CONCOURS ADVANCE

Épreuve orale :
Enseignement optionnel
de Mathématiques complémentaires

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
(Enseignement optionnel de mathématiques complémentaires)
Consignes aux candidats

Durée de l'épreuve : 30 minutes

L'oral de mathématiques permet de vous évaluer sur la qualité de votre démarche de résolution des exercices en rapport avec le programme, votre maîtrise du programme, ainsi que l'agilité et la vitesse de résolution dont vous saurez faire preuve. Il permet en outre d'harmoniser votre niveau avec celui de tous les autres candidats.

Déroulement

- Afin de tenir compte de l'avancement de chacun dans le programme de Terminale et de vous permettre de démontrer vos compétences dans les meilleures conditions, vous disposerez d'une certaine marge de choix : vous pourrez éliminer un certain nombre de thèmes sur lesquels vous ne serez pas interrogé.
- Deux ou trois exercices vous seront ensuite proposés par l'examinateur. Après un temps de préparation, vous échangerez avec lui sur votre méthode de résolution.

Critères d'évaluation

- Maîtrise des savoirs disciplinaires liés au programme de terminale
- Capacités à dérouler un raisonnement et l'exposer de manière claire et rigoureuse
- Autonomie dans la résolution des exercices (avec ou sans aide de l'examinateur)

Notation

- Résolution de l'exercice
- Connaissance du cours associé au thème retenu
- Rapidité dans la résolution de l'exercice

Il est conseillé de s'exercer sur chacun des thèmes proposés et de s'entraîner à résoudre les exercices « à haute voix », seul ou avec des camarades de classe, en explicitant votre méthode de résolution ainsi que les éléments de cours mis en œuvre dans la même limite de temps que le jour de l'épreuve orale.

Annales de mathématiques du concours Advance

Option mathématiques complémentaires

Nous allons étudier les thèmes suivants :

— Suites

— Limites de fonctions

— Dérivée d'une fonction, convexité et variation

— Fonctions logarithmes et exponentielles

— Statistique et probabilités

CONCOURS ADVANCE

Thème 1 : Suites

Suite arithmético-géométrique

On considère les suites u et v telles que $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \quad \text{et} \quad v_n = u_n - 6.$$

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
2. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
3. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Correction

Rappel :

a) Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si pour tout n entier naturel on a :

$$u_{n+1} = u_n + r, \quad \text{où} \quad r \quad \text{est la raison de cette suite.}$$

b) Une suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} = q \times u_n, \quad \text{où} \quad q \quad \text{est la raison de cette suite.}$$

1. Pour vérifier qu'une suite est arithmétique, on calcule la différence des termes $u_{n+1} - u_n$ et si pour tout n, on obtient la même constante alors la suite (u_n) est arithmétique.
   On a $u_0 = 1$, calculons u_1 et u_2 :

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 3 = \frac{7}{2}, \qquad u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 3 = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} + 3 = \frac{19}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 - u_0 = \frac{5}{2} \\ u_2 - u_1 \neq \frac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n) \text{ n'est pas une suite arithmétique.}$$

   De même, pour vérifier qu'une suite est géométrique, on calcule le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et si pour tout n, on obtient la même constante alors la suite (u_n) est géométrique.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{u_1}{u_0} = \frac{7}{2} \\ \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n) \text{ n'est pas une suite géométrique.}$$

   Donc la suite (u_n) est ni arithmétique, ni géométrique.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_n - 6 \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}u_n - 3$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3. On sait que la suite (v_n) est géométrique donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Grâce à l'expression de $v_n = u_n - 6$, on peut facilement calculer $v_0 = u_0 - 6 = -5$. Ainsi

$$v_n = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Or,

$$v_n = u_n - 6 \Rightarrow u_n = v_n + 6$$

$$\Rightarrow u_n = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6.$$

Déterminer la raison et calculer des termes

1. La suite (u_n) est arithmétique. $u_0 = -2$ et $r = 5$. Déterminer u_{15}.
2. La suite (v_n) est arithmétique. $v_6 = 4$ et $r = -3$. Déterminer v_{15}.
3. La suite (w_n) est arithmétique. $w_4 = 2$ et $w_{10} = 14$. Déterminer la raison r et w_0.
4. La suite (t_n) est arithmétique. $t_2 + t_3 + t_4 = 12$. Déterminer t_3.

Correction

Rappel : (u_n) est **arithmétique** de raison r si et seulement si pour tout naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

1. Comme la suite (u_n) est arithmétique, donc

$$u_n = u_0 + nr = -2 + 5n \Rightarrow u_{15} = -2 + 5 \times 15 = 73.$$

2. Cherchons v_0. Comme la suite (v_n) est arithmétique, donc

$$v_n = v_0 + nr \Rightarrow v_6 = v_0 + 6r = v_0 + 6 \times (-3) = v_0 - 18$$

   Or, $v_6 = 4 \Rightarrow v_0 - 18 = 4 \Rightarrow v_0 = 22$. On pourra donc écrire

$$v_n = 22 + n \times (-3) \Rightarrow v_{15} = 22 + 15 \times (-3) = -23.$$

3. Comme la suite (w_n) est arithmétique, avec $w_4 = 2$ et $w_{10} = 14$. On pourra donc écrire (w_n) comme suit :
   $w_{10} = w_4 + 6r$ car entre w_4 et w_{10} nous avons 6 termes. Alors,

$$w_{10} = w_4 + 6r \Rightarrow 14 = 2 + 6r \Rightarrow 6r = 12 \Rightarrow r = 2.$$

   On peut aussi écrire

$$w_4 = w_0 + 4r \Rightarrow w_0 = w_4 - 4r = 2 - 4 \times 2 \Rightarrow w_0 = -6.$$

4. Comme la suite (t_n) est arithmétique, avec $t_2 + t_3 + t_4 = 12$. On pourra donc écrire les termes t_3 et t_4 comme suit :
   $t_3 = t_2 + r \Rightarrow t_2 = t_3 - r$ et $t_4 = t_3 + r$. On remplace t_2 et t_4 dans la somme des termes ci-dessus et on obtient

$$t_2 + t_3 + t_4 = (t_3 - r) + t_3 + (t_3 + r) = 3\,t_3$$

   Or,

$$t_2 + t_3 + t_4 = 12 \Rightarrow 3\,t_3 = 12 \Rightarrow t_3 = 4.$$

Suite arithmético-géométrique

Un lac contient 70 centaines de grenouilles hermaphrodites, elles peuvent changer de sexe au cours de leur vie. La population est supposée stable au cours du temps.

Au début de l'année 2020, le lac contient 7 centaines de mâles, et 63 centaines de femelles.

Chaque année, 20% des mâles deviennent femelles, et de même, 20% des femelles deviennent mâles.

Soit u_n le nombre de centaines de mâles au début de l'année $2020 + n$. Il est clair que $u_0 = 7$.

1. Montrer que $u_1 = 18,2$
2. Montrer que $u_{n+1} = 0,6u_n + 14$ pour tout naturel n.
3. Que dire de (u_n) ?
4. Exprimer u_n en fonction de n pour tout naturel n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$ et conclure.

Correction

1. $u_1 = u_0 \times 0,80 + (70 - u_0) \times 0,20 = 7 \times 0,80 + (70 - 7) \times 0,20 = 7 \times 0,80 + 63 \times 0,20 = 18,2$.

2. Pour tout naturel n : $u_{n+1} = u_n \times 0,80 + (70 - u_n) \times 0,20 = 0,80u_n + 70 \times 0,20 - 0,20u_n = 0,6 \times u_n + 14$.

3. Pour tout naturel n : $u_{n+1} = 0,6 \times u_n + 14$.
   Par conséquent, (u_n) est **arithmético-géométrique** de paramètres $a = 0,6$ et $b = 14$.

4. Recherchons une formule explicite pour (u_n) en 3 étapes :

   Etape 1 : On a : $l = al + b \Leftrightarrow l = 0,6l + 14 \Leftrightarrow 0,4l = 14 \Leftrightarrow l = \frac{14}{0,4} = 35$

   Etape 2 : On considère alors la suite v_n définie par $v_n = u_n - 35$, pour tout naturel n.

   Montrons que la suite (v_n) est géométrique de raison $a = 0,6$:
   Soit n un entier naturel, $v_{n+1} = u_n + 1 - 35 = 0,6 \times u_n + 14 - 35 = 0,6 \times u_n - 21$.

Or : $0,6 \times v_n = 0,6 \times (u_n - 35) = 0,6 \times u_n - 0,6 \times 35 = 0,6 \times u_n - 21$.
Ainsi : $v_{n+1} = 0,6 \times v_n$, et ceci est vrai pour tout entier naturel n.
Donc (v_n) est bien **géométrique** de raison $0,6$.

Etape 3 : Notons que $v_0 = u_0 - 35 = 7 - 35 = -28$.
Comme (v_n) est géométrique de raison $0,6$ et de premier terme -28, on obtient :

$$v_n = (-28) \times 0,6^n.$$

Par ailleurs, comme $v_n = u_n - 35$, on obtient : $v_n + 35 = u_n$. Ce qui donne finalement :

$$u_n = (-28) \times 0,6^n + 35$$

5. Comme 0<0,6<1, on a : $\lim_{n \to +\infty} (0,6^n) = 0$. Donc $\lim_{n \to +\infty} (u_n) = 35$.
Le nombre de mâles tend vers 35 centaines.

   Remarquons que, comme la population totale est de 70 centaines de grenouilles, le nombre de femelles tend également vers 35 centaines.

