MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

EAE MAT 2

SESSION 2015

AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES

COMPOSITION D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

A

 Tournez la page S.V.P.

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations.

On note : $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes. Si z est un complexe, $\overline{z}$ désigne son conjugué, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire et $|z|$ son module.

Dans ce sujet, toute mesure σ sera définie sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ où Ω un espace métrique et $\mathcal{B}_\Omega$ sa tribu borélienne. En outre, une fonction $f : \Omega \to \mathbf{C}$ sera qualifiée de mesurable si elle est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{B}_\Omega$. On utilise également :

- l'abréviation « p.p. » pour « pour presque tout (pour la mesure σ) » ;
- la notation $L^2(\Omega, \sigma)$ pour désigner l'ensemble (des classes) de fonctions de Ω dans $\mathbf{R}$ (mesurables) de carré intégrable sur Ω pour la mesure σ.
- pour f intégrable, on utilisera abusivement la notation $\sigma(f) = \int_\Omega f \mathrm{d}\sigma$ ou $\int_\Omega f(\omega)\mathrm{d}\sigma(\omega)$, si on a besoin de préciser les variables.

Si $\mathbf{K}$ est un corps et $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathfrak{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans le corps $\mathbf{K}$.

Les parties IV, V et VI utilisent les notations complémentaires définies à la page 6. D'autres notations sont introduites au début de chaque partie.

Objectif du sujet.

Le sujet a pour but :

- d'étudier la localisation des valeurs propres des matrices hermitiennes de grandes tailles (partie V) qui est un résultat important, notamment dans les télécommunications modernes ;
- de démontrer une convergence en loi (*loi du demi-cercle*) de la moyenne des valeurs propres des matrices hermitiennes de taille n (partie VI). Dans l'étude des matrices aléatoires, ce résultat joue un rôle semblable au théorème central limite des variables aléatoires réelles.

Dépendance des parties entre elles :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{I} & & \\ & \swarrow & \downarrow & & \\ \mathrm{II} & & \mathrm{V} & & \mathrm{III} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \swarrow & \\ \mathrm{IV} & \rightarrow & \mathrm{VI} & & \end{array}$$

PARTIE I : Polynômes d'Hermite.

On considère les fonctions φ et H_k ($k \in \mathbf{N}$) définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad \text{et} \quad H_k(x) = (-1)^k \frac{\varphi^{(k)}(x)}{\varphi(x)},$$

ainsi que les fonctions K_n ($n \in \mathbf{N}^*$) définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k(x) H_k(y)}{2^k k!}.$$

On note $\mathrm{d}t$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. On considère la fonction $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \psi(t) = \varphi(x - t).$$

   (a) Rappeler les développements en série entière des fonctions $t \mapsto e^{2xt}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ en $t = 0$, ainsi que la valeur de leur rayon de convergence.

   (b) Établir que la fonction ψ est développable en série entière en 0.

   (c) En déduire que :

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R}^2, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k(x)}{k!} t^k = e^{2xt - t^2}. \tag{1}$$

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. Justifier que l'on peut dériver terme à terme par rapport à t la relation (1) et en déduire que :

$$\forall k \geq 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad H_{k+1}(x) = 2x H_k(x) - 2k H_{k-1}(x). \tag{2}$$

3. Soit $k \in \mathbf{N}$. Prouver que H_k est une fonction polynomiale à coefficients réels. Préciser son degré et son coefficient dominant.

4. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ avec $x \neq y$. À l'aide de la relation (2) prouver que :

$$K_n(x,y) = \frac{1}{2^n (n-1)!} \left(\frac{H_n(x) H_{n-1}(y) - H_{n-1}(x) H_n(y)}{x - y} \right). \tag{3}$$

5. Soit P une fonction polynomiale à coefficients réels. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, établir que :

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi^{(n)}(t) P(t) \,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_{\mathbf{R}} \varphi(t) P^{(n)}(t) \,\mathrm{d}t.$$

6. Démontrer que :

$$\int_{\mathbf{R}} H_n(t) H_m(t) \varphi(t) \,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n, \\ 2^n n! & \text{si } m = n. \end{cases}$$

7. Établir que :

$$\forall (k,x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}, \quad H_k(x) = \frac{i^k e^{x^2}}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} t^k e^{-t^2/4} e^{-ixt} \,\mathrm{d}t.$$

