^x = xe^x$$
$$\Leftrightarrow -ax+a-b = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

On obtient donc : $\boxed{u(x) = -(x+1)e^x}$

(c) L'ensemble des solutions de (E) sont donc les fonctions $g(x) = f(x)+u(x)$ (somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière)
On a alors : $\boxed{g(x) = f(x) + u(x) = K \cdot e^{2x} - (x+1)e^x}$ avec $K \in \mathbb{R}$

49. On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 4x^2 - 4x$.

(a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y' - 2y = 0$.

(b) Déterminer les réels a , b et c tels que la fonction u définie par $u(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution de l'équation (E).

(c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Corrigé

(a) L'équation différentielle est du type : « $y' + ay = 0$ » avec $a = -2$
Sa solution est donc de la forme : « $y = K \cdot e^{-ax}$ » où $K \in \mathbb{R}$
On a donc :

$$\boxed{f(x) = K \cdot e^{2x}} \quad \text{où} \quad K \in \mathbb{R}$$

(b) Nous avons $u'(x) = 2ax + b$ donc :

$$u'(x) - 2u(x) = 4x^2 - 4x$$
$$\Leftrightarrow 2ax + b - 2(ax^2 + bx + c) = 4x^2 - 4x$$
$$\Leftrightarrow 2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c = 4x^2 - 4x$$
$$\Leftrightarrow x^2(-2a) + x(2a - 2b) + b - 2c = 4x^2 - 4x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 4 \\ 2a - 2b = -4 \\ b - 2c = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

On obtient donc : $\boxed{u(x) = -2x^2}$

(c) L'ensemble des solutions de (E) sont donc les fonctions $g(x) = f(x)+u(x)$ (somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière)
On a alors : $\boxed{g(x) = f(x) + u(x) = K \cdot e^{2x} - 2x^2}$ avec $K \in \mathbb{R}$

Dénombrement-Probabilités

50. Soit E = {a ; b ; c ; d ; e ; f }

(a) Combien y a-t-il de sous-ensembles de E contenant trois éléments ?

(b) Combien de mots de 3 lettres distinctes peut-on former avec les lettres de E ?

(c) Combien de mots de 3 lettres dont deux exactement sont distinctes peut-on former avec les lettres de E ?

Corrigé

(a) C'est le nombre de combinaisons de 3 parmi 6 (car 6 éléments dans E), donc :

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6\times5\times4}{3\times2} = \boxed{20}$$

(b) C'est le nombre de 3-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 6 éléments, donc :

$$\frac{6!}{3!} = 6\times5\times4 = \boxed{120}$$

(c) Voici deux méthodes possibles.

Méthode 1 Dans un mot de 3 lettres, il y a soit 3, soit 2, soit 1 lettre(s) distincte(s).
Donc le résultat est : nombre de mots total - nombre de mots à 3 lettres distinctes - nombre de mots à 1 lettre (soit trois lettres identiques).
On trouve :

$$6^3 - 6\times5\times4 - 6 = 6(36-20-1) = 90$$

Méthode 2 Pour chaque sous ensemble de 2 lettres, on prend tous les mots que l'on peut construire avec ces deux lettres sauf ceux dont toutes les lettres sont identiques. Notre nombre est donc :

$$\binom{6}{2}\times(2^3-2) = \frac{6\times5}{2}\times6 = 90$$

51. Une enquête sur la lecture de trois revues X, Y, Z, portant sur un échantillon de 1 000 personnes donne les résultats suivants

- 60 % lisent X, 50 % lisent Y et 50 % lisent Z ;
- 20 % lisent Y et Z, 30 % lisent X et Z et 30 % lisent X etY ;
- 10 % lisent les trois revues.

Parmi ces 1 000 personnes :

(a) Combien lisent deux de ces revues exactement ?

(b) Combien ne lisent aucune de ces revues ?.