Modéliser un problème à l'aide d'une suite géométrique

Un entrepreneur investit un capital de départ de 20 000 euros pour son entreprise. Afin de la dynamiser, il injecte chaque mois une somme supplémentaire à son capital, celle-ci diminue de 30% chaque mois.

1. Calculer le total du capital investi à la fin de la première année.
2. Que peut-on penser de l'évolution de la somme total du capital investi dans un futur éloigné ?

Correction

Rappel : Somme des termes d'une suite géométrique

n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a

$$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

1. On note (u_n) le capital injecté au n-ième mois. Une baisse régulière de 30% est associée à une suite géométrique de raison $1-30\%$ alors $u_{n+1} = 0,7u_n$.
   (u_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,7$ et de premier terme $u_0 = 20\,000$.

   Le total du capital investi à la fin de la première année est :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{11} \\ &= 20\,000 + 20\,000 \times 0,7 + 20\,000 \times 0,7^2 + \cdots + 20\,000 \times 0,7^{11} \\ &= 20\,000 \times (1 + 0,7 + 0,7^2 + \cdots + 0,7^{11}) \\ &= 20\,000 \times \frac{1-0,7^{12}}{1-0,7} \\ &\approx 65\,744 \end{aligned}$$

2. Il s'agit de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

   En reprenant le principe des calculs effectués dans la question 1, on obtient :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= 20\,000 \times \frac{1-0,7^{n+1}}{1-0,7} \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{n \to +\infty} 0,7^{n+1} = \lim_{n \to +\infty} 0,7 \times 0,7^n = 0, \text{ car } 0 \leq q = 0,7 < 1.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} S_n &= 20\,000 \times \frac{1 - 0,7^{n+1}}{1 - 0,7} \\
&= 20\,000 \times \frac{1}{1 - 0,7} \\
&= \frac{20\,000}{0,3} \\
&\approx 66\,666,67
\end{aligned}$$

Dans un futur éloigné, la somme totale du capital investi tend à se rapprocher de $66\,666,67$ euros.

Thème 1 : limites des fonctions

Limite d'une fonction - forme indéterminée - asymptote

Déterminer les limites suivantes et interpréter graphiquement :

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} 2x^3-5x^2+1, \quad 2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1-x},$$

$$3)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x-1}{2x^2+x}, \quad 4)\ \lim_{x\to+\infty}(2x-3)\times\frac{1}{x+1}.$$

Correction

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3-5x^2+1$. On obtient facilement

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -5x^2=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} 2x^3-5x^2+1=+\infty-\infty$$

ce qui conduit à une forme indéterminée. Afin de lever l'indétermination, il faudrait mettre en facteur le terme prépondérant. Cela veut dire, on factorise par le terme "dominant" de la somme $2x^3-5x^2+1$. On obtient :

$$2x^3-5x^2+1=x^3\left(2-\frac{5x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)=x^3\left(2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}\right)$$

Et donc

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}=2\end{array}\right\}\Rightarrow \text{par produit } \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{2x^3-5x^2+1}=(+\infty)\times\mathbf{2}=+\infty.$$

Donc il n'y a ni asymptote horizontale, ni verticale en $+\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{1-x}$. On obtient facilement

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-x=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{par quotient } \lim_{\mathbf{x}\to+\infty}\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1-x}}=\mathbf{0}.$$

Donc la droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

3. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x-1}{2x^2+x}$. Au dénominateur, on se trouve dans le cas d'une forme indéterminée $+\infty-\infty$. Afin de lever l'indétermination, il faudrait mettre en facteur le terme prépondérant. Cela veut dire, on factorise par le terme "dominant" au numérateur et au dénominateur. On obtient

$$\frac{x^3+x-1}{2x^2+x} = \frac{x^3\left(1+\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(2+\frac{x}{x^2}\right)} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{2+\frac{1}{x}}$$

On obtient facilement,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2+\frac{1}{x}=3\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ par quotient } \lim_{\mathbf{x}\to-\infty}\frac{\mathbf{x^3+x-1}}{\mathbf{2x^2+x}}=-\infty.$$

Donc il n'y a ni asymptote horizontale, ni verticale en $-\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)\times\frac{1}{x+1}$. On se trouve dans le cas d'une forme indéterminée $+\infty\times 0$. Afin de lever l'indétermination, il faudrait mettre en facteur le terme prépondérant. Cela veut dire, on factorise par le terme "dominant" au numérateur et au dénominateur. On obtient

$$(2x-3)\times\frac{1}{x+1} = \frac{2x-3}{x+1} = \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}.$$

On obtient facilement,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{3}{x}=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ par quotient } \lim_{\mathbf{x}\to+\infty}(\mathbf{2x-3})\times\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x+1}}=\mathbf{2}.$$

Donc la droite d'équation $y=2$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

Limite de suite géométrique

Déterminer les limites éventuelles suivantes :

$$1)\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n, \qquad 2)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}, \qquad 3)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{2^{2n}},$$

$$4)\ \lim_{n\to+\infty}(-1)^n, \qquad 5)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Correction

Rappel sur la limite de q^n :

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Nous sommes dans le cas où $q = \frac{2}{3}$, et $-1 < \frac{2}{3} < 1$ Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}$. Nous sommes dans le cas où $q = 2$, et $2 > 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty.$$

$$\Rightarrow \text{par quotient } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0.$$

Autre méthode : On pourra réécrire $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Nous sommes dans le cas où $q = \frac{1}{2}$, et $-1 < \frac{1}{2} < 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0.$$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n}{2^{2n}}$. Réecrivons d'abord la suite $\frac{3^n}{2^{2n}}$ sous la forme q^n. On a

$$\frac{3^n}{2^{2n}} = \frac{3^n}{(2^2)^n} = \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Nous sommes dans le cas où $q = \frac{3}{4}$, et $-1 < \frac{3}{4} < 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{2^{2n}} = 0.$$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$. Nous sommes dans le cas où $q = -1$ et $q \leq -1$.
Donc la suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$. Réecrivons d'abord la suite $\frac{(-1)^n}{2^n}$ sous la forme q^n. On a

$$\frac{(-1)^n}{2^n} = \left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

Nous sommes dans le cas où $q = \frac{-1}{2}$, et $-1 < \frac{-1}{2} < 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0.$$

Limite d'une fonction - asymptote

Déterminer les limites suivantes. En déduire les éventuelles asymptotes :

$$1)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{1+2e^x}, \qquad 2)\ \lim_{x\to+\infty} (x+1)e^x,$$
$$3)\ \lim_{x\to+\infty} \left(x^3+\frac{1}{x}+3\right)\sqrt{x}, \qquad 4)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\ln x}{x^2}.$$

Correction

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{8}{1+2e^x}$. Sachant que la $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on obtient facilement

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} 8 = 8 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+2e^x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par quotient } \lim_{\mathbf{x}\to-\infty} \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{1+2e^x}} = \mathbf{8}.$$

Donc la droite horizontale d'équation $y = 8$ (parallèle à l'axe des abscisses) est une asymptote en $-\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^x$. Sachant que la $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on obtient facilement

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par produit } \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} (\mathbf{x}+\mathbf{1})\mathbf{e^x} = +\infty.$$

Donc il n'y a ni asymptote horizontale, ni verticale en $+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3+\frac{1}{x}+3\right)\sqrt{x}$. On obtient facilement,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3+\frac{1}{x}+3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par produit } \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \left(\mathbf{x^3}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}+\mathbf{3}\right)\sqrt{\mathbf{x}} = +\infty.$$

Donc il n'y a ni asymptote horizontale, ni verticale en $+\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1+\ln x}{x^2}$. Sachant que la $\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$, on obtient facilement

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0} 1+\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0} x^2 = 0,\ \text{ et } x^2 \text{ reste strictement positif} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{par quotient } \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{1}+\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x^2}} = -\infty.$$

Donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale en 0.

Limite et encadrement - Théorème des gendarmes

Déterminer les limites suivantes :

$$1)\lim_{x\to+\infty} x+\cos(x),\qquad 2)\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(2x)}{x},\qquad 3)\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin(x)}{x},\qquad 4)\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{x}.$$

Correction

Théorème de comparaison

On a $f(x)\leq g(x)$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\cos(x)$. On a

$$-1\leq\cos(x)\leq1$$

$$x-1\leq x+\cos(x)\leq1+x$$

$$\left.\begin{array}{l} x-1\leq x+\cos(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{par comparaison } \lim_{\mathbf{x}\to+\infty}\mathbf{x}+\cos(\mathbf{x})=+\infty.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin(2x)}{x}$.

Théorème des gendarmes

On a $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=L$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.
Soit $x>0$

$$-1\leq\sin(2x)\leq1$$

Donc

$$\frac{-1}{x}\leq\frac{\sin(2x)}{x}\leq\frac{1}{x}$$

Or,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{d'après le théorème des gendarmes } \lim_{\mathbf{x}\to+\infty}\frac{\sin(\mathbf{2x})}{\mathbf{x}}=\mathbf{0}.$$

3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}$. Soit $x > 0$

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

Donc

$$x - 1 \leq x + \sin(x) \leq 1 + x$$

D'où

$$\frac{x-1}{x} \leq \frac{x+\sin(x)}{x} \leq \frac{x+1}{x}$$

Or,

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ d'après le théorème des gendarmes } \lim_{\mathbf{x} \to +\infty} \frac{\mathbf{x} + \sin(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} = \mathbf{1}.$$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$.