   Indication : *On pourra étudier d'abord le cas $k = 0$ et utiliser librement l'expression suivante de la transformée de Fourier de la gaussienne $t \mapsto e^{-t^2/2}$:*

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \int_{\mathbf{R}} e^{-t^2/2} e^{-ixt} \,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}.$$

8. *La question suivante ne sera utilisée qu'à la question 4 de la partie V et pourra être admise en première lecture.*

Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour n tendant vers $+\infty$, montrer que :

$$H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{2n}{e}\right)^{n/2} i^n \frac{\left((-1)^n e^{ix} + e^{-ix}\right)}{2} + o\left(\left(\frac{2n}{e}\right)^{\frac{n}{2}}\right) \tag{4}$$

Indication : *On utilisera librement la méthode de Laplace : soient $u_0 \in \mathbf{R}$, $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$ continue et $g : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :*
i) $\int\limits_{\mathbf{R}_+} |f(t)|\, e^{ug(t)} dt$ *converge pour tout* $u \geq u_0$;

ii) *que g' s'annule en un seul point $t_0 \in \mathbf{R}_+^*$ avec $g(t_0) = \max\limits_{]0,+\infty[} g$ et $g''(t_0) < 0$, alors quand u tend vers $+\infty$:*

$$\int\limits_{\mathbf{R}_+} f(t)\, e^{ug(t)} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(t_0)}} f(t_0) \frac{e^{ug(t_0)}}{\sqrt{u}} + o\left(\frac{e^{ug(t_0)}}{\sqrt{u}}\right).$$

PARTIE II : Projection orthogonale sur $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.

On note μ la mesure définie sur $\mathbf{R}$ par : $\mathrm{d}\mu(t) = \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ où $\mathrm{d}t$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, c'est-à-dire que pour toute fonction f mesurable et positive sur $\mathbf{R}$, on a :

$$\int\limits_{\mathbf{R}} f(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int\limits_{\mathbf{R}} f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbf{R}} f(t)\, e^{-t^2} \mathrm{d}t \quad \textit{et} \quad \int\limits_{\mathbf{R}} \mathrm{d}\mu(t) = 1.$$

On munit le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $L^2(\mathbf{R}, \mu)$ du produit scalaire :

$$\forall (f,g) \in L^2(\mathbf{R}, \mu), \quad \langle f, g\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}\mu(t) = \int\limits_{\mathbf{R}} f(t)\, g(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et q_n désigne la fonction polynomiale définie sur $\mathbf{R}^n$ par :

$$\forall (t_1, ..., t_n) \in \mathbf{R}^n, \quad q_n(t_1, ..., t_n) = D_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)^2 \text{ avec } D_n = \frac{2^{n(n-1)/2}}{\prod\limits_{j=0}^{n} j!}, \tag{5}$$

en convenant que $0! = 1$. Rappelons que la fonction K_n est définie à la partie I.

1. Soit $(E, \langle , \rangle_E)$ un espace vectoriel préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, $(e_1, ..., e_p)$ une base orthonormale de F et x un élément de E.

   Rappeler, sans démonstration, l'expression du projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F en fonction des vecteurs $e_1, ..., e_p$ et x.

2. On note Π_n le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbf{R}, \mu)$ sur $\mathbf{R}_{n-1}[X]$. Justifier que :

$$\forall f \in L^2(\mathbf{R}, \mu), \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \Pi_n(f)(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} K_n(x,y)\, f(y)\, \mathrm{d}\mu(y).$$

3. Soit $(x, z) \in \mathbf{R}^2$. Prouver que :

$$\int\limits_{\mathbf{R}} K_n(x,y)\, K_n(y,z)\, \mathrm{d}\mu(y) = K_n(x,z) \quad \text{et} \quad \int\limits_{\mathbf{R}} K_n(x,x)\, \mathrm{d}\mu(x) = n.$$

4. Soit $(t_1, ..., t_n) \in \mathbf{R}^n$. On considère les deux matrices :

$$A = (K_n(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad B = \left(\frac{H_{i-1}(t_j)}{\sqrt{2^{i-1}(i-1)!}} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{R}).$$

(a) Exprimer A en fonction des matrices B et ${}^tB$. Justifier que :

$$\det\left((H_{i-1}(t_j))_{1 \leq i,j \leq n}\right) = 2^{n(n-1)/2} \det\left(\left(t_j^{i-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}\right).$$

(b) En déduire que :

$$\det\left((K_n(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq n}\right) = n! q_n(t_1, ..., t_n).$$

