MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

EAI MAT 1

SESSION 2020

AGRÉGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► **Concours interne de l'Agrégation de l'enseignement public** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAI	1300A	101	0540

► **Concours interne du CAER / Agrégation de l'enseignement privé** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAH	1300A	101	0540

Préambule : notations et rappels

Notations

- ▷ On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs et par $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs.
- ▷ On désigne par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes et par $\mathbf{K}$ l'un de ces deux corps lorsqu'on ne souhaite pas le préciser.
- ▷ Si m et n sont deux entiers relatifs, on pose $[\![m\,;\,n]\!] = \{k \in \mathbf{Z} ; m \leqslant k \leqslant n\}$.
- ▷ Pour n entier naturel non nul, on note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $[\![1\,;\,n]\!]$.
- ▷ Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, on note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des endomorphismes inversibles.
- ▷ Pour une famille $(u_1, \dots, u_k)$ de vecteurs de E, on note $\mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_k)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille.
- ▷ Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la $\mathbf{K}$-algèbre des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbf{K}$ et I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
- ▷ On note $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ le groupe multiplicatif des matrices inversibles, $\mathrm{O}_n(\mathbf{K})$ celui des matrices orthogonales et $\mathrm{SO}_n(\mathbf{K})$ le groupe des matrices orthogonales de déterminant égal à 1.
- ▷ On note $T_n^+(\mathbf{K})$ le groupe multiplicatif des matrices triangulaires supérieures inversibles et $T_n^-(\mathbf{K})$ le groupe multiplicatif des matrices triangulaires inférieures inversibles.
- ▷ Soit n un entier naturel non nul et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
  Pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, on note L_i la i-ème ligne de la matrice A. Pour $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, on note C_j la j-ème colonne de la matrice A.
- ▷ Soit n un entier naturel non nul et $(i, j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne qui vaut 1. Par exemple lorsque $n = 2$, on a :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rappels et compléments sur les actions de groupe (pour la partie IV)

- ▷ Soient $(G, *)$ un groupe dont l'élément neutre est noté e et X un ensemble non vide. On appelle **action** de G sur X toute application :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array} \right.$$

  vérifiant les deux propriétés suivantes :

  1. $\forall x \in X,\ e \cdot x = x$

  2. $\forall g, h \in G,\ \forall x \in X,\ g \cdot (h \cdot x) = (g * h) \cdot x$

Tournez la page S.V.P.

Lorsque l'on dispose d'une telle action, on dit que le groupe G **agit** sur l'ensemble X.

- ▷ Pour tout $x \in X$, on désigne par O_x l'**orbite** de x. Par définition :

$$O_x = \{y \in X,\ \exists g \in G,\ y = g \cdot x\}.$$

On rappelle que la relation binaire $\mathcal{R}$, définie sur X par $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \in O_x$, est une relation d'équivalence sur X.

- ▷ Le **stabilisateur** d'un élément x de X est le sous-groupe de G défini par :

$$\mathrm{Stab}_x = \{g \in G,\ g \cdot x = x\}.$$

- ▷ On dit qu'une action est **transitive** (ou que le groupe G **agit transitivement** sur X) lorsque l'action ne possède qu'une seule orbite. Autrement dit :

$$\forall (x, y) \in X \times X,\ \exists g \in G \text{ tel que } y = g \cdot x.$$

- ▷ On dira qu'une action est **fidèle** (ou que le groupe G **agit fidèlement** sur X) lorsque l'intersection de tous les stabilisateurs est le sous-groupe $\{e\}$:

$$\bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}_x = \{e\}.$$

Partie I : drapeaux de sous-espaces vectoriels

Dans toute cette partie, E est un espace vectoriel de dimension finie n ($n \geqslant 1$) sur $\mathbf{K}$ (on rappelle que $\mathbf{K}$ désigne indifféremment le corps des réels ou des complexes).

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Une famille $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ de sous-espaces vectoriels de E est appelée drapeau si elle vérifie :

$$\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_p = E$$

En particulier pour tout entier i compris entre 0 et $p-1$, E_i est un sous-espace vectoriel strict de E_{i+1}. On dit qu'un drapeau $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ est **total** lorsque $p = n$.

1. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On pose $E_0 = \{0\}$ et, $\forall j \in [\![1\,;\, n]\!]$, $E_j = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_j)$.
Montrer que $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est un drapeau total de E.