<u>**Limite importante :**</u> $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{\sin(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} = \mathbf{1}$

Soit $x > 0$, on pourra écrire

$$\frac{\sin(2x)}{x} = 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x}.$$

On pose $X = 2x$, on obtient

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{X \to 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1.$$

Donc

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{\sin(\mathbf{2x})}{\mathbf{x}} = \mathbf{2}.$$

Thème 3 : Dérivée d'une fonction, convexité et variation

Dérivée d'une fonction

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$1) f(x) = \ln(x^2+1), \qquad 2) g(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)}, \qquad 3) h(x) = e^{-2x+1} + 3\ln(x^2)$$

Correction

1. La fonction $f(x)$ est de la forme $\ln u$ et $f'(x) = \frac{u'}{u}$
   On pose, $u = x^2+1 \Rightarrow u' = 2x$, on obtient
   $$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$
2. La fonction $g(x)$ est de la forme $\sqrt{u}$ et $g'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
   On pose, $u = \ln(x^2+1) \Rightarrow$ d'après 1) $u' = f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, on obtient
   $$g'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{2\sqrt{\ln(x^2+1)}} = \frac{2x}{x^2+1} \times \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+1)}} = \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{\ln(x^2+1)}}.$$
3. La fonction $h(x)$ est de la forme $e^u + 3\ln v$ et $h'(x) = u'e^u + 3\frac{v'}{v}$
   On pose, $u = -2x+1 \Rightarrow u' = -2$ et $v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$, on obtient
   $$h'(x) = (-2) \times e^{-2x+1} + 3 \times \frac{2x}{x^2} = -2 \times e^{-2x+1} + \frac{6}{x}.$$

Dérivée d'une fonction

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1)k(x) = \frac{10-x}{2x}, \qquad 2)g(x) = \sqrt{3x+1} + (-2x+1)^3, \qquad 3)q(x) = (\ln(x+1))^{2020}$$

Correction

1. La fonction $k(x)$ est de la forme $\frac{u}{v}$ et $k'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
   On pose, $u = 10 - x \Rightarrow u' = -1$ et $v = 2x \Rightarrow v' = 2$, on obtient
   $$k'(x) = \frac{(-1)\times(2x)-(10-x)\times 2}{(2x)^2} = \frac{-2x-20+2x}{4x^2} = \frac{-20}{4x^2} = -\frac{5}{x^2}.$$
2. La fonction $g(x)$ est de la forme $\sqrt{u} + v^3$ et $g'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} + 3v'v^2$
   On pose, $u = 3x+1 \Rightarrow u' = 3$ et $v = -2x+1 \Rightarrow v' = -2$, on obtient
   $$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} + 3\times(-2)\times(-2x+1)^2 = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} - 6\times(-2x+1)^2.$$
3. La fonction $q(x)$ est de la forme u^{2020} et $q'(x) = 2020 \times u' \times u^{2019}$
   On pose, $u = \ln(x+1) \Rightarrow u' = \frac{1}{x+1}$, on obtient
   $$q'(x) = 2020 \times \frac{1}{x+1} \times (\ln(x+1))^{2019} = \frac{2020}{x+1} \times (\ln(x+1))^{2019}.$$

Dérivées et convexité

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}.$$

1. Etudier la convexité de la fonction f.
2. Déterminer le point d'inflexion A de C_f.

Correction

1. **la convexité de la fonction f.**
   Rappel : Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle $]a;b[$.
   $*$ Si $f'' \geq 0$ sur $]a;b[$, alors f est convexe sur sur $]a;b[$.
   $*$ Si $f'' \leq 0$ sur $]a;b[$, alors f est concave sur sur $]a;b[$.
   Cette propriété est valable si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

   Etudions le signe de $f''(x)$:

$$f'(x) = -3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x + 0 = -3x^2 - 3x \Rightarrow f''(x) = -3 \times 2x - 3 = -6x - 3.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x - 3 = 0 \Leftrightarrow -6x = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

   De plus, son coefficient directeur -6 est strictement négatif. D'où le tableau de signes de f'' ci-dessous.

x	$-\infty$		$-0,5$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

   Par conséquent, f est convexe sur $]-\infty; -0,5]$ et concave sur $[-0,5; +\infty[$.
2. f'' s'annule en $-\frac{1}{2}$ en changeant de signe, par conséquent, C_f admet un point d'inflexion A en $-\frac{1}{2}$
   Comme

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$$

   le point d'inflexion A a donc pour coordonnées $(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4})$.

Dérivée et variation

Déterminer $f'(x)$, puis le signe de $f'(x)$ sur I, et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle I (sans les limites) :

1. $f(x) = 5e^{-x^2+1} \quad \text{sur} \quad I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = 5x\ln x + x \quad \text{sur} \quad I =]0, +\infty[$

Correction

1. $f(x) = 5e^{-x^2+1} \quad \text{sur} \quad I = \mathbb{R}$.
   On pose $f = k\,e^u$ avec $k = 5$ et $u = -x^2+1$. D'où $f'(x) = k\,u'e^u \quad$ avec $\quad u' = -2x$.
   Soit $f'(x) = 5 \times (-2x) \times e^{-x^2+1} = -10x\,e^{-x^2+1}$. f' est un produit de 2 facteurs.
   On résout $f'(x) = 0$, on aura :
   $*\quad -10x$ de coefficient -10 strictement négatif, et s'annule pour $x = 0$.
   $*\quad e^{-x^2+1}$ est une exponentielle, et donc par définition, elle est strictement positive.
   Le signe de f' et le sens de variation de la fonction f sont donnés ci-dessous, avec $f(0) = 5e^{-0^2+1} = 5e$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-10x$		$+$	0	$-$	
e^{-x^2+1}		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$5e$	$\searrow$	

2. $f(x) = 5x\ln x + x \quad \text{sur} \quad I =]0, +\infty[$
   On pose $f = uv + x$ avec $u = 5x$ et $v = \ln x$. D'où $f'(x) = u'v + uv' + 1$ avec $u' = 5$ et $v' = \frac{1}{x}$.
   Soit $f'(x) = 5\ln x + 5x\frac{1}{x} + 1 = 5\ln x + 5 + 1 = 5\ln x + 6$. f' est une somme de termes.
   On va chercher pour quels x, $5\ln x + 6 > 0$:

$$5\ln x + 6 > 0 \Leftrightarrow 5\ln x > -6 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{6}{5} \Leftrightarrow e^{\ln x} > e^{-\frac{6}{5}} \Leftrightarrow x > e^{-1{,}2}.$$

   De même, on obtient $5\ln x + 6 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow x = e^{-1{,}2}$.
   Le signe de f' et le sens de variation de la fonction f sont donnés ci-dessous.

x	0		$e^{-1,2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(e^{-1,2})$	$\nearrow$	

Thème 4 : Fonctions logarithmes et exponentielles

Simplifier une expression avec des logarithmes

Simplifier les expressions suivantes :

$$1)\ln 6-\ln 2,\quad 2)\ln(e^2),\quad 3)\ln\left(\frac{1}{e^x}\right),\quad 4)e^{\ln 4},\quad 5)e^{2\ln 5},\quad 6)e^{-\ln 3},\quad 7)\ln(\sqrt{e}),\quad 8)\ln(e^{-x}).$$

Correction

Rappelons d'abord les propriétes du cours

- $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$, $a>0$ et $b>0$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\ln e^x=x$.
- $e^{\ln a}=a$, $a>0$.
- $\ln a^n=n\ln a$, $n\in\mathbb{N}$ et $a>0$.
- $\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$, $a>0$.

En utilisant les propriétés ci-dessus, on obtient :

1. $\ln 6-\ln 2=\ln\frac{6}{2}=\ln 3$
2. $\ln(e^2)=2$
3. $\ln\left(\frac{1}{e^x}\right)=\ln 1-\ln e^x=0-x=-x$
4. $e^{\ln 4}=4$
5. $e^{2\ln 5}=e^{\ln 5^2}=5^2=25$
6. $e^{-\ln 3}=\frac{1}{e^{\ln 3}}=\frac{1}{3}$
7. $\ln(\sqrt{e})=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$
8. $\ln(e^{-x})=-x$

Étude de fonction logarithme

Soit f la fonction définie par
$$f(x) = 3x - \ln(2x-1).$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Calculer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f sur D_f.
3. En déduire que f admet pour minimum $2,5 - \ln\frac{2}{3}$ sur D_f.

Correction

1. $f(x)$ existe si et seulement si $2x-1>0$, soit : $x > \frac{1}{2}$. Donc $D_f =]\frac{1}{2}; +\infty[$.

2. On pose $u = 2x-1$, et donc $u' = 2$.
   Ici $f(x) = 3x - \ln u$, et par là $f'(x) = 3 - \frac{u'}{u}$. Donc
   $$f'(x) = 3 - \frac{2}{2x-1} = \frac{3(2x-1)}{2x-1} - \frac{2}{2x-1} = \frac{6x-3-2}{2x-1} = \frac{6x-5}{2x-1}.$$

   On résout $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x-5}{2x-1} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6x-5=0 \\ \text{et} \\ 2x-1 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{5}{6} \\ \text{et} \\ x \neq \frac{1}{2} \end{array}\right.$

   Le signe de f' et le sens de variation de la fonction f sont donnés ci-dessous.

x	$0,5$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$6x-5$		$-$	0	$+$	
$2x-1$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	↘		↗	

   Et par là, on en déduit que la fonction f admet pour minimum
   $$f(\frac{5}{6}) = 3 \times \frac{5}{6} - \ln\left(2 \times \frac{5}{6} - 1\right) = \frac{5}{2} - \ln\frac{2}{3} = 2,5 - \ln\frac{2}{3}.$$

Équations avec des logarithmes

On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x) \qquad (E)$$

Clara affirme que cette équation admet deux solutions. A-t-elle raison ? Justifier.