5. On note $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, ..., n\}$. Prouver que :

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left(\det\left((H_{i-1}(t_j))_{1 \leq i,j \leq n}\right)\right)^2 \mathrm{d}\mu(t_1) ... \mathrm{d}\mu(t_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^{n} \left\langle H_{\sigma(i)-1}, H_{\sigma(i)-1} \right\rangle.$$

6. En déduire que :

$$\int_{\mathbf{R}^n} q_n(t_1, ..., t_n) \, \mathrm{d}\mu(t_1) ... \mathrm{d}\mu(t_n) = 1$$

et que :

$$\int_{\mathbf{R}^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)^2 e^{-\left(t_1^2 + \cdots + t_n^2\right)} \mathrm{d}t_1 ... \mathrm{d}t_n = \frac{\pi^{n/2}}{D_n} = \pi^{n/2} 2^{-n(n-1)/2} \prod_{j=0}^{n} j! \quad .$$

7. Soient m tel que $2 \leq m \leq n$ et $(t_1, .., t_{m-1}) \in \mathbf{R}^{m-1}$. Démontrer que :

$$\int_{\mathbf{R}} \det\left((K_n(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq m}\right) \mathrm{d}\mu(t_m) = (n - m + 1) \det\left((K_n(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq m-1}\right). \tag{6}$$

Indication : *Développer selon la dernière colonne le déterminant* $\det\left((K_n(t_i, t_j))_{1 \leq i,j \leq m}\right)$ *puis développer certains sous-déterminants selon la dernière ligne.*

PARTIE III : Holomorphie.

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, on note $\mathcal{O}(\Omega)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions holomorphes sur Ω à valeurs dans $\mathbf{C}$. On munit $\mathcal{O}(\Omega)$ de la topologie de convergence uniforme sur tout compact de Ω.

1. Soit log la détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbf{C} \backslash \mathbf{R}_-$ définie par $\log(1) = 0$ et $\sqrt{}$ la fonction racine carrée de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}_+^*$. On note :

$$\Phi : z \mapsto z \exp\left(\frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{2}{z^2}\right)\right).$$

(a) Démontrer que la fonction Φ est holomorphe sur $\mathbf{C} \backslash \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ et que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \backslash \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right], \quad \Phi(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2} & \text{si } x > \sqrt{2} \\ -\sqrt{x^2 - 2} & \text{si } x < -\sqrt{2} \end{cases} .$$

Tournez la page S.V.P.

(b) Soit $C(O,R)$ le cercle de centre O et de rayon R. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \lim_{R \to +\infty} \int_{C(O,R)} \frac{\Phi(w) - w}{w - z} \mathrm{d}w = 0.$$

2. On note G la fonction de $\mathcal{O}\left(\mathbf{C} \setminus \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]\right)$ donnée par :

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right], \quad G(z) = z - \Phi(z).$$

Prouver que :

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right], \qquad \int_{\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]} \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2 - t^2}}{z - t} \mathrm{d}t = G(z).$$

Indication : *On pourra appliquer le théorème des résidus à l'intégrale curviligne* $\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{\Phi(w)}{w - z} \mathrm{d}w$ *où* $\Gamma_{R,\varepsilon}$ *est le contour obtenu en réunissant le cercle* $C(O,R)$ *avec le rectangle dont les sommets sont* $\pm\left(\sqrt{2} + \varepsilon + i\varepsilon\right), \pm\left(\sqrt{2} + \varepsilon - i\varepsilon\right)$.

3. On considère $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathbf{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on définit la fonction H_n par

$$H_n : z \mapsto \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{z - t} \mathrm{d}\sigma_n(t),$$

pour $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.

Supposons que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- $\forall n \geq 1$, $H_n \in \mathcal{O}(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R})$ et $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}, \quad \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(H_n(z)) < 0$;
- $(H_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ et

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} \left((H_n(z))^2 - 2zH_n(z) + 2\right) = 0.$$

(a) Établir que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ converge dans $\mathcal{O}(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R})$.
Indication : *On pourra utiliser le théorème d'Ascoli (ou de Montel).*

(b) Prouver que $(H_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers G sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.

Notations complémentaires pour les parties IV, V et VI.