Etant donné un drapeau total $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, on dit qu'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est **adaptée** à ce drapeau si $\forall j \in [\![1\,;\, n]\!]$, $E_j = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_j)$.

2. Montrer que tout drapeau total admet une base adaptée.

3. Soit $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ un drapeau total de E. Montrer que si E est un espace euclidien, alors il existe une base orthonormée de E adaptée au drapeau.

Soit $u \in L(E)$. On dit qu'un drapeau $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est stable par u lorsque, pour tout $i \in [\![0\,;\, n]\!]$, le sous-espace E_i est stable par u.

Dans la suite de cette partie, u désigne un endomorphisme de E.

4. On suppose *dans cette question uniquement* que u est diagonalisable. Montrer qu'il existe un drapeau total de E, stable par u.

5. On suppose *dans cette question uniquement* que u est nilpotent d'indice n, c'est-à-dire que u vérifie $u^n = 0_{L(E)}$ et $u^{n-1} \neq 0_{L(E)}$.

   (a) Soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$ et $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(u^{n-j}(x))_{j\in[\![1\,;\,k]\!]}$ est libre.

   (b) Montrer que $(\mathrm{Ker}\ u^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est un drapeau total de E, stable par u. Construire une base adaptée à ce drapeau.

6. Montrer que u est trigonalisable si et seulement si E admet un drapeau total stable par u.

7. Montrer à l'aide des questions précédentes que si E est euclidien et que u est trigonalisable, alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Partie II : des groupes quotients

Dans cette partie, on désigne par G un groupe dont la loi est notée multiplicativement et H un sous-groupe de G. On note 1_G l'élément neutre de G.
On rappelle que si $g \in G$, on désigne par gH l'ensemble appelé **classe à gauche** :

$$gH = \{gh,\ h \in H\}.$$

De manière analogue, on appelle l'ensemble Hg une classe à droite.
On rappelle que la relation binaire définie par : $g_1 \mathcal{R} g_2 \Leftrightarrow g_2 \in g_1 H$ est une relation d'équivalence, dont les classes sont les ensembles du type gH et que l'on désigne par G/H l'ensemble quotient pour cette relation.
On dit que le sous-groupe H est distingué dans G lorsque : $\forall g \in G,\ gH = Hg$. On note dans ce cas $H \triangleleft G$. On remarquera que $H \triangleleft G \Leftrightarrow \forall g \in G,\ g^{-1}Hg \subset H$.

8. Soit $H \triangleleft G$.

   (a) Montrer que G/H peut être muni d'une structure de groupe en considérant la loi de composition $\star$ définie par $(g_1H) \star (g_2H) = g_1g_2H$.
   On expliquera pourquoi on a bien défini ainsi une loi de composition interne sur G/H.

   (b) Montrer que l'application $\pi : G \to G/H$ définie pour tout $g \in G$ par $\pi(g) = gH$ est un morphisme de groupe surjectif.

9. On désigne dans cette question par $TU_n^+(\mathbf{K})$ le groupe des matrices triangulaires supérieures dont tous les coefficients diagonaux valent 1.

   (a) Montrer que $TU_n^+(\mathbf{K}) \triangleleft T_n^+(\mathbf{K})$.

   (b) A-t-on $TU_n^+(\mathbf{K}) \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$?

10. Soit H un sous-groupe quelconque de G. On suppose que G/H est un ensemble fini à deux éléments. Montrer que $H \triangleleft G$.

11. *Dans cette question uniquement*, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On désigne par
$$\Delta = \left\{ I_2, A, A^2, A^3, B, AB, A^2B, A^3B \right\}.$$

(a) Vérifier que $A^3B = BA$, et montrer que Δ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

(b) On définit $\Gamma =< A >$ le sous-groupe de Δ engendré par A et $R =< B >$ le sous-groupe de Δ engendré par B. Montrer que Δ/Γ est un groupe, isomorphe à R.

(c) Existe-t-il un isomorphisme entre les groupes Δ et $\Gamma \times R$?

Soient H et K deux sous-groupes quelconques de G. Pour tout $g \in G$ on appelle double classe de g relative aux sous-groupes H et K l'ensemble :

$$HgK = \left\{ hgk,\ (h,k) \in H \times K \right\}.$$

Dans la suite, H et K étant fixés, on parlera simplement de « la double classe d'un élément de G ».