Correction

1. **Conditions d'existence :**

$$\begin{cases} 6x-2>0 \\ 2x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x>2 \\ 2x>1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{3} \\ x>\frac{1}{2} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x>\frac{1}{2}$$

l'équation E a un sens que lorsque $x>\frac{1}{2}$. Finalement, $D_E=]\frac{1}{2};+\infty[$.

2. **Résolvons** $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x)$. D'après les propriétés :
   - $\ln(A)+\ln(B)=\ln(A\times B)$
   - $\ln(A)=\ln(B)\Leftrightarrow A=B$

   On obtient :

$$\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x)\Leftrightarrow \ln[(6x-2)(2x-1)]=\ln(x)\Leftrightarrow (6x-2)(2x-1)=x$$

$$\Leftrightarrow 12x^2-11x+2=0$$

Il s'agit de résoudre un polynôme de degré 2, de discriminant $\Delta=b^2-4ac=25$, avec $a=12$, $b=-11$ et $c=2$. L'équation admet deux racines :

$$x_1=\frac{11-5}{24}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{11+5}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}.$$

La solution $\frac{1}{4}$ est à rejeter car elle n'appartient pas à D_E, et $x_2=\frac{2}{3}\in D_E$.
Donc l'équation admet une seule solution $\frac{2}{3}$. Donc l'affirmation de Clara est fausse.

Équations-Inéquations avec des logarithmes et exponentielles

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x+3} + 1 \leq 3$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x+2)(x-1) = \ln(2x+10)$

Correction

1. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$. Donc $D_E = \mathbb{R}$.

$$e^{x+3} + 1 \leq 3 \Leftrightarrow e^{x+3} \leq 3 - 1 \Leftrightarrow e^{x+3} \leq 2 \Leftrightarrow \ln e^{x+3} \leq \ln 2 \Leftrightarrow x + 3 \leq \ln 2 \Leftrightarrow x \leq \ln 2 - 3.$$

Donc l'ensemble de solution $\mathbf{S} =]-\infty; \ln \mathbf{2} - \mathbf{3}]$. Notons que $\ln 2 - 3 \approx -2,31$.

2. La fonction $\ln x$ est définie sur $]0; +\infty[$.
Dans notre cas, on doit avoir $(x+2)(x-1) > 0$ **et** $2x + 10 > 0$. Etudions ces deux inégalités :
   - $(x+2)(x-1) = x^2 + x - 2 > 0$, il s'agit d'un trinôme de racines -2 et 1, à coefficient dominant 1 strictement positif. Donc $(x+2)(x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$.
   - $2x + 10 > 0$, soit $x > -5$.

Donc, finalement : $D_E =]-5; -2[\cup]1; +\infty[$.

Résolvons $\ln(x+2)(x-1) = \ln(2x+10) \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 2x + 10 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$.

Il s'agit de résoudre un polynôme de degré deux, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 49$, avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = -12$. L'équation admet deux racines :

$$x_1 = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Ces 2 racines appartiennent à D_E.
Donc l'ensemble des solutions $\mathbf{S} = \{-\mathbf{3}; \mathbf{4}\}$.

Thème 5 : Probabilités et statistique

Lois discrètes

Dans chacun des cas suivants, on prélève un jeton au hasard dans un sac. X est la variable aléatoire donnant le numéro du jeton tiré .

— La variable X suit-elle une loi uniforme.

— Si c'est le cas, donner sa loi de probabilité et son espérance.

1. Le sac contient 30 jetons numérotés de 1 à 30.
2. Le sac contient 30 jetons numérotés de 1 à 3. Quinze jetons portent le numéro 1, dix jetons portent le numéro 2 et cinq jetons portent le numéro 3.
3. Le sac contient 30 jetons numérotés de 1 à 3. Dix jetons portent le numéro 1, dix jetons portent le numéro 2 et dix jetons portent le numéro 3.

Correction

1. X suit la **loi uniforme** sur $E = \{1, 2, 3, ..., 30\}$.
   On a : $X(\Omega) = E$. Et, pour tout k dans E, $\mathbf{p(X = k)} = \mathbf{\frac{1}{30}}$.
   La variable aléatoire X suivant la **loi uniforme** sur E admet pour espérance :
   $$E(X) = \frac{1+30}{2} = 15,5.$$
2. On a : $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
   — quinze jetons portent le numéro 1, cela veut dire que $p(X = 1) = \frac{15}{30}$,
   — dix jetons portent le numéro 2, cela veut dire que $p(X = 2) = \frac{10}{30}$,
   — cinq jetons portent le numéro 3, cela veut dire que $p(X = 3) = \frac{5}{30}$.
   On voit bien que ces 3 probabilités ne sont pas égales. La loi n'est donc pas uniforme.
3. X suit la **loi uniforme** sur $E = \{1, 2, 3\}$.
   On a : $X(\Omega) = E$. Et, pour tout k dans E, $\mathbf{p(X = k)} = \mathbf{\frac{10}{30}}$.
   La variable aléatoire X suivant la **loi uniforme** sur E admet pour espérance :
   $$E(X) = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Lois discrètes

Un virus a contaminé 1% de la population. On considère un échantillon de 100 personnes.
La population est suffisamment importante pour assimiler cet échantillon à un tirage aléatoire avec remise.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de malades dans l'échantillon.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'il y ait exactement 5 malades dans l'échantillon. On arrondira le résultat au dix millième.
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins 5 malades dans l'échantillon. On donnera une valeur arrondie au dix millième.
4. Déterminer la probabilité que le nombre de malades dans l'échantillon soit dans l'intervalle $[2; 5]$. On donnera une valeur arrondie au dix millième.

Correction

1. Le choix de l'échantillon revient à répéter 100 fois de manière **indépendante** une expérience à 2 issues :
   S : "la personne est malade"
   E :"la personne n'est pas malade".
   On a $p(S) = 0,01$, et X dénombre le nombre de "succès".
   On en déduit que X suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 100$ et $p = 0,01$.

2. A la calculatrice, on obtient : $p(X = 5) \approx 0,0029$.

3. On cherche $p(X \geq 5)$.
   Or $p(X \geq 5) = 1 - p(X < 5) = 1 - p(X \leq 4)$.
   Et à la calculatrice, on obtient : $p(X \leq 4) \approx 0,9966$.
   Donc $p(X \geq 5) \approx 0,0034$.

4. On cherche $p(2 \leq X \leq 5) = p(X \leq 5) - p(X < 2) = p(X \leq 5) - p(X \leq 1)$.
   Et à la calculatrice, on obtient : $p(X \leq 5) \approx 0,9995$ **et** $p(X \leq 1) \approx 0,7358$. Donc
   $$p(2 \leq X \leq 5) \approx 0,9995 - 0,7358 \approx 0,2637.$$

Lois à densité

Soit b un réel strictement supérieur à 1 et f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1; b]$.

1. Montrer que f est positive et continue.
2. Déterminer b pour que f soit une densité.

Correction

1. Il est clair que pour tout réel b strictement supérieur à 1, la fonction f est positive sur $[1; b]$. La fonction inverse $\frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, et par là, f est dérivable sur $[1; b]$, et donc f y est continue.
2. Par conséquent, f étant positive et continue, l'aire située entre C_f et l'axe des abscisses vaut :

$$A = \int_1^b f(x)dx$$

Or :

$$\int_1^b f(x)dx = \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^b = \ln b - \ln 1 = \ln b - 0 = \ln b$$

Donc : $A = \ln b$.
Donc, d'après la question 1, f est une densité si et seulement si

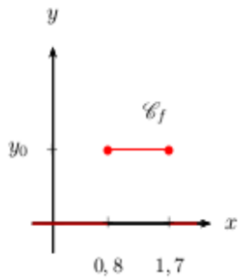
$$A = \int_1^b f(x)dx = 1$$

On résout donc : $A = 1 \Leftrightarrow \ln b = 1 \Leftrightarrow b = e$.

Finalement, f est une **densité** si et seulement si $b = e$.

Lois à densité

1. De quel type est la loi X associée à la densité f représentée ci-contre ? On déterminera la valeur de y_0.



2. Déterminer $P(1 \leq X \leq 1,5)$.
3. Quelle est l'espérance m de X ?

Correction

1. La fonction f est constante sur un intervalle et nulle ailleurs. Donc X suit une loi uniforme. L'intervalle étant $[0,8;1,7]$, la densité f est telle que $f(x) = \frac{1}{1,7-0,8} = \frac{1}{0,9} \approx 1,111$. C'est d'ailleurs la valeur de y_0.
2. $$p(1 \leq X \leq 1,5) = \int_1^{1,5} f(x)dx = \int_1^{1,5} \frac{1}{0,9}dx = \frac{1}{0,9}\int_1^{1,5} 1dx = \frac{1}{0,9}[x]_1^{1,5} = \frac{1}{0,9}(1,5-1)$$
   Soit
   $$p(1 \leq X \leq 1,5) = \frac{0,5}{0,9} \approx 0,556.$$
   Autre méthode : X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0,8;1,7]$, donc
   $$p(1 \leq X \leq 1,5) = \frac{1,5-1}{1,7-0,8} = \frac{0,5}{0,9} \approx 0,556.$$
3. L'espérance d'une variable aléatoire uniforme X à valeurs dans l'intervalle $[a;b]$ est définie par $E(X) = \frac{a+b}{2}$. Donc $m = \frac{1,7+0,8}{2} = 1,25$.