Dans toute la suite du sujet, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$, on note :

$$M^* = (\overline{m_{j,i}})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{C}) \text{ et } \mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}.$$

Si $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$, on note $\mathrm{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n)$ la matrice diagonale de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On considère $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices hermitiennes défini par :

$$\mathcal{H}_n(\mathbf{C}) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{C}) \quad / \quad M^* = M\}$$

et $U_n(\mathbf{C})$ le sous-groupe de $GL_n(\mathbf{C})$ défini par :

$$U_n(\mathbf{C}) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{C}) \quad / \quad MM^* = I_n\}.$$

On munit $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ (qui est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n^2) de la mesure suivante ω_n définie comme suit : pour toute fonction f mesurable et positive sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$, on pose :

$$\int_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} f(M)\,\mathrm{d}\omega_n(M) = \int_{\mathbf{R}^{n^2}} g\left((u_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}, (v_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}\right) \prod_{1\leq i\leq j\leq n}^{n} \mathrm{d}u_{i,j} \prod_{1\leq i<j\leq n}^{n} \mathrm{d}v_{i,j}$$

où l'on a posé p.p. $\left((u_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}, (v_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}\right) \in \mathbf{R}^{n^2}$,

$$g\left((u_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}, (v_{i,j})_{1\leq i<j\leq n}\right) = f(M_{u,v})$$

avec

$$M_{u,v} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2}+iv_{1,2} & & \cdots & u_{1,n}+iv_{1,n} \\ u_{1,2}-iv_{1,2} & u_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n}+iv_{n-1,n} \\ u_{1,n}-iv_{1,n} & \cdots & \cdots & u_{n-1,n}-iv_{n-1,n} & u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On admet le théorème suivant.

Théorème (Formule d'intégration de Weyl) : *Soit $n \geq 2$, il existe un réel $C_n > 0$ tel que pour toute fonction $f : \mathcal{H}_n(\mathbf{C}) \mapsto \mathbf{R}$ mesurable et intégrable sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ pour la mesure ω_n et vérifiant :*

$$\forall V \in U(n, \mathbf{C}), \quad \forall M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C}), \quad f(VMV^*) = f(M)$$

alors :

$$\int_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} f(M)\,\mathrm{d}\omega_n(M) = C_n \int_{\mathbf{R}^n} f(\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)) \prod_{1\leq i<j\leq n} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}\lambda_i. \qquad (7)$$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE IV : Intégration et probabilités sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$.

Soient $(X_k)_{1\leq k\leq 4}$ quatre variables aléatoires à valeurs réelles définies sur un même espace probabilisé (Ω, P). On pose :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & \frac{X_2+iX_3}{\sqrt{2}} \\ \frac{X_2-iX_3}{\sqrt{2}} & X_4 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\text{p.p. } \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & \frac{X_2(\omega)+iX_3(\omega)}{\sqrt{2}} \\ \frac{X_2(\omega)-iX_3(\omega)}{\sqrt{2}} & X_4(\omega) \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2(\mathbf{C}).$$

X est donc une variable aléatoire sur (Ω, P) à valeurs dans $\mathcal{H}_2(\mathbf{C})$. Pour tous intervalles $(I_k)_{1\leq k\leq 4}$ de $\mathbf{R}$, on pose :

$$U_{I_1,I_2,I_3,I_4} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2+ia_3 \\ a_2-ia_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2(\mathbf{C}), \quad (a_1,a_2,a_3,a_4) \in I_1\times I_2\times I_3\times I_4 \right\}.$$

1. Montrer que les variables $(X_k)_{1\leq k\leq 4}$ sont mutuellement indépendantes et qu'elles suivent la même loi normale $\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{2}\right)$ (*c'est-à-dire qu'elles possèdent pour densité φ, définie en partie I*), si et seulement si pour tous intervalles $(I_k)_{1\leq k\leq 4}$ de $\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} P\left(X \in U_{I_1,I_2,I_3,I_4}\right) &= \frac{2}{\pi^2} \int\limits_{I_1\times I_2\times I_3\times I_4} e^{-\left(x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+x_4^2\right)} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int\limits_{U_{I_1\times I_2\times I_3\times I_4}} e^{-\mathrm{Tr}\left(M^2\right)} \mathrm{d}\omega_2(M). \end{aligned}$$

2. Montrer que :

$$\int\limits_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} e^{-\mathrm{Tr}\left(M^2\right)} \mathrm{d}\omega_n(M) = \frac{\pi^{n^2/2}}{2^{n(n-1)/2}}.$$

En déduire la valeur du réel C_n défini par la relation (7).