Corrigé

(a) On appelle E l'ensemble des personnes de l'échantillon. On définit les sous-ensembles suivants :

— A : " Ceux qui lisent exactement deux de ces revues "

— X : " Ceux qui lisent la revue X "

— Y : " Ceux qui lisent la revue Y "

— Z : " Ceux qui lisent la revue Z "

Alors, on peut construire les sous-ensembles : :
$|(X \cap Y) \setminus Z| = |X \cap Y| - |X \cap Y \cap Z|$: Ceux qui lisent X et Y sans lire Z
$|(X \cap Z) \setminus Y| = |X \cap Z| - |X \cap Y \cap Z|$: Ceux qui lisent X et Z sans lire Y
$|(Y \cap Z) \setminus X| = |Y \cap Z| - |X \cap Y \cap Z|$: Ceux qui lisent Y et Z sans lire X

$$\begin{aligned}
|A| &= |(X \cap Y) \setminus Z| + |(X \cap Z) \setminus Y| + |(Y \cap Z) \setminus X| \\
&= (|X \cap Y| - |X \cap Y \cap Z|) + (|X \cap Z| - |X \cap Y \cap Z|) + (|Y \cap Z| - |X \cap Y \cap Z|) \\
&= |X \cap Y| + |X \cap Z| + |Y \cap Z| - 3 \cdot |X \cap Y \cap Z| \\
&= 300 + 300 + 200 - 3 \times 100 \\
&= \boxed{500}
\end{aligned}$$

(b) On définit les sous-ensembles :

— L : "Ceux qui lisent au moins une revue."

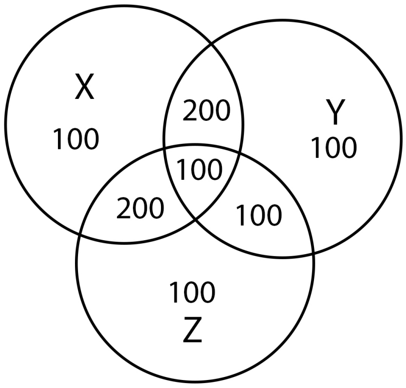
— $\overline{L}$: "Ceux qui ne lisent aucune revue."

$$|L| = |X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |Y \cap Z| - |X \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$

$$|L| = 600 + 500 + 500 - 300 - 200 - 300 + 100 = 900$$

$$|\overline{L}| = |E| - |L| = 100$$

On peut aussi représenter L par le diagramme de Venn pour calculer son cardinal :



Nous pouvons donc dire que $\boxed{\text{100 personnes ne lisent aucune revue}}$

52. Sur un damier de seize cases (4x4) on place quatre jetons sur quatre cases différentes.

(a) Si les jetons sont de quatre couleurs différentes, de combien de façons peut-on les disposer ?

(b) Si les jetons sont identiques, de combien de façons peut-on les disposer ?

(c) Si deux jetons sont blancs et les deux autres sont noirs, de combien de façons peut-on les disposer ?

Corrigé :

(a) C'est le nombre de 4-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 16 éléments, donc :

$$\frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 16 \times 15 \times 14 \times 13 = \boxed{43\,680}$$

(b) C'est le nombre de combinaisons de 4 parmi 16, donc :

$$\binom{16}{4} = \frac{16!}{4!\,12!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{4 \times 3 \times 2} = \boxed{1\,820}$$

(c) i. Méthode 1 :
Il suffit de multiplier le résultat précédent par $\binom{4}{2}$ correspondant au nombre de combinaisons de 2 blancs parmi 4 (ou de 2 noirs parmi 4), ce qui donne :

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{16}{4} = \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{16!}{4!\,12!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{2 \times 2} = \boxed{10\,920}$$

ii. Méthode 2 :
Nous avons 2 choix parmi 16 (cases totales) pour les blancs (ou noirs) et 2 choix parmi 14 (les 14 cases restantes non occupées) pour l'autre couleur.
Ce qui donne :

$$\binom{16}{2} \cdot \binom{14}{2} = \frac{16!}{2!\,14!} \cdot \frac{14!}{2!\,12!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{2 \times 2} = \boxed{10\,920}$$

53. En utilisant exclusivement les chiffres 3, 4, 5, 6 , 7 et 8, on désire former un nombre comportant 4 chiffres.

(a) Combien y a-t-il de possibilités si les chiffres ne sont pas nécessairement distincts ?

(b) Combien y a-t-il de possibilités si tous les chiffres doivent être distincts ?