Question 1
Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 telle que $u_2 = 1$. Alors

$\boxed{\text{a.}}$ $u_7 = 32$

b. $u_7 = 64$

c. $u_7 = 128$

d. $u_7 = 16$

e. rien de ce qui précède

Question 2
Soient A et B deux événements d'un univers Ω de probabilité non nulle. Alors $P_A(B)$ est égale à

a. $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\boxed{\text{b.}}$ $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

c. $P(A \cap B)$ si A et B sont indépendants

d. $P(A)$ si A et B sont indépendants

e. rien de ce qui précède

Question 3
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 - e^x + 1}$ est égale à

$\boxed{\text{a.}}$ 0

b. $+\infty$

c. 3

d. -2

e. 1

Question 4
Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une solution de l'équation différentielle $2y' - y = x - 1$:

a. $x \longmapsto e^{2x} - x - 1$

b. $x \longmapsto x - 1$

c. $x \longmapsto 1 - x$

d. $x \longmapsto e^{2x}$

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 5
Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 2}$. Alors le domaine de définition de f est

- $\boxed{\text{a.}}$ $\mathbb{R}$
- b. $[-1, 2]$
- c. $]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$
- d. $\emptyset$
- e. rien de ce qui précède

Question 6
Soit $f : x \longmapsto \ln^9(x)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ est égale à

- a. $9 \ln^8(x)$
- b. $\dfrac{1}{x^9}$
- c. $\dfrac{9}{x^8}$
- d. $9 \ln(x)$
- $\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 7
Soit F une primitive d'une fonction f continue sur $[-1, 1]$. Alors

- a. $f' = F$
- $\boxed{\text{b.}}$ $F' = f$
- c. $F(-1) = f(-1)$ et $F(1) = f(1)$
- d. $F(-1) = F(1) = 0$
- e. rien de ce qui précède

Question 8
Dans une jeu de 32 cartes, on tire une main de 6 cartes (on rappelle que dans une main, l'ordre des cartes ne compte pas). Alors le nombre de mains possibles est

- a. 6^{32}
- b. 32^6
- $\boxed{\text{c.}}$ $\dbinom{32}{6}$
- d. $\dfrac{32!}{6!}$
- e. rien de ce qui précède

Question 9

Soit (u_n) une suite réelle. Alors

$\boxed{\text{a.}}$ si (u_n) est décroissante et minorée, (u_n) converge

b. si (u_n) est bornée, (u_n) converge

$\boxed{\text{c.}}$ si (u_n) est croissante et majorée, (u_n) converge

$\boxed{\text{d.}}$ si (u_n) est croissante et non majorée, (u_n) diverge

e. rien de ce qui précède

Question 10

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite d passant par $A(2,-1,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}$. Alors

a. $B(0,-2,1) \in d$

b. $B(0,1,-2) \in d$

$\boxed{\text{c.}}$ $B(3,1,-4) \in d$

d. $B(1,-3,-6) \in d$

e. rien de ce qui précède

Question 11

Une primitive de la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$\boxed{\text{a.}}$ $x \longmapsto x\ln(x) - x$

b. $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

c. $x \longmapsto e^x$

d. $x \longmapsto \ln(x)$

e. $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$

Question 12

Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+x-20}\,\ln\big(1-x^2\big)$. Alors le domaine de définition de f est

a. $]-1,1[$

b. $]-\infty,-5] \cup [4,+\infty[$

$\boxed{\text{c.}}$ $\emptyset$

d. $]-5,4[$

e. rien de ce qui précède

Question 13

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + x - 7}{1 - x}$ est égale à

a. $-\infty$

b. 1

c. -1

$\boxed{\text{d.}}$ $+\infty$

e. rien de ce qui précède

Question 14

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(1, -1, 2)$ et $B(2, 1, -1)$. Alors une équation cartésienne du plan orthogonal à la droite (AB) passant par $C(3, 3, -4)$ est

a. $x + 2y - 3z + 21 = 0$

b. $x + 2y - 3z + 15 = 0$

c. $x + 2y - 3z - 15 = 0$

d. $x + 2y - 3z - 1 = 0$

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 15

Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une solution de l'équation différentielle $3y' - y = 2 - x$:

$\boxed{\text{a.}}$ $x \longmapsto e^{x/3} + x + 1$

b. $x \longmapsto 2 - x$

c. $x \longmapsto -1 - x$

d. $x \longmapsto e^{3x}$

e. rien de ce qui précède

Question 16

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{e^{x^2}}{x}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x)$ est égale à

a. $\dfrac{(2x - 1)e^{x^2}}{x^2}$

b. e^{x^2}

c. $\dfrac{(x - 1)e^{x^2}}{x^2}$

$\boxed{\text{d.}}$ $\dfrac{(2x^2 - 1)e^{x^2}}{x^2}$

e. rien de ce qui précède

Question 17
Le nombre de façons de prélever simultanément 2 cartes parmi 4 est

a. 8
$\boxed{\text{b.}}$ 6
c. 12
d. 16
e. rien de ce qui précède

Question 18

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point $A(2,-1,1)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}$. Alors une représentation paramétrique de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est

$\boxed{\text{a.}}$ $\begin{cases} x = 2+k \\ y = -1+2k \quad ; k \in \mathbb{R} \\ z = 1-5k \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = 1+2k \\ y = 2-k \quad ; k \in \mathbb{R} \\ z = -5+k \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = -2+k \\ y = 1+2k \quad ; k \in \mathbb{R} \\ z = -1-5k \end{cases}$

d. $\begin{cases} x = 2-k \\ y = -1-2k \quad ; k \in \mathbb{R} \\ z = 1+5k \end{cases}$

e. rien de ce qui précède

Question 19
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles quelconques. Alors

$\boxed{\text{a.}}$ $\big[(u_n)$ converge et (v_n) converge$\big] \Longrightarrow (u_n+v_n)$ converge.
b. $\big[(u_n)$ diverge et (v_n) diverge$\big] \Longrightarrow (u_n+v_n)$ diverge.
$\boxed{\text{c.}}$ $\big[(u_n)$ converge et (v_n) diverge$\big] \Longrightarrow (u_n+v_n)$ diverge.
d. $\big[(u_n)$ diverge et (v_n) converge$\big] \Longrightarrow (u_n+v_n)$ converge.
e. rien de ce qui précède

Question 20
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x+1}{1-x+5x^2}$ est égale à

a. 0

b. $+\infty$

c. 2

d. 1

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 21
Soit $f : x \longmapsto \left(e^x + x\right)^5$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est égale à

a. $5\left(e^x + x\right)^4$
b. $5\left(e^x + 1\right)^4$
$\boxed{\text{c.}}$ $5\left(e^x + x\right)^4\left(e^x + 1\right)$
d. $5\left(\ln(x) + 1\right)^4$
e. rien de ce qui précède

Question 22
Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ sur $]1, +\infty[$ est

a. $x \longmapsto \ln\left(\ln(x)\right)$
b. $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln^2(x)$
c. $x \longmapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$
d. $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$
$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 23
Soit $f : x \longmapsto \ln\left(-x^2 + x - 2\right)$. Alors le domaine de définition de f est

a. $[-1, 2]$
b. $\mathbb{R}_+^*$
c. $]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$
$\boxed{\text{d.}}$ $\emptyset$
e. rien de ce qui précède

Question 24
Le nombre de façons de ranger 3 objets distincts dans 5 tiroirs sachant qu'un tiroir ne peut contenir qu'un seul objet est

a. 15
$\boxed{\text{b.}}$ 60
c. 120
d. 125
e. rien de ce qui précède

Question 25
Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ est égale à

a. $u_1 \dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}$

b. $u_1 \dfrac{1-q^{n-2}}{1-q}$

c. $u_1 \dfrac{1-q^{n-3}}{1-q}$

$\boxed{\text{d.}}$ $u_1 \dfrac{1-q^{n}}{1-q}$

e. rien de ce qui précède

Question 26
Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(1, -1, 2)$ et $B(2, 1, -1)$. Alors une équation paramétrique de la droite (AB) est

a. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{b.}}$ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

c. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

d. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

e. rien de ce qui précède

Question 27
Soient A et B deux événements indépendants quelconques. Alors

a. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

b. $P(A \cup B) = P(A)P(B)$

c. $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

$\boxed{\text{d.}}$ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

e. rien de ce qui précède

Question 28
Soit $f : x \longmapsto \sin(x)\cos(x)$. Alors une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est

a. $x \longmapsto \frac{1}{2}\cos^2(x)$

$\boxed{\text{b.}}$ $x \longmapsto \frac{1}{2}\sin^2(x)$

c. $x \longmapsto -\cos\big(\sin(x)\big)$

d. $x \longmapsto -\frac{1}{2}\sin^2(x)$

e. rien de ce qui précède

Question 29
$\lim_{x\to-\infty} 2xe^{-x}$ est égale à

$\boxed{\text{a.}}$ $-\infty$

b. $+\infty$

c. 0

d. 1

e. rien de ce qui précède

Question 30
Soient A et B deux événements incompatibles quelconques. Alors

a. $P(A\cup B) = P(A)P(B)$

$\boxed{\text{b.}}$ $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$

c. $P(A\cap B) = P(A) + P(B)$

d. $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

e. rien de ce qui précède

Question 31
Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Alors la limite de (u_n) lorsque n tend vers l'infini est

