

5 mai 2018

## EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

### Consignes aux candidats

---

**Durée de l'épreuve : 1h30**

Vous devez commencer par remplir la partie administrative de votre fiche optique, avec indication de votre nom, prénom, et en cochant les cases de votre identifiant personnel : le numéro QCM.

- L'épreuve de Mathématiques se déroule sur 1h30 et est constituée de 6 questions obligatoires et de 6 questions à choisir parmi les questions numérotées de 7 à 14.
- Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.
- Pour chaque question :
  - Vous cochez la (ou les) case(s) **V** de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.
  - Vous cochez la (ou les) case(s) **F** de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.
  - Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses
- Toute case correctement remplie entraîne une bonification. Toute erreur est pénalisée. **Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte.**
- Seule la fiche optique est ramassée en fin d'épreuve.

### LES CALCULATRICES NE SONT PAS AUTORISÉES

Vérifiez que votre épreuve est constituée de 4 pages numérotées de 1 à 4. Dans le cas contraire, demandez un nouveau sujet.

---



## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 1 h 30

### Questions obligatoires

1. (A)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} = +\infty$

(B)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1$

(C)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 1}{x^2} = -\infty$

(D)  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e$

(E)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = 1$

2. (A) Si  $f(x) = -3x^4 + 2x^2 + 1$  alors  $f'(x) = -12x^3 + 4x + 1$

(B) Si  $f(x) = 2x^3 + x + \frac{4}{x^2}$  alors  $f'(x) = 6x^2 + 1 + \frac{4}{x^3}$

(C) Si  $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$  alors  $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x + 1)^2}$

(D) Si  $f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$  alors  $f'(x) = \frac{1 - x \ln(x)}{xe^x}$

(E) Si  $f(x) = \cos^2(x)$  alors  $f'(x) = -\sin(2x)$

3. Soit  $f$  la fonction dérivable sur  $]0, +\infty[$  définie par  $f(x) = x - \ln(x^2)$ . On donne  $\ln(2) \approx 0,69$ .

(A)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

(B)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(C)  $f$  est croissante sur  $]0, +\infty[$

(D)  $f'(1) = 0$

(E) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f(x) \geq 0$

4. Soit  $f$  la fonction dérivable sur  $]0, +\infty[$  définie par  $f(x) = e^{x+\ln(x)}$ .

- (A)  $f(1) = e$
- (B) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f(x) = e^x + x$
- (C)  $f$  est croissante sur  $]0, +\infty[$
- (D) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = (x + 1)e^x$
- (E)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$

5. Soit  $f$  la fonction dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  définie par  $f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x - 1}$ .

- (A)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
- (B)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
- (C)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$
- (D) Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f'(x) = \frac{2}{(e^x - 1)^2}$
- (E)  $f$  est croissante sur  $]0, +\infty[$

6. Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ . On considère que les 3 énoncés suivants sont vrais :

$$P_1 : \text{Si } f(0) = 1 \text{ et } f(1) \neq 2 \text{ alors } f(2) = 3$$

$$P_2 : \text{Si } f(2) = 3 \text{ ou } f(3) \neq 4 \text{ alors } f(0) \neq 1$$

$$P_3 : \text{Si } f(1) = 2 \text{ alors } f(3) \neq 4$$

- (A)  $P_2$  est équivalent à : Si  $f(0) = 1$  alors  $f(2) \neq 3$  ou  $f(3) = 4$
- (B) Si  $f(0) = 1$  alors  $f(2) \neq 3$
- (C) On peut avoir  $f(0) = 1$  et  $f(1) \neq 2$
- (D) On peut avoir  $f(0) = 1$  et  $f(1) = 2$
- (E) On peut affirmer que  $f(0) \neq 1$

### Questions à choisir

7. Soit  $q \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k$ .

- (A) Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=1}^n q^k = S_n - 1$
- (B) Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=1}^n q^k = qS_{n-1}$
- (C) Si  $q = 1$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = n$
- (D) Si  $q = -1$  alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = 0$
- (E) Si  $q \in ]-1, 1[$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$

---

8. Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ .

(A)  $(u_n)$  est une suite géométrique

(B)  $(u_n)$  est croissante

(C) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

(D)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

(E)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

9. (A)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) dx = 1$

(B)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x) dx = \frac{1}{3}$

(C)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} dx = 1 - \sqrt{2}$

(D)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2(x)) dx = 1$

(E)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx = 1$

10. Pour un nombre complexe  $z$ ,  $\operatorname{Re}(z)$  désigne sa partie réelle,  $\operatorname{Im}(z)$  sa partie imaginaire.  
Soit  $S$  l'ensemble des solutions de l'équation complexe :  $z + |z| = 1 + 2i$ .