(c) Combien y a-t-il de possibilités :

i. Si le nombre obtenu doit être inférieur à 5000 ?

ii. Si 3 et 4 ne doivent pas se suivre dans cet ordre (pas de 34)·

Corrigé :

(a) Si les chiffres ne sont pas nécessairement distincts, on a 6 possibilités pour chaque chiffres, avec 4 chiffres au total, ce qui donne :

$$6^4 = \boxed{1\,296 \text{ possibilités}} \text{ au total}$$

(b) C'est le nombre de 4-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 6 éléments, donc :

$$\frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \boxed{360}$$

(c) i. Pour avoir les nombres inférieurs à 5000, sachant qu'il n'y a aucun zéro, ce sont les nombres qui commencent par 3 ou par 4.
On a donc :

$$2 \times 6^3 = 2 \times 216 = \boxed{432}$$

ii. Comptons les nombres qui contiennent 3 et 4 qui se suivent. Ils sont aux formats 34** ou *34* ou **34 Chaque format compte $6^2 = 36$ nombres alors en tout $3 \times 36 = 108$ nombres. Il faut encore retirer 1 qui correspond à 3434 compté deux fois (dans le format 34** et dans le format **34). On soustrait 107 au nombre total 1296 d'où $1296 - 107 = 1189$ nombres qui ne contiennent pas 34.

54. Dans un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de mains de 5 cartes contenant :

(a) exactement un roi, une dame et 2 valets ?

(b) l'as de pique et au moins 2 trèfles ?

(c) exactement un roi et deux carreaux ?

Corrigé :
Pour tout cet exercice, il suffit de multiplier les différentes combinaisons entre elles

(a) On a :

— 1 roi à choisir parmi 4

— 1 dame à choisir parmi 4

— 2 valets à choisir parmi 4

— 1 dernière carte à prendre parmi les 20 restantes

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{20}{1} &= 4 \times 4 \times 6 \times 20 \\ &= \boxed{192} \end{aligned}$$

(b) Au moins deux trèfles signifie d'en avoir 2, 3 ou 4.
Il faut donc additionner les différents cas pour trouver le nombre total de mains.
On a :

— 1 carte précise (as de pique)

— k trèfles à choisir parmi 8

— $4 - k$ autres cartes à prendre parmi les 23 restantes

i. Si 2 trèfles ($k = 2$), on a :

$$\begin{aligned} 1 \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{23}{2} &= \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{23 \times 22}{2} \\ &= \boxed{7\,084} \end{aligned}$$

ii. Si 3 trèfles ($k = 3$), on a :

$$\begin{aligned} 1 \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{23}{1} &= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \times 23 \\ &= \boxed{1\,288} \end{aligned}$$

iii. Si 4 trèfles ($k = 4$), on a :

$$\begin{aligned} 1 \cdot \binom{8}{4} &= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} \\ &= \boxed{70} \end{aligned}$$

Au total on obtient alors :

$$7\,084 + 1\,288 + 70 = \boxed{8\,442} \text{ possibilités}$$

(c) Exactement un roi et deux carreaux signifie avoir " Un roi de carreau et un autre carreau non roi " ou " Un roi non carreau et deux carreaux non roi "
Il faut donc additionner les différents cas pour trouver le nombre total de mains.

i. Si " Un roi de carreau et un autre carreau non roi ", on a :

— 1 carte précise (roi de carreau)

— 1 carreau à choisir parmi 7 (roi de carreau enlevé)

— 3 autres cartes à prendre parmi 21 (32 - 8 carreaux - 3 autres rois)

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} 1 \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{21}{3} &= 7 \times \frac{21 \times 20 \times 19}{3 \times 2} \\ &= \boxed{9\,310} \end{aligned}$$

ii. Si " Un roi non carreau et deux carreaux non roi ", on a :

— 1 roi parmi 3 (sans le roi de carreau)

— 2 carreaux à choisir parmi 7 (roi de carreau enlevé)

— 2 autres cartes à prendre parmi 21 (32 - 8 carreaux - 3 autres rois)

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\binom{3}{1}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{21}{2} &= 3\times\frac{7\times 6}{2}\times\frac{21\times 20}{2}\\ &= \boxed{13\,230}\end{aligned}$$

Au total on obtient alors :

$$9\,310+13\,230=\boxed{22\,540}\text{ possibilités}$$

55. On considère une urne A contenant 20 boules dont 4 boules jaunes , 10 boules vertes et 6 boules rouges .
On tire 2 boules successivement et sans remise dans cette urne et on s'intéresse à la couleur des boules tirées.

