concours Advance

ÉPREUVE ORALE
ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CONSIGNES AUX CANDIDATS

Durée de l'épreuve : 30 minutes

L'oral de mathématiques permet de vous évaluer sur la qualité de votre démarche de résolution des exercices en rapport avec le programme, votre maîtrise du programme, ainsi que l'agilité et la vitesse de résolution dont vous saurez faire preuve. Il permet en outre d'harmoniser votre niveau avec celui de tous les autres candidats.

Déroulement

- Afin de tenir compte de l'avancement de chacun dans le programme de Terminale et de vous permettre de démontrer vos compétences dans les meilleures conditions, vous disposerez d'une certaine marge de choix : vous pourrez éliminer un certain nombre de thèmes sur lesquels vous ne serez pas interrogé.
- Deux ou trois exercices vous seront ensuite proposés par l'examinateur. Après un temps de préparation, vous échangerez avec lui sur votre méthode de résolution.

Critères d'évaluation

- Maîtrise des savoirs disciplinaires liés au programme de terminale
- Capacités à dérouler un raisonnement et l'exposer de manière claire et rigoureuse
- Autonomie dans la résolution des exercices (avec ou sans aide de l'examinateur)

Notation

- Résolution de l'exercice
- Connaissance du cours associé au thème retenu
- Rapidité dans la résolution de l'exercice

Il est conseillé de s'exercer sur chacun des thèmes proposés et de s'entraîner à résoudre les exercices « à haute voix », seul ou avec des camarades de classe, en explicitant votre méthode de résolution ainsi que les éléments de cours mis en oeuvre dans la même limite de temps que le jour de l'épreuve orale.

SPÉCIALITÉS MATHÉMATIQUES

Nous allons étudier les thèmes suivants :

- Dérivées
- Convexité
- Récurrence
- Suites
- Limites
- Logarithme-Exponentielle
- Domaine de définition
- Primitives-Equations différentielles
- Dénombrement-Probabilités
- Géométrie dans l'espace

Mathématiques - Enoncés

Dérivées

1. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies par

$$a) f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 3\right) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$b) g(x) = \frac{1}{x}e^{-2x} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*$$

2. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$a) f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$$

$$b) g(x) = 2x \ln\left(x^2 + 1\right)$$

3. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies par

$$a) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$$

$$b) g(x) = \left(2x^3 - x + 1\right)^{2020} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

4. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$a) f(x) = xe^{1/x} + 3\sqrt{x^2 + 1}$$

$$b) g(x) = \left(\sin(x) + \cos(x)\right)^{20}$$

5. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies par

$$a) f(x) = e^{2x} \ln(2x + 1) \quad \text{pour tout } x > \frac{1}{2}$$

$$b) g(x) = \left(\ln(x^2 + 1)\right)^{18} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Convexité - Points d'inflexion

6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+1)e^x$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

(a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et préciser les éventuels points d'inflexion pour la courbe C_f.

7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} + x^2 - 4$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orhogonal.

(a) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit a un réel. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a.

(c) Déduire l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

(d) Montrer que pour tout réel x, $e^{-x} + x^2 - 4 \geqslant -x - 3$.

8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^3 - 120x^2 + 3$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orhogonal.

(a) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et préciser les éventuels points d'inflexion pour la courbe C_f.

(b) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

(c) Montrer que pour tout réel $x \in [-4; 5]$, $x^4 - 2x^3 - 120x^2 + 3 \leqslant 3$.

9. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orhogonal.

(a) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et préciser les éventuels points d'inflexion pour la courbe C_f.

(b) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

(c) Montrer que pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Raisonnement par récurrence

10. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{1 \times 3} + \dfrac{1}{3 \times 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1) \times (2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

11. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$.

12. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

13. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8^n - 1$ est divisible par 7.

14. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Suites

15. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$ et $u_{15} = 10$.

(a) Déterminer u_{30}.

(b) Déterminer $u_{15} + u_{16} + \cdots + u_{30}$.

16. Soit $S = \dfrac{1}{2} + 2 + \dfrac{7}{2} + \cdots + \dfrac{19}{2} + 11$.

Déterminer S après avoir vérifié que S est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

17. Soient (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$
Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).

18. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 4$ et $u_0 = 2$.

Soit $(v_n) = (u_n + 2)$.

(a) Montrer que (v_n) est géométrique.

(b) En déduire (v_n) puis (u_n) en fonction de n.

19. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 6$ et $u_5 = 3$.

(a) Déterminer u_{20}.

(b) Déterminer $u_5 + u_6 + \cdots + u_{20}$.

20. Soit (u_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ et $u_0 = 2$.

(a) Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante et minorée par 1.

(b) Étudier la convergence de (u_n).

Limites

21. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5x}{3x^2 + x + 4} \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x} \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 2x + 2}{x + 3}$$

22. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \ln(x)}{3x^2 - x + 2}$$

23. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2x} \sin(x) \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

24. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 + 4x}\right) \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 + 3}$$

25. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 2x + 3x^2}{4 + x + 6x^2} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$$

Logarithme-Exponentielle

26. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\ln(1-2x) = \ln(x+2) + \ln 3$$

27. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\ln(2-x) \leqslant \ln(2x+1) - \ln 3$$

28. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x\,(2x-3)$$

(a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

(b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

29. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$e^x - 2e^{-x} - 1 = 0$$

30. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2e^x + e^{-x} + x$$

(a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\left(e^x+1\right)\left(2e^x-1\right)}{e^x}$.

(c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

31. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}$$

(a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

(b) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

(c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

32. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x}$$

(a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.

(b) Déterminer f' puis dresser le tableau de variation de f.

(c) Déterminer une primitive de f.

33. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = (3 - x^2)e^{-x}$$

(a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

(b) Déterminer f' puis le tableau de variation de f.

Domaine de définition

34. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 4\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln\Big(\ln(\sqrt{x} - 1)\Big)$$

35. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 - 5x + 6}\right)$$

36. Déterminer le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}}{x^2 - 3x - 4}$$

37. Déterminer le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$$

38. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$$

39. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{-3x^2 + x + 10}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln\left(1 - e^x\right)$$

40. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln\left(20 - x - x^2\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

Primitives et équations différentielles

41. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-5}{(x+3)^2}$ et g la fonction définie par $g(x) = x(x^2+1)^5$.

(a) Déterminer les primitives de f.

(b) Déterminer la primitive G de g vérifiant $G(0) = 0$.

42. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$ et g la fonction définie par $g(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x+1}}$

(a) Déterminer les primitives de f.

(b) Déterminer la primitive G de g vérifiant $G(0) = 2$.

43. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}$ et g la fonction définie par $g(x) = (x-1)e^{x^2-2x}$.

(a) Déterminer les primitives de f.

(b) Déterminer la primitive G de g vérifiant $G(\sqrt{2}) = 1$.

44. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{x^2-3}$ et g la fonction définie par $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}e^{\sqrt{x^2-1}}$

(a) Déterminer les primitives de g.

(b) Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(3) = \sqrt{6}$.

45. On considère les équations différentielles $(\mathrm{E}_1) : 2y' + 5y = 0$ et $(\mathrm{E}_2) : y' + \frac{1}{4}y = 1$

(a) Résoudre les deux équations .

(b) Déterminer la solution f de (E_1) vérifiant $f(2) = 1$.

46. On considère l'équation différentielle $y' - 3y = 2$.

(a) Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.

(b) Déterminer la solution f de cette équation vérifiant $f(0) = 1$.

(c) Déterminer la solution g de cette équation sachant que sa courbe représentative admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 3.

47. On considère les équations différentielles $(E_1) : 2y' - 3y = 1$ et $(E_2) : y' - xy^2 = 0$.

(a) Déterminer l'ensemble des solutions de (E_1).

(b) Déterminer la solution f de (E_1) vérifiant $f(0) = 1$.

(c) La fonction h définie par $h(x) = \frac{-2}{x^2+3}$ est-elle une solution de (E_2) ?

48. On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = xe^x$.

(a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y' - 2y = 0$.

(b) Déterminer les réels a et b tels que la fonction u définie par $u(x) = (ax + b)e^x$ soit une solution de l'équation (E).

(c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).

49. On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = 4x^2 - 4x$.

(a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y' - 2y = 0$.