(A) Si  $z \in S$  alors  $z \notin \mathbb{R}$

(B) Si  $z \in S$  alors  $\operatorname{Im}(z) = 2$

(C) Si  $z \in S$  alors  $|z| \geq 2$

(D) Si  $z \in S$  alors  $\operatorname{Re}(z) \geq -1$

(E)  $S = \{-1 + 2i\}$

11. (A)  $\frac{1 + 2i}{2 + i}$  est imaginaire pur

(B)  $\frac{1 + 2i}{2 - i}$  est imaginaire pur

(C)  $\frac{1 - 2i}{2 + i}$  est réel

(D)  $\left| \frac{1 + 2i}{2 + i} \right| = 1$

(E)  $\left| \frac{1 + 2i}{2 - i} \right| = 1$

12. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $I(3, -2, 2)$ ,  $J(6, 1, 5)$ ,  $K(6, -2, -1)$  et  $L(0, 4, -1)$ .

- (A)  $\vec{IJ} \cdot \vec{IK} = 0$
- (B) Le triangle  $(IJK)$  est rectangle
- (C)  $KL^2 = KI^2 + IL^2$
- (D) Le triangle  $(IKL)$  est rectangle
- (E) Le triangle  $(IJL)$  est rectangle

13. La durée de vie, en années, d'un composant électronique est une variable aléatoire  $T$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . On note  $f$  la fonction densité associée à  $T$  et on rappelle que pour tout  $t \geq 0$   $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ .

- (A)  $P(T \leq 5) = \lambda(1 - e^{-5\lambda})$
- (B) Si  $P(T \leq 5) = 0,9$  alors  $\lambda = \frac{\ln(10)}{5}$
- (C) La probabilité que le composant ne fonctionne plus au bout de 5 ans, sachant qu'il fonctionne depuis 2 ans, est  $P(2 \leq T \leq 5)$
- (D) La probabilité que le composant ait une durée de vie supérieure à 5 ans, sachant qu'il fonctionne depuis 2 ans, est  $\frac{P(T \geq 5)}{P(T \geq 2)}$
- (E) Si l'espérance de  $T$  est 5 alors  $\lambda = 5$

14. Soit la fonction  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ , qui a 3 racines réelles dans  $]-2, 2[$  dont une seule dans  $]1, 2[$ .

On note  $\alpha$  la racine dans  $]1, 2[$ . Pour avoir une valeur approchée de  $\alpha$  on utilise l'algorithme suivant :

Entrées : Donner les valeurs de  $a, b, N$

Variables :  $x$  réel,  $i$  entier

Traitement : Pour  $i$  allant de 1 à  $N$

$$x \leftarrow a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a)$$

Si  $f(a)f(x) > 0$

$$a \leftarrow x$$

Sinon

$$b \leftarrow x$$

Fin Si

Fin Pour

Sortie : Afficher  $x$

- (A) L'algorithme est basé sur le théorème des valeurs intermédiaires
- (B) Dans l'algorithme,  $x$  est l'abscisse du point intersection d'une droite avec l'axe des abscisses
- (C) Pour obtenir une valeur approchée de  $\alpha$ , on peut donner en entrées pour  $a$  et  $b$  :  $a = 0$  et  $b = 2$
- (D) Les entrées  $(a = 1, b = 2, N = 10)$  et  $(a = 2, b = 1, N = 10)$  donneront la même sortie
- (E) On peut remplacer la boucle « Pour  $i$  allant de 1 à  $N$  » par une boucle conditionnelle « Tant que  $(b-a) > 10^{-N}$  »

# STAGES PRÉPA CONCOURS ADVANCE

## LA MEILLEURE PRÉPA ADVANCE

- Réveiller la motivation et l'enthousiasme
- Formules de préparation modulables
- Des intervenants spécialistes du concours
- Ateliers de prises de parole

 [Préparation concours  
Advance](#)



## STAGES PRÉPA CONCOURS ADVANCE EN LIGNE

- Une prépa en ligne avec suivi dès l'inscription
- Préparation rigoureuse, méthodique et efficace
- Conseils de méthodologie

 [Stage en ligne prépa  
concours Advance](#)