Dans la suite du sujet, on considère la mesure P_n de probabilité sur $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ notée symboliquement :

$$\mathrm{d}P_n(M) = \frac{2^{n(n-1)/2}}{\pi^{n^2/2}} e^{-\mathrm{Tr}\left(M^2\right)} \mathrm{d}\omega_n(M), \tag{8}$$

c'est-à-dire pour toute fonction $f : \mathcal{H}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ intégrable, on a :

$$\int\limits_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} f(M)\, \mathrm{d}P_n(M) = \int\limits_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} f(M) \frac{2^{n(n-1)/2}}{\pi^{n^2/2}} e^{-\mathrm{Tr}\left(M^2\right)} \mathrm{d}\omega_n(M).$$

3. Soit $f : \mathcal{H}_n(\mathbf{C}) \mapsto \mathbf{R}$ une fonction mesurable et bornée. On suppose que :

$$\forall V \in U_n(\mathbf{C}), \quad \forall M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C}), \quad f(VMV^*) = f(M).$$

Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mesurable et bornée telle que :

$$\int\limits_{\mathcal{H}_n(\mathbf{C})} f(M)\, \mathrm{d}P_n(M) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} g(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\, q_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\, \mathrm{d}\mu(\lambda_1)\cdots\mathrm{d}\mu(\lambda_n)$$

avec

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \quad \forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{R}^n, \quad g\left(\lambda_{\sigma(1)}, ..., \lambda_{\sigma(n)}\right) = g(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

et q_n définie par la relation (5).

4. Soient $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction mesurable et bornée et $k \in \{1, .., n\}$. On considère la variable aléatoire $F_k : \mathcal{H}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ sur l'espace probabilisé $(\mathcal{H}_n(\mathbf{C}), P_n)$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C}), \quad F_k(M) = \sum_{1 \leq i_1 < .... < i_k \leq n} \gamma(\lambda_{i_1}) ... \gamma(\lambda_{i_k}),$$

où $(\lambda_1, .., \lambda_n)$ désigne les valeurs propres de M (comptées avec multiplicité) et on note $\mathbb{E}_n(F_k)$ son espérance. Prouver que :

$$\mathbb{E}_n(F_k) = \frac{1}{k!} \int_{\mathbf{R}^k} \gamma(\lambda_1) \cdots \gamma(\lambda_k) \det\left((K_n(\lambda_i, \lambda_j))_{1 \leq i,j \leq k}\right) \, \mathrm{d}\mu(\lambda_1) \cdots \mathrm{d}\mu(\lambda_k). \tag{9}$$

Indication : *On pourra utiliser la relation (6).*

PARTIE V : Localisation du spectre.

On munit $\mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ de la mesure P_n de probabilité définie par la relation (8).

Si Y désigne une variable aléatoire sur $(\mathcal{H}_n(\mathbf{C}), P_n)$, on note $\mathbb{E}_n(Y)$ son espérance.

Pour tout intervalle I de $\mathbf{R}$, on note χ_I la fonction indicatrice de I définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \chi_I(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in I \\ 0 \text{ si } x \notin I \end{cases}.$$

Soient $M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (comptées avec multiplicité), $z \in \mathbf{C}$ et $k \in \{1, ..., n\}$, on note :

$$X_I^{(k)}(M) = \sum_{1 \leq i_1 < .... < i_k \leq n} \chi_I(\lambda_{i_1}) ... \chi_I(\lambda_{i_k});$$

$$X_{I,z}(M) = \prod_{i=1}^{n} (1 - z\chi_I(\lambda_i)).$$

On admet que les applications

$$X_I^{(k)} : \begin{cases} \mathcal{H}_n(\mathbf{C}) & \to & \mathbf{N} \\ M & \mapsto & X_I^{(k)}(M) \end{cases} \quad \text{et} \quad X_{I,z} : \begin{cases} \mathcal{H}_n(\mathbf{C}) & \to & \mathbf{C} \\ M & \mapsto & X_{I,z}(M) \end{cases}$$

sont des variables aléatoires sur $(\mathcal{H}_n(\mathbf{C}), P_n)$.