(b) Déterminer les réels a , b et c tels que la fonction u définie par $u(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution de l'équation (E).

(c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Dénombrement-Probabilités

50. Soit $E = \{a\,;\, b\,;\, c\,;\, d\,;\, e\,;\, f\,\}$

(a) Combien y a-t-il de sous-ensembles de E contenant trois éléments ?

(b) Combien de mots de 3 lettres distinctes peut-on former avec les lettres de E ?

(c) Combien de mots de 3 lettres dont deux exactement sont distinctes peut-on former avec les lettres de E ?

51. Une enquête sur la lecture de trois revues X, Y, Z, portant sur un échantillon de 1 000 personnes donne les résultats suivants :

- 60 % lisent X, 50 % lisent Y et 50 % lisent Z ;
- 20 % lisent Y et Z, 30 % lisent X et Z et 30 % lisent X etY ;
- 10 % lisent les trois revues.

Parmi ces 1 000 personnes :

(a) Combien lisent deux de ces revues exactement ?

(b) Combien ne lisent aucune de ces revues ?.

52. Sur un damier de seize cases (4x4) on place quatre jetons sur quatre cases différentes.

(a) Si les jetons sont de quatre couleurs différentes, de combien de façons peut-on les disposer ?

(b) Si les jetons sont identiques, de combien de façons peut-on les disposer ?

(c) Si deux jetons sont blancs et les deux autres sont noirs, de combien de façons peut-on les disposer ?

53. En utilisant exclusivement les chiffres 3, 4, 5, 6 , 7 et 8, on désire former un nombre comportant 4 chiffres.

(a) Combien y a-t-il de possibilités si les chiffres ne sont pas nécessairement distincts ?

(b) Combien y a-t-il de possibilités si tous les chiffres doivent être distincts ?

(c) Combien y a-t-il de possibilités :

i. Si le nombre obtenu doit être inférieur à 5000 ?

ii. Si 3 et 4 ne doivent pas se suivre dans cet ordre (pas de 34)·

54. Dans un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de mains de 5 cartes contenant :

(a) exactement un roi, une dame et 2 valets ?

(b) l'as de pique et au moins 2 trèfles ?

(c) exactement un roi et deux carreaux ?

55. On considère une urne A contenant 20 boules dont 4 boules jaunes , 10 boules vertes et 6 boules rouges .
On tire 2 boules successivement et sans remise dans cette urne et on s'intéresse à la couleur des boules tirées.

(a) Cette expérience est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?

(b) Déterminer la probabilité de l'événement : « obtenir 2 boules rouges » .

(c) Déterminer la probabilité de l'événement : « obtenir 1 boule verte et 1 boule jaune ».

(d) Déterminer la probabilité que la première boule soit jaune sachant que la deuxième est rouge.

56. On considère une urne A contenant 10 boules dont 5 boules jaunes , 3 boules vertes et 2 boules rouges.
On tire avec remise 2 boules dans cette urne.
On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

(a) Cette expérience est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?

(b) Déterminer la probabilité de l'événement : « obtenir 2 boules rouges » .

(c) Déterminer la probabilité de l'événement : « obtenir 1 boule verte et 1 boule jaune ».

(d) Déterminer la probabilité que la première boule soit jaune sachant que la deuxième est rouge.

Géométrie dans l'espace

57. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite (AB) où $A(1;2;-1)$ et $B(0;1;3)$ et le plan P d'équation $x+y+z-1=0$.
Étudier l'intersection de la droite (AB) et du plan P.

58. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les plans P et R d'équations respectives :
$(P)\ :\ x-3y+2z=5 \quad$ et $\quad (R)\ :\ 2x+y+7z=1$

(a) Montrer que les plans P et R sont sécants.

(b) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

59. Soit d et d' les droites ayant pour représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x=-3+t \\ y=-2-t \\ z=-1+t \end{cases},t\in\mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x=k \\ y=1+k \\ z=-1-4k \end{cases},k\in\mathbb{R}.$$

Étudier l'intersection des deux droites d et d'.

60. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $A(1;-1;2)$, $B(3;3;8)$, $C(-3;5;4)$ et $D(1;2;3)$.

(a) Le triangle BCD est -il rectangle ?

(b) Les quatre points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?