a. 0

b. 1

$\boxed{\text{c.}}$ 2

d. $+\infty$

e. $\frac{1}{2}$

Question 32
Soit $f : x \longmapsto \sqrt{\ln(x)}$. Alors, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f'(x)$ est égale à

a. $\dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}}}$

b. $\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}$

$\boxed{\text{c.}}$ $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$

d. $-\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}$

e. rien de ce qui précède

Question 33
Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2-x)}$. Alors le domaine de définition de f est

a. $]1, +\infty[$

b. $]2, +\infty[$

c. $]-\infty, 2[$

$\boxed{\text{d.}}$ $]-\infty, 1[$

e. rien de ce qui précède

Question 34
Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers -1. Alors

a. $u_n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

b. $|u_n - 1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\boxed{\text{c.}}$ $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$\boxed{\text{d.}}$ (u_n) est bornée

e. rien de ce qui précède

Question 35
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n, p). Alors

$\boxed{\text{a.}}$ $E(X) = np$

b. $E(X) = \dfrac{n}{p}$

c. $V(X) = n(1-p)$

$\boxed{\text{d.}}$ $V(X) = np(1-p)$

e. rien de ce qui précède

Question 36
Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une solution de l'équation différentielle $y' - y = x - 3$:

a. $x \longmapsto e^x + x - 3$

b. $x \longmapsto x - 3$

$\boxed{\text{c.}}$ $x \longmapsto 2 - x$

d. $x \longmapsto e^x$

e. rien de ce qui précède

Question 37
Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$. Alors la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison 2 si

a. $\ell = 1$

$\boxed{\text{b.}}$ $\ell = -3$

c. $\ell = 2$

d. $\ell = 3$

e. rien de ce qui précède

Question 38
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^3 + 6x^2 + 8$. La primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vaut 2 en 0 est

a. $-16x^4 + 18x^3 + 8x + 1$

b. $-x^4 + 2x^3 + 8x + 10$

$\boxed{\text{c.}}$ $-x^4 + 2x^3 + 8x + 2$

d. $-x^4 + 2x^3 + 8x$

e. rien de ce qui précède

Question 39

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ passant par $A(2,1,0)$ et la droite d' de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ passant par $B(1,-2,2)$. Alors d et d' sont sécantes de point d'intersection

a. $M(1,-1,2)$

b. $M(1,1,-2)$

$\boxed{\text{c.}}$ $M(3,0,3)$

d. $M(2,1,-3)$

e. rien de ce qui précède

Question 40
Soit $f : x \longmapsto \sqrt{1-\ln(x)}$. Alors le domaine de définition de f est

a. $\mathbb{R}_+^*$

b. $]e,+\infty[$

c. $]1,+\infty[$

d. $]-\infty,e]$

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 41
Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$. Alors pour tout $x \in]2,+\infty[$, $f'(x)$ est égale à

a. 1

b. $\dfrac{-6x^2+6x-9}{(x^2-3x+2)^2}$

c. $\dfrac{-6x^2-3x+5}{(x^2-3x+2)^2}$

$\boxed{\text{d.}}$ $\dfrac{4(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}$

e. rien de ce qui précède

Question 42
Une primitive de $t \longmapsto \dfrac{3t}{\sqrt{t^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$ est

$\boxed{\text{a.}}$ $t \longmapsto 3\sqrt{t^2+1}$

b. $t \longmapsto \dfrac{3}{2}\sqrt{t^2+1}$

c. $t \longmapsto 3t\sqrt{t^2+1}$

d. $t \longmapsto -3\sqrt{t^2+1}$

e. rien de ce qui précède

Question 43
Soit (u_n) la suite définie par la donnée de u_0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 3u_{n-1}+1$. Alors

a. la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 1$ est géométrique

b. la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$ est géométrique

c. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n u_0$

d. la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$ est géométrique

$\boxed{\text{e.}}$ la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \dfrac{1}{2}$ est géométrique

Question 44

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x - \sqrt{x}}{3 - \ln(x)}$ est égale à

a. 0

b. $+\infty$

$\boxed{\text{c.}}$ $-\infty$

d. 1

e. rien de ce qui précède

Question 45

Soient A et B deux événements quelconques de probabilités non nulles. Alors

a. $P_A(B) = P_B(A)$

b. $P_A(B) = \dfrac{P_B(A)P(A)}{P(B)}$

$\boxed{\text{c.}}$ $P(A \cap B) = P_B(A)P(B)$

$\boxed{\text{d.}}$ $P_A(B) = \dfrac{P_B(A)P(B)}{P(A)}$

e. rien de ce qui précède

Question 46

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x-2}}$. Alors le domaine de définition de f est

a. $\mathbb{R}_+^*$

$\boxed{\text{b.}}$ $]2, +\infty[$

c. $\mathbb{R}$

d. $\emptyset$

e. rien de ce qui précède

Question 47

Une primitive de $x \longmapsto e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est

a. $x \longmapsto e^{x^2}$

b. $x \longmapsto 2e^{x^2}$

c. $x \longmapsto 2xe^{x^2}$

d. $x \longmapsto e^{x^3/3}$

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 48
Soit $f : x \longmapsto x\ln(x) + x$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ est égale à

a. $\ln(x)$

b. $-\ln(x)$

$\boxed{\text{c.}}$ $\ln(x) + 2$

d. $\dfrac{1}{x} + 1$

e. rien de ce qui précède

Question 49

Une équation cartésienne du plan P contenant $A(1, 2, -1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ est

a. $-x + y + 2z - 1 = 0$
b. $x - y - 2z + 1 = 0$
c. $3y - z = 0$
$\boxed{\text{d.}}$ $-x + y + 2z + 1 = 0$
e. rien de ce qui précède

Question 50
Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_0 = 1$ et $u_2 = 9$. Alors la raison de (u_n) est

a. 9
b. 3
$\boxed{\text{c.}}$ 4
d. 6
e. rien de ce qui précède

Question 51
On tire avec remise 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Soit X le nombre de rois obtenus. Alors la loi de X est

a. Une loi binomiale de paramètres $\left(5, \dfrac{1}{4}\right)$

$\boxed{\text{b.}}$ Une loi binomiale de paramètres $\left(5, \dfrac{1}{8}\right)$

c. Une loi binomiale de paramètres $\left(5, \dfrac{1}{2}\right)$

d. Une loi binomiale de paramètres $\left(5, \dfrac{1}{16}\right)$

e. rien de ce qui précède

Question 52
Les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$\boxed{\text{a.}}$ $x \longmapsto ke^{-x}$ où $k \in \mathbb{R}$

b. $x \longmapsto ke^{x}$ où $k \in \mathbb{R}$

c. $x \longmapsto kx$ où $k \in \mathbb{R}$

d. $x \longmapsto k + x$ où $k \in \mathbb{R}$

e. rien de ce qui précède

Question 53
Soit D le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)\ln\big(\ln(x)\big)}$. Une primitive de f sur D est

a. $x \longmapsto \ln\big(x\ln(x)\big)$

$\boxed{\text{b.}}$ $x \longmapsto \ln\Big(\ln\big(\ln(x)\big)\Big)$

c. $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$

d. $x \longmapsto \dfrac{\ln\big(\ln(x)\big)}{x}$

e. rien de ce qui précède

Question 54
Soit $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)$. Alors le domaine de définition de f est

a. $]1, +\infty[$
b. $]2, +\infty[$
c. $]1, 2[$
d. $\mathbb{R}_+^*$
$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 55
Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = -13$ et $u_9 = -25$. Alors u_3 est égal à

a. -12

b. $\dfrac{-22}{3}$

c. -14

$\boxed{\text{d.}}$ -7

e. rien de ce qui précède

Question 56

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x^2+2)^4}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est égale à

a. $-\dfrac{4}{(x^2+2)^5}$

b. $-\dfrac{8x}{(x^2+2)^3}$

c. $-\dfrac{4x}{(x^2+2)^5}$

$\boxed{\text{d.}}$ $-\dfrac{8x}{(x^2+2)^5}$

e. rien de ce qui précède

Question 57

Soient A, B et C trois événements quelconques. Alors

a. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

$\boxed{\text{b.}}$ $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

c. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$

d. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

e. rien de ce qui précède

Question 58

Soit $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}\right)$. Alors le domaine de définition de f est

$\boxed{\text{a.}}$ $]-1, 1[\cup]2, +\infty[$

b. $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

c. $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

d. $\mathbb{R}_+^*$

e. rien de ce qui précède

Question 59

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x+7}{3-2x+5x^3}$ est égale à

$\boxed{\text{a.}}$ 0

b. $\dfrac{1}{5}$

c. $+\infty$

d. 1

e. rien de ce qui précède

Question 60
Soit $f : x \longmapsto e^{\cos\left(\cos(x)\right)}$. Alors $f'(x)$ est égale à

a. $2\cos(x)e^{\cos\left(\cos(x)\right)}$

b. $-2\cos(x)\sin(x)e^{\cos\left(\cos(x)\right)}$

c. $\cos\left(\cos(x)\right)e^{\cos\left(\cos(x)\right)}$

d. $-\sin\left(\cos(x)\right)\sin(x)e^{\cos\left(\cos(x)\right)}$

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 61
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.