On note $Q_{n,I}$ la fonction définie sur $\mathbf{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad Q_{n,I}(z) = \mathbb{E}_n(X_{I,z}).$$

Pour tout entier $k \in \{0, ..., n\}$ et tout intervalle I, on considère l'événement :

$A_n^{(k)}(I) = \{ M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C})$ tel que M possède exactement k valeurs propres (comptées avec multiplicité) appartenant à $I \}$;

1. Montrer que :

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad \mathbb{E}_n\left(X_I^{(k)}\right) = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} P_n\left(A_n^{(j)}(I)\right),$$

où on a posé : $\forall (j,k) \in \mathbf{N}^2$ avec $k \leq j$, $\binom{j}{k} = \dfrac{j!}{k!\,(j-k)!}$.

2. Soit $z \in \mathbf{C}$. Établir que :

$$Q_{n,I}(z) = 1 + \sum_{j=1}^{n} P_n\left(A_n^{(j)}(I)\right)\left[(1-z)^j - 1\right].$$

En déduire que :

$$\forall k \in \{0, ..., n\}, \quad P_n\left(A_n^{(k)}(I)\right) = \frac{(-1)^k}{k!} Q_{n,I}^{(k)}(1),$$

où $Q_{n,I}^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de $Q_{n,I}$.

3. Démontrer que :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad Q_{n,I}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} z^k \int_{I^k} \det\left((K_n(\lambda_i, \lambda_j))_{1\leq i,j\leq k}\right) \mathrm{d}\mu(\lambda_1) \cdots \mathrm{d}\mu(\lambda_k).$$

Indication : *On pourra utiliser la relation (9).*

4. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a/\sqrt{2n}, b/\sqrt{2n}]^k} \det\left((K_n(\lambda_i, \lambda_j))_{1\leq i,j\leq k}\right) \mathrm{d}\mu(\lambda_1) \cdots \mathrm{d}\mu(\lambda_k)$$
$$= \frac{1}{\pi^k} \int_{[a,b]^k} \det\left(\left(\frac{\sin(t_i - t_j)}{t_i - t_j}\right)_{1\leq i,j\leq k}\right) \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k.$$

Indication : *On admettra le résultat :* $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$ *avec* $a < b$, $\sup_{\substack{(x,y)\in[a,b]^2 \\ n\in\mathbf{N}^*}} \left|\sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n\left(\frac{x}{\sqrt{2n}}, \frac{y}{\sqrt{2n}}\right)\right|$ *est fini et l'identité suivante :*

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad x \neq y \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} K_n\left(\frac{x}{\sqrt{2n}}, \frac{y}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{\sin(x-y)}{x-y},$$

qui sont conséquences des relations (3) et (4).

5. Montrer que la fonction $Q : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ donnée pour tout $z \in \mathbf{C}$ par :

$$Q(z) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{\pi}\right)^k \int_{[a,b]^k} \det\left(\left(\frac{\sin(\lambda_i - \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}\right)_{1\leq i,j\leq k}\right) \mathrm{d}\lambda_1 \cdots \mathrm{d}\lambda_k$$

est bien définie et holomorphe sur $\mathbf{C}$.

Indication : *On pourra utiliser l'inégalité d'Hadamard* :

$$\forall S = (s_{i,j})_{1\leq i,j\leq k} \in \mathcal{H}_k(\mathbf{C}), \quad |\det(S)| \leq \prod_{j=1}^{k} \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |s_{i,j}|^2}.$$

6. Montrer que la suite de fonctions holomorphes $\left(Q_{n,[a/\sqrt{2n},b/\sqrt{2n}]}\right)_{n\geq 2}$ converge vers la fonction holomorphe Q dans $\mathcal{O}(\mathbf{C})$.
7. Prouver que pour tout $m \in \mathbf{N}$:

$$\lim_{n\to+\infty} P_n\left(A_n^{(m)}\left(\left[\frac{a}{\sqrt{2n}},\frac{b}{\sqrt{2n}}\right]\right)\right) = \frac{(-1)^m}{m!}Q^{(m)}(1).$$

PARTIE VI : Loi du demi-cercle.

Soit $z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$, on désigne par $R_z^{(n)}$ la variable aléatoire définie sur $(\mathcal{H}_n(\mathbf{C}), P_n)$ par :

$$\forall M \in \mathcal{H}_n(\mathbf{C}), \quad R_z^{(n)}(M) = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}\left((zI_n - M)^{-1}\right).$$

On note $\mathbb{E}_n\left(R_z^{(n)}\right)$ son espérance et

$$G_n(z) = \sqrt{n}\mathbb{E}_n\left(R_{\sqrt{n}z}^{(n)}\right).$$

On considère v_n la mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$ donnée par :

$$\mathrm{d}v_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}K_n\left(t\sqrt{n}, t\sqrt{n}\right)\ \varphi\left(t\sqrt{n}\right)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que, pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$:

$$\mathbb{E}_n\left(\frac{1}{n}X^{(1)}_{[a\sqrt{n},b\sqrt{n}]}\right) = v_n([a,b]),$$

   où la variable aléatoire $X_I^{(1)}$ est définie en début de partie V. Comment interpréter ce résultat ?