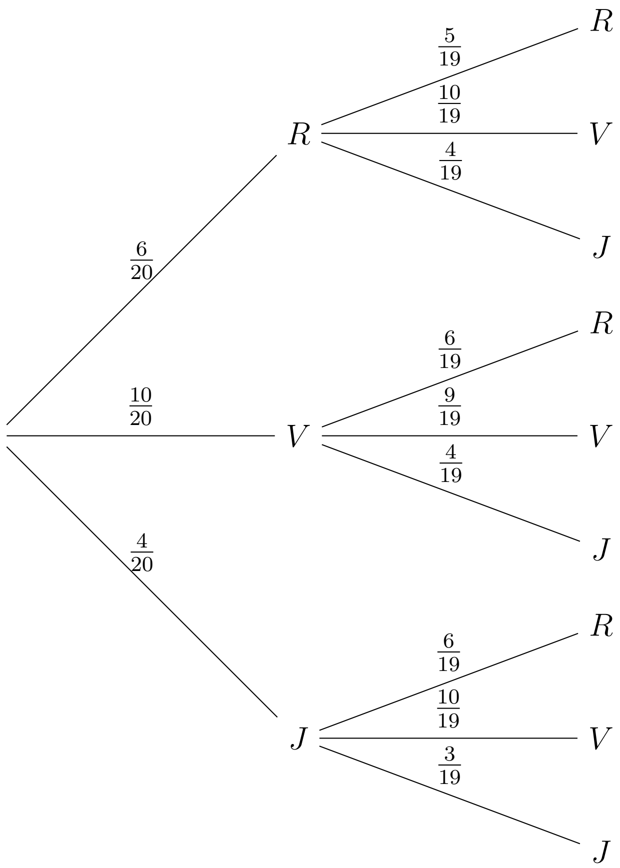
(a) Cette expérience est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?

(b) Déterminer la probabilité de l'événement : « obtenir 2 boules rouges » .

(c) Déterminer la probabilité de l'événement : « obtenir 1 boule verte et 1 boule jaune ».

(d) Déterminer la probabilité que la première boule soit jaune sachant que la deuxième est rouge.

Corrigé :



(a) Cette expérience n'est pas une succession d'épreuves indépendantes car le deuxième tirage se fait sans remise : il dépend donc directement du premier.

(b) On appelle B l'évènement : "obtenir 2 boules rouges".
$P(B) = \dfrac{6}{20} \times \dfrac{5}{19} = \boxed{\dfrac{3}{38}}$

(c) On appelle C l'évènement : " obtenir 1 boule verte et 1 boule jaune "

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{10}{20} \times \frac{4}{19} + \frac{4}{20} \times \frac{10}{19} \\ &= 2 \times \frac{4}{38} \\ &= \boxed{\frac{4}{19}} \end{aligned}$$

(d) On appelle J_1 l'évènement : "la première boule est jaune"
et R_2 l'évènement : "la deuxième boule est rouge".

$P(R_2) = \dfrac{6}{20} \times \dfrac{5}{19} + \dfrac{10}{20} \times \dfrac{6}{19} + \dfrac{4}{20} \times \dfrac{6}{19} = \dfrac{6}{20}$
et $P(J_1 \cap R_2) = \dfrac{4}{20} \times \dfrac{6}{19}$

$$P_{R_2}(J_1) = \frac{P(J_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{4}{20} \times \frac{6}{19}}{\frac{6}{20}} = \boxed{\frac{4}{19}}$$

56. On considère une urne A contenant 10 boules dont 5 boules jaunes , 3 boules vertes et 2 boules rouges.
On tire avec remise 2 boules dans cette urne.
On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