a. Si (v_n) est croissante, (u_n) est majorée

b. Si (v_n) est décroissante, (u_n) est minorée

c. Si (v_n) converge, (u_n) converge

d. Si (v_n) est bornée, (u_n) est bornée

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 62
Dans un repère orthonormé de l'espace, soit d la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}.$$

Alors un vecteur directeur de d est

a. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{d.}}$ $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

e. rien de ce qui précède

Question 63
Le domaine de définition de $x \longmapsto \ln\left(x^2 + x + 2\right)$ est

$\boxed{\text{a.}}$ $\mathbb{R}$

b. $]0, +\infty[$

c. $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

d. $]-1, 2[$

e. rien de ce qui précède

Question 64
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3 telle que $u_0 = 2$. Alors $u_4 + \cdots + u_7$ est égal à

a. 111

$\boxed{\text{b.}}$ 74

c. 98

d. 100

e. rien de ce qui précède

Question 65
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 3}\right)$ est égale à

a. 0

b. $+\infty$

c. $-\infty$

$\boxed{\text{d.}}$ 1

e. rien de ce qui précède

Question 66
On tire dans un jeu de 32 cartes une main de 5 cartes (on rappelle que dans une main, l'ordre des cartes ne compte pas). Alors le nombre de mains contenant exactement 1 as est

a. $\binom{4}{1} + \binom{28}{4}$

b. $\dfrac{\binom{4}{1} \times \binom{28}{4}}{\binom{32}{5}}$

$\boxed{\text{c.}}$ $\binom{4}{1} \times \binom{28}{4}$

d. $\dfrac{\binom{4}{1} + \binom{28}{4}}{\binom{32}{5}}$

e. rien de ce qui précède

Question 67
Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(1,-1,2)$ et $B(2,1,-1)$. Alors

a. $C(3,2,-1) \in (AB)$
$\boxed{\text{b.}}$ $C(3,3,-4) \in (AB)$
c. $C(3,-4,3) \in (AB)$
d. $C(3,0,1) \in (AB)$
e. rien de ce qui précède

Question 68

$\boxed{\text{a.}}$ Toute suite arithmétique (non constante) diverge.

b. Toute suite géométrique converge.

c. Toute suite géométrique de raison q converge si $q > 1$.

$\boxed{\text{d.}}$ Toute suite géométrique de raison q converge si $0 \leqslant q \leqslant 1$.

e. rien de ce qui précède

Question 69
Soit $f : x \longmapsto \ln\big(e^x + 1\big)$. Alors le domaine de définition de f est

$\boxed{\text{a.}}$ $\mathbb{R}$
b. $\mathbb{R}_+^*$
c. $\emptyset$
d. $\mathbb{R}_+$
e. rien de ce qui précède

Question 70
Soit $f : x \longmapsto x\sin(2x)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est égale à

a. $\sin(2x) - 2x\cos(2x)$

b. $\sin(2x) + x\cos(2x)$

c. $\sin(2x) - x\cos(2x)$

d. $\sin(2x) + 2x^2\cos(2x)$

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 71
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2u_{n-1} + 1$. Alors

a. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n u_0$

b. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n-1} u_0$

$\boxed{\text{c.}}$ la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 1$ est géométrique

d. la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$ est géométrique

e. rien de ce qui précède

Question 72

$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x) - 3x^2 + 5\right)$ est égale à

$\boxed{\text{a.}}$ $-\infty$

b. $+\infty$

c. 0

d. 3

e. rien de ce qui précède

Question 73

Soit $f : x \longmapsto x^2 + e^{-x} - \ln(x)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ est égale à

a. $2 + e^{-x} - \dfrac{1}{x}$

b. $2 - e^{-x} - \dfrac{1}{x}$

c. $2x - e^{-x} + \dfrac{1}{x}$

d. $2x - e^{-x} + \dfrac{1}{x^2}$

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 74

Soit $E = \{a\,; b\,; c\,; d\,; e\,; f\}$. Alors le nombre de sous-ensembles de E contenant 3 éléments est

a. 6^3

b. 3^6

c. 18

$\boxed{\text{d.}}$ $\dbinom{6}{3}$

e. rien de ce qui précède

Question 75

Une primitive de $\dfrac{1}{(u+1)^2}$ sur $]-1, +\infty[$ est

a. $\ln(u+1)$

b. $\ln^2(u+1)$

c. $\dfrac{1}{u+1}$

$\boxed{\text{d.}}$ $-\dfrac{1}{u+1}$

e. rien de ce qui précède

Question 76
Soit (u_n) une suite réelle.

a. Si (u_n) est convergente alors (u_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs

b. Si (u_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle est convergente

c. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, alors (u_n) converge

d. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 \leqslant e^{-n}$ alors (u_n) converge vers 1

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 77
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{1 - x}$ est égale à

a. $+\infty$

b. 0

$\boxed{\text{c.}}$ $-\infty$

d. 1

e. rien de ce qui précède

Question 78
Soit $f : x \longmapsto \ln\big(\ln(x)\big)$. Alors le domaine de définition de f est

a. $\mathbb{R}_+^*$

b. $\emptyset$

c. $]e, +\infty[$

$\boxed{\text{d.}}$ $]1, +\infty[$

e. rien de ce qui précède

Question 79
Dans un repère orthonormé de l'espace, une équation cartésienne du plan P passant par $A(1,-1,2)$ et perpendiculaire à la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = 3+t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ est

a. $x - 3z + 2 = 0$
$\boxed{\text{b.}}$ $-x + 2y + z + 1 = 0$
c. $x - y + 2z + 1 = 0$
d. $x - 2y - z + 2 = 0$
e. rien de ce qui précède

Question 80
Une primitive de $\dfrac{e^x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est

a. $\ln(e^x)$
b. $e^x \ln(x)$
c. $e^{\ln(x)}$
d. $\ln\left(\dfrac{x}{e^x}\right)$
$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 81
Soit $f : x \longmapsto e^{\sqrt{x^2-3x+2}}$. Alors le domaine de définition de f est

a. $\mathbb{R}$
b. $[1,2]$
$\boxed{\text{c.}}$ $]-\infty,1] \cup [2,+\infty[$
d. $\emptyset$
e. rien de ce qui précède

Question 82
Soit (u_n) la suite définie par $u_{50} = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2$. Alors u_{100} vaut

a. 207
$\boxed{\text{b.}}$ 107
c. 307
d. 57
e. rien de ce qui précède

Question 83

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est égale à

a. $\dfrac{2e^{2x}+e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$

b. $\dfrac{1}{\left(1+e^x\right)^2}$

$\boxed{\text{c.}}$ $\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$

d. $-\dfrac{e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}$

e. rien de ce qui précède

Question 84

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Alors

$\boxed{\text{a.}}$ la fonction $x \longmapsto \ln(ex)$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$

$\boxed{\text{b.}}$ la fonction $x \longmapsto e + \ln(x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$

$\boxed{\text{c.}}$ la fonction $x \longmapsto e - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$

$\boxed{\text{d.}}$ la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$

e. rien de ce qui précède

Question 85

On suppose que si on choisit au hasard un individu dans la population française, la probabilité que cette personne soit gauchère est 0,10. On observe sur une journée un groupe de 256 candidats du concours Advance. On note N la variable aléatoire égale au nombre de gauchers dans cette échantillon. Alors

a. $P(N=200) = \dbinom{200}{256}(0{,}10)^{256}(1-0{,}10)^{56}$

b. $P(N=200) = \dbinom{256}{200}(0{,}10)^{256}(1-0{,}10)^{56}$

$\boxed{\text{c.}}$ $P(N=200) = \dbinom{256}{200}(0{,}10)^{200}(1-0{,}10)^{56}$

d. $P(N=200) = \dbinom{200}{256}(0{,}10)^{200}(1-0{,}10)^{56}$

e. rien de ce qui précède

Question 86

Soit $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}\right)\sqrt{e^x-1}$. Alors le domaine de définition de f est

a. $\mathbb{R}_+$

b. $\mathbb{R}_+^*$

$\boxed{\text{c.}}$ $[0,1[\cup]2,+\infty[$

d. $]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$

e. rien de ce qui précède

Question 87

Soit (u_n) une suite arithmétique. Alors $u_5+\cdots+u_n$ est égale à

$\boxed{\text{a.}}$ $\dfrac{(n-4)(u_5+u_n)}{2}$

b. $\dfrac{(n-5)(u_5+u_n)}{2}$

c. $\dfrac{(n-6)(u_5+u_n)}{2}$

d. $\dfrac{u_5+u_n}{2}$

e. rien de ce qui précède

Question 88

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(1,-1,2)$ et $B(2,1,-1)$. Alors une équation cartésienne du plan orthogonal à la droite (AB) passant par $C(3,3,-4)$ est

a. $x+2y-3z+21=0$

b. $x+2y-3z+15=0$

c. $x+2y-3z-15=0$

d. $x+2y-3z-1=0$

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 89

Quand x tend vers 0, $x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

a. n'a pas de limite

$\boxed{\text{b.}}$ tend vers 0

c. tend vers 1

d. tend vers $+\infty$

e. rien de ce qui précède

Question 90
Soit $f : x \longmapsto \left(e^x\right)^2$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est égale à

a. $2xe^{x^2}$
b. e^{2x}
c. $2e^x$
$\boxed{\text{d.}}$ $2e^{2x}$
e. rien de ce qui précède

Question 91
Une primitive de $x \longmapsto \tan(x)$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ est

$\boxed{\text{a.}}$ $x \longmapsto -\ln\big(\cos(x)\big)$
b. $x \longmapsto 1 + \tan^2(x)$
c. $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
d. $x \longmapsto \ln\big(\sin(x)\big)$
e. rien de ce qui précède