12. **(a)** Montrer qu'une double classe est une réunion de classes à gauche, et aussi une réunion de classes à droite.

(b) Montrer que les doubles classes relatives aux sous-groupes H et K constituent une partition de G.

Partie III : décomposition de Bruhat et matrices

Dans cette partie, E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbf{N}^*$).
On munit E d'une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

13. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, soit u_σ l'endomorphisme de E défini par l'égalité :

$$\forall i \in [\![1\,; n]\!],\ u_\sigma(\varepsilon_i) = \varepsilon_{\sigma(i)}$$

et P_σ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Une telle matrice P_σ est appelée matrice de permutation.

(a) *Dans cette question uniquement*, σ est le n-cycle $(1, 2, \ldots, n)$. Expliciter la matrice P_σ.

(b) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note $\sigma = c_1 \ldots c_k$ une décomposition de σ en cycles de supports disjoints, où $k \in \mathbf{N}^*$.
Exprimer la matrice P_σ en fonction des matrices P_{c_j} pour $j \in [\![1\,; k]\!]$.

(c) Montrer que $P_\sigma \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$.

(d) À quelle condition sur σ la matrice P_σ appartient-elle à $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$?

14. Pour $\lambda \in \mathbf{K}$ et $(i,j) \in [\![1\,; n]\!]^2$, on note $T_{i,j}(\lambda)$ la matrice $I_n + \lambda E_{i,j}$.
Pour $\lambda \in \mathbf{K}$ et $i \in [\![1\,; n]\!]$, on note $D_i(\lambda)$ la matrice $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

(a) Montrer que la matrice $T_{i,j}(\lambda)A$ est obtenue à partir de A en effectuant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

(b) De manière analogue, donner les opérations élémentaires à effectuer pour obtenir les matrices $D_i(\lambda)A$, $AT_{i,j}(\lambda)$ et $AD_i(\lambda)$.

(c) Donner les opérations élémentaires à effectuer pour obtenir les matrices $P_{i,j}A$ et $AP_{i,j}$, où $P_{i,j}$ désigne la matrice P_σ lorsque σ est la transposition (i, j). Expliquer sans démonstration comment obtenir $P_\sigma A$ et AP_σ à partir de A, lorsque $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation quelconque.

15. Soient U et V deux matrices triangulaires supérieures inversibles et soient σ et σ' deux permutations.
On suppose que $P_\sigma^{-1}UP_{\sigma'} = V$. Montrer que $\sigma = \sigma'$. *Indication :* On pourra considérer le coefficient d'indice $(\sigma(j), j)$ de $P_\sigma V$, où $j \in [\![1\,;\,n]\!]$.

16. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ une matrice inversible.

(a) Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure U ne comportant que des 1 sur la diagonale, une matrice triangulaire supérieure V et une matrice de transposition P_σ telles que $A = UP_\sigma V$ et que cette écriture peut être obtenue à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de la matrice A. *On appelle cette écriture décomposition de Bruhat de la matrice A.*

(b) Montrer que la matrice P_σ de la question précédente est uniquement déterminée par A.

Le résultat de la question 16 permet donc d'affirmer que

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \subset \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_n^+(\mathbf{K}) P_\sigma T_n^+(\mathbf{K}).$$

Nous admettrons par la suite que cette inclusion est une égalité.

17. Déterminer la décomposition de Bruhat d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$ i.e. telle que $ad - bc = 1$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se place dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ d'une norme quelconque $\|\cdot\|$.
Les **mineurs principaux** d'une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont les déterminants des matrices extraites $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1\,;\,k]\!]^2}$ pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, ces matrices étant obtenues en ne conservant que les k premières lignes et k premières colonnes de la matrice A.

18. On considère les deux propositions ci-dessous, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$:

- ▷ $(\mathbf{E}_1)$: la matrice A s'écrit comme produit d'un élément de $T_n^-(\mathbf{C})$ et d'un élément de $T_n^+(\mathbf{C})$,
- ▷ $(\mathbf{E}_2)$: les mineurs principaux de A sont tous non nuls.

(a) Montrer que si A satisfait la propriété $(\mathbf{E}_1)$ ou la propriété $(\mathbf{E}_2)$ alors $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

(b) À l'aide d'une décomposition par blocs, montrer que $(\mathbf{E}_1) \Rightarrow (\mathbf{E}_2)$.