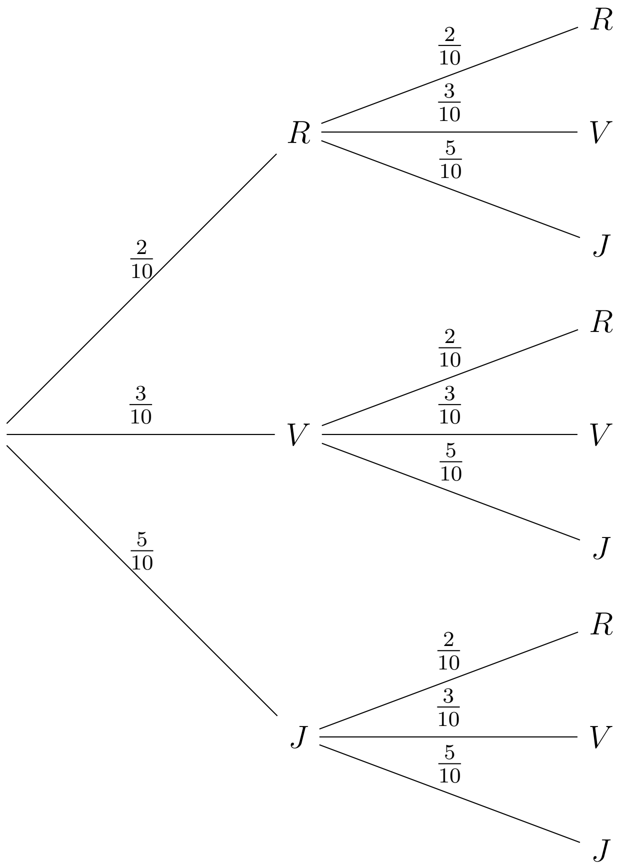
(a) Cette expérience est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?

(b) Déterminer la probabilité de l'événement : « obtenir 2 boules rouges » .

(c) Déterminer la probabilité de l'événement : « obtenir 1 boule verte et 1 boule jaune ».

(d) Déterminer la probabilité que la première boule soit jaune sachant que la deuxième est rouge.

Corrigé :



(a) Cette expérience est une succession d'épreuves indépendantes car c'est un tirage avec remise donc le deuxième tirage ne dépend pas du tout du premier.

(b) On appelle B l'événement :"obtenir 2 boules rouges" .

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{2}{10} \times \frac{2}{10} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \\ &= \boxed{\frac{1}{25}} \end{aligned}$$

(c) On appelle C l'événement : "obtenir 1 boule verte et 1 boule jaune "

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{3}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} \\ &= 2 \times \frac{15}{100} = 2 \times \frac{3}{20} \\ &= \boxed{\frac{3}{10}} \end{aligned}$$

(d) On appelle J_1 l'évènement : "la première boule est jaune"
et R_2 l'évènement : "la deuxième boule est rouge".
Comme les deux tirages sont indépendants, J_1 et R_2 le sont aussi. Ainsi : $P_{R_2}(J_1) = P(J_1)$
Donc : $P_{R_2}(J_1) = \dfrac{5}{10} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

Géométrie dans l'espace

57. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite (AB) où $A(1;2;-1)$ et $B(0;1;3)$ et le plan P d'équation $x+y+z-1=0$.
Étudier l'intersection de la droite (AB) et du plan P.

Corrigé :
Soit M un point de coordonnées $(x;\ y;\ z)$
M appartient à la droite $(AB) \iff$ il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}$. Donc M appartient à la droite $(AB) \iff \begin{cases} x &= 1-t \\ y &= 2-t \\ z &= -1+4t \end{cases}$

Un point M appartient à l'intersection de (AB) et P si :
$x+y+z-1=0 \iff (1-t)+(2-t)+(-1+4t)-1=0 \iff 2t+1=0 \iff t=-\dfrac{1}{2}$

Donc $\boxed{\text{la droite } (AB) \text{ et le plan } P \text{ se coupent en un unique point } M(x;\ y;\ z)}$ où :
$$\begin{cases} x &= 1+\frac{1}{2} \\ y &= 2+\frac{1}{2} \\ z &= -1-\frac{4}{2} \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x &= \frac{3}{2} \\ y &= \frac{5}{2} \\ z &= -3 \end{cases}}$$

58. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les plans P et R d'équations respectives :
$(P)\ :\ x-3y+2z=5$ et $(R)\ :\ 2x+y+7z=1$

(a) Montrer que les plans P et R sont sécants.