2. Prouver que :

$$\forall z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}, \quad G_n(z) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{d}v_n(t)}{z-t}.$$

   Indication : *On pourra utiliser la question IV-4.*

La suite du problème fait intervenir des distributions. On note :
- $\mathcal{D}\left(\mathbf{R}^2\right)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ à support compact ;
- $\mathcal{D}'\left(\mathbf{R}^2\right)$ l'ensemble des distributions sur $\mathbf{R}^2$.

Toute fonction $f : \mathbf{C}\backslash E \to \mathbf{C}$ (avec E est un ensemble de mesure nulle de $\mathbf{C}$) sera identifiée abusivement à la fonction

$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2\backslash E' & \to & \mathbf{C} \\ (x,y) & \mapsto & f(x+iy) \end{array} \right.$$

où l'on a posé :

$$E' = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad / \quad x+iy \in E\right\}.$$

En particulier, on notera $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ la fonction :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\} & \to & \mathbf{C} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{1}{x+iy} \end{array} \right. .$$

En outre, si $\tilde{f}$ est localement intégrable sur $\mathbf{R}^2$, on identifiera alors f à une distribution sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}\left(\mathbf{R}^2\right), \quad \langle f, \psi \rangle = \int_{\mathbf{R}^2} \psi(x,y) f(x+iy) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Toute mesure de probabilité σ sur $\mathbf{R}$ sera identifiée à la distribution sur $\mathbf{R}^2$ donnée par :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}\left(\mathbf{R}^2\right), \quad \langle \sigma, \psi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \psi(t,0) \, \mathrm{d}\sigma(t).$$

Enfin, on considère la mesure de probabilité v définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\mathrm{d}v(t) = \frac{1}{\pi}\sqrt{2-t^2}\,\chi_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On rappelle que la fonction G est définie à la question III-2 et qu'on y démontre la relation suivante :

$$\forall z \in \mathbf{C} \backslash \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right], \quad G(z) = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{z-t} \mathrm{d}v(t).$$

$$\boxed{\text{On admet que } (G_n)_{n\geq 2} \text{ converge vers } G \text{ dans } \mathcal{O}(\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}).}$$

3. Prouver qu'il existe un réel $c > 0$ tel que :

$$\forall R \in \mathbf{R}_+, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \iint_{|x+iy|\leqslant R} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|(x+iy)-t|} \leqslant cR.$$

En déduire que les fonctions $z \mapsto \frac{1}{z}$, G_n et G sont localement intégrables sur $\mathbf{R}^2$.

4. Démontrer que $(G_n)_{n\geq 2}$ converge vers G dans $\mathcal{D}'\left(\mathbf{R}^2\right)$ c'est-à-dire que :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}\left(\mathbf{R}^2\right), \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}^2} G_n(x+iy)\,\psi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^2} G(x+iy)\,\psi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

5. On définit l'opérateur $\overline{\partial}$ sur $\mathcal{D}\left(\mathbf{R}^2\right)$ par : $\overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Prouver l'égalité suivante dans $\mathcal{D}'\left(\mathbf{R}^2\right)$:

$$\overline{\partial}\left(\frac{1}{z}\right) = \pi\delta_{(0,0)},$$

c'est-à-dire :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}\left(\mathbf{R}^2\right), \quad -\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{x+iy}\overline{\partial}\psi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\psi(0,0).$$

6. Montrer qu'on a dans $\mathcal{D}'\left(\mathbf{R}^2\right)$:

$$\overline{\partial}G = \pi v \quad \text{et} \quad \overline{\partial}G_n = \pi v_n.$$

En déduire que la suite de distributions $(v_n)_{n\geq 2}$ converge vers v dans $\mathcal{D}'\left(\mathbf{R}^2\right)$.

Indication : *On pourra remarquer que l'on a* $G_n = \frac{1}{z} * v_n$.

7. En déduire que pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n([a,b]) = v([a,b]).$$

Interpréter ce résultat.