(c) En procédant par récurrence, montrer que $(\mathbf{E}_2) \Rightarrow (\mathbf{E}_1)$.

19. Montrer que l'ensemble des matrices qui vérifient la condition $(\mathbf{E}_2)$ est un ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
Indication : on pourra considérer pour $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ l'application φ_k de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ qui à une matrice A, associe son mineur principal d'ordre k.

20. Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$ définie, pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, par : $\tau(k) = n - k + 1$.

(a) Montrer que : $P_\tau T_n^+(\mathbf{C})P_\tau = T_n^-(\mathbf{C})$, où $P_\tau T_n^+(\mathbf{C})P_\tau$ désigne l'ensemble $\left\{P_\tau U P_\tau, U \in T_n^+(\mathbf{C})\right\}$.

(b) Montrer que $P_\tau T_n^+(\mathbf{C})P_\tau T_n^+(\mathbf{C}) = \left\{P_\tau U P_\tau V,\ (U, V) \in T_n^+(\mathbf{C}) \times T_n^+(\mathbf{C})\right\}$ est un ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

(c) Montrer que $P_\tau T_n^+(\mathbf{C})P_\tau T_n^+(\mathbf{C})$ est dense dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

(d) Montrer que l'application :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \\ A & \longmapsto & P_\tau A \end{array}\right.$$

réalise un homéomorphisme.

(e) En déduire que $T_n^+(\mathbf{C})P_\tau T_n^+(\mathbf{C})$ est un ouvert dense de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Que peut-on affirmer sur la topologie de l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \neq \tau}} T_n^+(\mathbf{C})P_\sigma T_n^+(\mathbf{C})$?

Partie IV : décomposition de Bruhat et drapeaux

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^*$.
On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux totaux de E et Δ l'ensemble des bases de E.

Dans cette partie, on désigne par δ l'application de Δ à valeurs dans $\mathcal{D}$ qui, à une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$, associe le drapeau total $(\mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_i))_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$.

21. Montrer que le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ agit fidèlement et transitivement sur l'ensemble Δ par :

$$g \cdot (e_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} = \big(g(e_i)\big)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}.$$

22. Montrer que $\mathrm{GL}(E)$ agit transitivement sur l'ensemble $\mathcal{D}$ par :

$$g \cdot (E_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} = \big(g(E_i)\big)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$$

et que les actions définies dans cette question et la question précédente sont compatibles, c'est-à-dire que :

$$\forall B \in \Delta,\ \forall g \in \mathrm{GL}(E),\ \delta(g \cdot B) = g \cdot \delta(B).$$

Dans la suite de la partie, *via* le choix d'une base $B_0 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, on identifie E à $\mathbf{K}^n$ et le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ à l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ des matrices inversibles.

23. Montrer que le stabilisateur de $\delta(B_0)$ s'identifie au sous-groupe $T_n^+(\mathbf{K})$ des matrices triangulaires supérieures inversibles.

24. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ par : $M \,\mathcal{R}\, N$ si et seulement si $M^{-1}N \in T_n^+(\mathbf{K})$, pour $M, N \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
Pour $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, on note $\overline{M}$ la classe de M dans l'ensemble quotient $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K})$.

25. On considère l'application φ suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \overline{M} & \longmapsto & \varphi(\overline{M}) = M \cdot \delta(B_0) \end{array} \right.$$

- **(a)** Montrer que φ est bien définie.
- **(b)** Montrer que φ est une bijection de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K})$ sur $\mathcal{D}$.

26. Montrer que pour tout X et Y de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, on a $\varphi(\overline{XY}) = X \cdot \varphi(\overline{Y})$.

On considère l'action du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K})$ définie par $A \cdot (\overline{X}, \overline{Y}) = (\overline{AX}, \overline{AY})$.

27. Soient X et Y dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. À l'aide de la décomposition de Bruhat, montrer qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $T_1 \in T_n^+(\mathbf{K})$ tel que $(\overline{X}, \overline{Y}) = XT_1 \cdot (\overline{I_n}, \overline{P_\sigma})$, et que σ est unique.

28. En déduire le nombre d'orbites dans l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})/T_n^+(\mathbf{K})$.

—————— FIN DU SUJET ——————