Question 92
Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x - 2}$. Alors le domaine de définition de f est

a. $[-1, 2]$
b. $[-2, 1]$
$\boxed{\text{c.}}$ $]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$
d. $]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$
e. rien de ce qui précède

Question 93
Le nombre de façons de tirer simultanément 3 cartes parmi 5 est

a. 60
b. 6
$\boxed{\text{c.}}$ 10
d. 24
e. rien de ce qui précède

Question 94
Soit (u_n) une suite géométrique à termes positifs telle que $u_0 = 1$ et $u_2 = 16$. Alors

a. la raison de (u_n) est 16

$\boxed{\text{b.}}$ la raison de (u_n) est 4

c. la raison de (u_n) est 8

d. aucune suite géométrique ne vérifie ces conditions

e. rien de ce qui précède

Question 95
Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(1, -1, 2)$, $B(2, 0, 1)$ et $C(0, 1, 1)$. Alors une équation cartésienne du plan (ABC) est

a. $x - y + 3z - 1 = 0$
b. $x - 2y + z - 7 = 0$
c. $x - 3y - z + 2 = 0$
$\boxed{\text{d.}}$ $x + 2y + 3z - 5 = 0$
e. rien de ce qui précède

Question 96
Soit $f : x \longmapsto \sqrt{1 - e^x}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f'(x)$ est égale à

a. $\dfrac{1}{2\sqrt{1 - e^x}}$

b. $\dfrac{1 - e^x}{2\sqrt{1 - e^x}}$

c. $\dfrac{e^x}{2\sqrt{1 - e^x}}$

d. $\dfrac{e^x}{1 - e^x}$

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 97
Soit F une primitive d'une fonction dérivable f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors une primitive de f' est

$\boxed{\text{a.}}$ $f + 42$

b. $\dfrac{1}{2}f^2$

c. fF

d. F

e. rien de ce qui précède

Question 98

Soit $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$. Alors le domaine de définition de f est

a. $[1, 2]$

b. $\mathbb{R}$

c. $[1, 2[$

$\boxed{\text{d.}}$ $]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[$

e. rien de ce qui précède

Question 99

Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

$\boxed{\text{a.}}$ $(u_n - \ell)$ converge vers 0

$\boxed{\text{b.}}$ $\big(|u_n - \ell|\big)$ converge vers 0

$\boxed{\text{c.}}$ $\big(|u_n| - |\ell|\big)$ converge vers 0

$\boxed{\text{d.}}$ (u_n) est bornée

e. rien de ce qui précède

Question 100

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^3 - x + 2}{3x^2 + \ln(x) - 1}$ est égale à

a. 2

$\boxed{\text{b.}}$ $+\infty$

c. 0

d. 1

e. rien de ce qui précède

Question 101

Soit $f : x \longmapsto x^2 \ln(x)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ est égale à

a. $\dfrac{2}{x}$

b. $2x + \dfrac{1}{x}$

$\boxed{\text{c.}}$ $2x\ln(x) + x$

d. $2 + \dfrac{1}{x}$

e. rien de ce qui précède

Question 102
Soit X une variable aléatoire discrète quelconque. Alors

a. $E\big(X - E(X)\big) = V(X)$

$\boxed{\text{b.}}$ $E\big(X - E(X)\big) = 0$

c. $E\big(X - E(X)\big) = \sqrt{V(X)}$

$\boxed{\text{d.}}$ $E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) = V(X)$

e. rien de ce qui précède

Question 103
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_2 = 1$. Alors

a. $u_7 = 15$

b. $u_7 = 13$

$\boxed{\text{c.}}$ $u_7 = 11$

d. $u_7 = 17$

e. rien de ce qui précède

Question 104
Dans un univers Ω, on dit que $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements si

$\boxed{\text{a.}}$ $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ et pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$

b. $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \{0\}$ et pour tout $i \neq j$, $A_i \cup A_j \neq \emptyset$

c. $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ et pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j \neq \{0\}$

d. $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ et pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$

e. rien de ce qui précède

Question 105
Une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$ est

a. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

b. $x \longmapsto \dfrac{2}{x^2+1}$

c. $x \longmapsto \dfrac{1}{2(x^2+1)}$

d. $x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2+1}$

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 106
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q avec $u_0 = 1$. Alors

$\boxed{\text{a.}}$ (u_n) diverge vers $+\infty$ si $q > 1$

b. (u_n) diverge vers $+\infty$ si $0 < q < 1$.

$\boxed{\text{c.}}$ (u_n) converge vers 0 si $0 < q < 1$.

d. (u_n) converge vers 0 si $q > 1$

e. rien de ce qui précède

Question 107
Soit $f : x \longmapsto \sqrt{e^{-x}}$. Alors le domaine de définition de f est

$\boxed{\text{a.}}$ $\mathbb{R}$

b. $\mathbb{R}_+$

c. $\mathbb{R}_+^*$

d. $\emptyset$

e. rien de ce qui précède

Question 108
Soit $f : x \longmapsto x^2e^x$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est égale à

a. $2xe^x$

$\boxed{\text{b.}}$ $(2 + x)xe^x$

c. $2x + e^x$

d. $2e^x$

e. rien de ce qui précède

Question 109
On lance un dé. On note A et B les événements suivants :
A : « on obtient un numéro pair » et B : « on obtient un multiple de 4 ». Alors

a. A et B sont incompatibles

$\boxed{\text{b.}}$ A et B ne sont pas incompatibles

c. A et B sont indépendants

$\boxed{\text{d.}}$ A et B ne sont pas indépendants

e. rien de ce qui précède

Question 110

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x}{1+e^{-x}}$ est égale à

a. $-\infty$

b. $+\infty$

$\boxed{\text{c.}}$ 0

d. 1

e. rien de ce qui précède

Question 111

Dans un repère orthonormé de l'espace, soient P_1 et P_2 deux plans d'équations respectives

$$x - y + 2z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad x + 2y - z = 0.$$

Alors une représentation paramétrique de la droite d, intersection des plans P_1 et P_2, est

a. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

b. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

c. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

d. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 112

Soit (u_n) la suite définie par $u_{10} = 42$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 42u_n$. Alors u_{1000} vaut

$\boxed{\text{a.}}$ 42^{991}

b. 42^{1010}

c. 42^{1011}

d. 10×42^{990}

e. rien de ce qui précède

Question 113
Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{\sin(x)}{x^2}$

a. tend vers 1

b. n'a pas de limite

c. tend vers $+\infty$

$\boxed{\text{d.}}$ tend vers 0

e. rien de ce qui précède

Question 114
Une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1,+\infty[$ est

$\boxed{\text{a.}}$ $x \longmapsto \ln\big(\ln(x)\big)$

b. $x \longmapsto \ln\big(x\ln(x)\big)$

c. $x \longmapsto \dfrac{1}{4}\ln\big(x^2\ln^2(x)\big)$

d. $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right)$

e. rien de ce qui précède

Question 115
Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n$. Alors

a. (u_n) est géométrique

b. (u_n) est arithmétique

$\boxed{\text{c.}}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$\boxed{\text{d.}}$ (u_n) est croissante

e. rien de ce qui précède

Question 116
Soit $f : x \longmapsto \ln\big(|x^2-1|\big)$. Alors le domaine de définition de f est

a. $]-1,1[$

b. $\mathbb{R}$

c. $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

d. $\emptyset$

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 117
Soit $f : x \longmapsto e^{-2x}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est égale à

a. e^{-x^2}

b. $-2xe^{-2x}$

c. e^{-2x}

d. $-2e^x$

$\boxed{\text{e.}}$ rien de ce qui précède

Question 118
Soient A un événement et (B_1, B_2, B_3) un système complet d'événements d'un univers Ω. Alors

a. $P(A) = P(A \cap B_1)P(B_1) + P(A \cap B_2)P(B_2) + P(A \cap B_3)P(B_3)$

$\boxed{\text{b.}}$ $P(A) = P_{B_1}(A)P(B_1) + P_{B_2}(A)P(B_2) + P_{B_3}(A)P(B_3)$

c. $P(A) = P(A \cup B_1)P(B_1) + P(A \cup B_2)P(B_2) + P(A \cup B_3)P(B_3)$

d. $P(A) = P(A \cup B_1) + P(A \cup B_2) + P(A \cup B_3)$

$\boxed{\text{e.}}$ $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$

Question 119
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 2} - 2x \right)$ est égale à

a. 0

b. $+\infty$

$\boxed{\text{c.}}$ $-\infty$

d. -1

e. rien de ce qui précède

Question 120

a. Toute suite réelle croissante et minorée tend vers $+\infty$

$\boxed{\text{b.}}$ Toute suite réelle croissante et bornée converge

$\boxed{\text{c.}}$ Toute suite réelle décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

$\boxed{\text{d.}}$ Toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$

e. rien de ce qui précède

STAGES PRÉPA CONCOURS ADVANCE

LA MEILLEURE PRÉPA ADVANCE

- Réveiller la motivation et l'enthousiasme
- Formules de préparation modulables
- Des intervenants spécialistes du concours
- Ateliers de prises de parole

Préparation concours Advance

STAGES PRÉPA CONCOURS ADVANCE EN LIGNE

- Une prépa en ligne avec suivi dès l'inscription
- Préparation rigoureuse, méthodique et efficace
- Conseils de méthodologie

Stage en ligne prépa concours Advance