(b) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

Corrigé :

(a) P et R sont sécants si et seulement si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires, c'est à dire pas proportionnels.
Un vecteur normal de P est $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de R est $\overrightarrow{n_R}\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_R}$ ne sont pas proportionnels donc $\boxed{P \text{ et } R \text{ sont sécants et leur intersection est une droite.}}$

(b) L'intersection de P et R est l'ensemble des points $M(x;\ y;\ z)$ tels que : $\begin{cases} x-3y+2z &= 5 \\ 2x+y+7z &= 1 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x-3y+2z &= 5 \\ 2x+y+7z &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5+3y-2z \\ 2(5+3y-2z)+y+7z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 11+\frac{23}{3}y \\ z = -3-\frac{7}{3}y \end{cases}$$

En posant $t = \frac{y}{3}$, on obtient l'équation paramétrique : $\boxed{\begin{cases} x &= 11+23t \\ y &= 3t \\ z &= -3-7t \end{cases}}$

59. Soit d et d' les droites ayant pour représentations paramétriques respectives :

$\begin{cases} x = -3+t \\ y = -2-t \\ z = -1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = k \\ y = 1+k \\ z = -1-4k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

Étudier l'intersection des deux droites d et d'.

Corrigé :

d et d' sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Un vecteur directeur de d est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d' est $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas proportionnels donc d et d' ne sont pas parallèles.

L'intersection de d et d' est l'ensemble des points $M(x;\ y;\ z)$ vérifiant : $(E)\begin{cases} x &= -3+t &= k \\ y &= -2-t &= 1+k \\ z &= -1+t &= -1-4k \end{cases}$

$$(E) \Longrightarrow \begin{cases} t &= k+3 \\ -2-(k+3) &= 1+k \\ -1+(k+3) &= -1-4k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t &= k+3 \\ k &= -3 \\ 5k &= -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t &= k+3 \\ k &= -3 \\ k &= -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Les deux dernières lignes sont incompatibles donc cette équation n'a pas de solution.

On en déduit que les droites d et d' ne sont pas sécantes.

$\boxed{\text{On en conclut que } d \text{ et } d' \text{ n'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont non coplanaires}}$.

60. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $A(1;-1;2)$, $B(3;3;8)$, $C(-3;5;4)$ et $D(1;2;3)$.

(a) Le triangle BCD est -il rectangle ?

(b) Les quatre points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

Corrigé :

(a) Le triangle BCD est -il rectangle ?

On calcule les vecteurs $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}6\\-2\\4\end{pmatrix}$.

On a : $DB^2 = 4+1+25 = 30 \quad DC^2 = 16+9+1 = 26 \quad CB^2 = 36+4+16 = 56$
Donc : $DB^2 + DC^2 = CB^2$.
Par la réciproque du théorème de Pythagore, $\boxed{\text{le triangle } BCD \text{ est rectangle en } D}$.

(b) Les quatre points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?
Les points B, C et D n'étant pas alignés ils déterminent un plan de repère $\left(D, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right)$.
Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si $A \in (BCD)$, autrement dit si on peut trouver deux réels α, β tels que :

$$\alpha\overrightarrow{DB} + \beta\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} \iff \left\{\begin{array}{ll} 2\alpha - 4\beta & = 0 \\ \alpha + 3\beta & = -3 \\ 5\alpha + \beta & = -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} \alpha & = 2\beta \\ 5\beta & = -3 \\ 11\beta & = -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \alpha & = 2\beta \\ \beta & = -\frac{3}{5} \\ \beta & = -\frac{1}{11} \end{array}\right.$$

Les deux dernières lignes sont incompatibles donc cette équation n'a pas de solution.
On en conclut que $\boxed{\text{les points } A, B, C \text{ et } D \text{ ne sont pas coplanaires}}$.

STAGES PRÉPA CONCOURS ADVANCE

LA MEILLEURE PRÉPA ADVANCE

- Réveiller la motivation et l’enthousiasme
- Formules de préparation modulables
- Des intervenants spécialistes du concours
- Ateliers de prises de parole

Préparation concours Advance

STAGES PRÉPA CONCOURS ADVANCE EN LIGNE

- Une prépa en ligne avec suivi dès l'inscription
- Préparation rigoureuse, méthodique et efficace
- Conseils de méthodologie

Stage en ligne prépa concours Advance

https://groupe-reussite.fr/stages/toutes-matieres/prepa-concours-advance/france/toutes-periodes/