ministère
éducation
nationale
jeunesse
vie associative

EAI MAT 2
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2012

AGRÉGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

SECONDE ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

– NOTATIONS ET RAPPELS –

- ▷ $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- ▷ $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
- ▷ Pour tous entiers naturels p et q vérifiant $p \leqslant q$, l'ensemble $\{n \in \mathbf{N} \ / \ p \leqslant n \leqslant q\}$ est noté $[\![p,q]\!]$.
- ▷ Définition : on dit qu'une suite u est périodique à partir d'un certain rang si

$$\exists p \in \mathbf{N}^*, \ \exists N \in \mathbf{N}, \ \forall n \geqslant N, \quad u_{n+p} = u_n \, .$$

- ▷ **Dans tout le problème** E désigne un espace vectoriel réel **de dimension finie** que l'on munit d'une norme notée $\|.\|$. Sauf contre-indication, les suites étudiées dans ce problème sont à valeurs dans E.
- ▷ Pour tout élément x de E et tout réel strictement positif r, $\mathcal{B}(x,r)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r.
- ▷ Pour toute partie A de E, on note $\overline{A}$ l'adhérence de A dans E.
- ▷ Si f est une application d'un ensemble A vers lui-même et si n est un entier strictement positif, on note f^n l'application

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} .$$

On pose par convention $f^0 = Id_A$.

Rappels

- ▷ Définition : soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit qu'une suite $v = (v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une **suite extraite** de la suite u s'il existe une application strictement croissante φ de l'ensemble $\mathbf{N}$ vers lui-même vérifiant $v = u \circ \varphi$, c'est-à-dire $(v_n)_{n \in \mathbf{N}} = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbf{N}}$.
- ▷ Définition : soit u une suite de E. Un élément ℓ de E est dit **valeur d'adhérence** de cette suite s'il est limite d'une suite extraite de la suite u.
- ▷ Définition équivalente : un élément ℓ de E est valeur d'adhérence d'une suite u si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \quad \exists n \geqslant N / \ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon \, .$$

Notations

- ▷ On note $V(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite u.
- ▷ Pour toute suite u et pour tout entier naturel N, on note $T_N(u)$ l'ensemble des termes d'indice supérieur ou égal à N de la suite u, c'est-à-dire :

$$T_N(u) = \{x \in E \ / \ \exists n \in \mathbf{N}, \ n \geqslant N, \ x = u_n\} \, .$$

On remarquera que $T_0(u)$ est l'ensemble image de la suite u.

– Partie I : Valeurs d'adhérence –

A) Premières propriétés de $V(u)$

On considère une suite u d'éléments de E.

1. Démontrer que
$$\forall N \in \mathbf{N}, \quad \overline{T_N(u)} = T_N(u) \cup V(u).$$

2. Démontrer que :
$$V(u) = \bigcap_{N\in\mathbf{N}} \overline{T_N(u)}$$

3. Vérifier que l'ensemble $V(u)$ est

(a) un fermé de E ;

(b) un compact non vide si la suite u est bornée.

4. **(a)** On considère une suite u bornée telle que $V(u)$ soit fini. On note $\ell_0, \ell_1, \cdots, \ell_k$ les valeurs d'adhérence de u. Soit ε un réel strictement positif. Démontrer qu'il existe un entier n_0 vérifiant :
$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \in \bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{B}(\ell_i, \varepsilon)\ .$$

(b) En déduire qu'une suite bornée u est convergente si et seulement si $V(u)$ est un singleton.

5. Soient u et v deux suites d'éléments de E. Démontrer qu'il existe une suite w vérifiant :
$$V(w) = V(u) \cup V(v)\,.$$

B) Exemples

On dit qu'une partie A de E est **discrète** s'il existe un réel r strictement positif vérifiant
$$\forall (a,a') \in A^2, \quad a \neq a' \Longrightarrow \|a - a'\| \geqslant r\,.$$

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **discrète** si son ensemble image est une partie discrète de E.

6. Démontrer qu'une suite discrète convergente est stationnaire.

7. Démontrer que si $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite discrète alors
$$V(u) = \bigcap_{N\in\mathbf{N}} T_N(u)\,.$$

8. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique couple d'entiers naturels (p,k) vérifiant :
$$n = 2^p + k \text{ avec } k < 2^p\,.$$

9. Écrire dans le langage de votre choix, mais en n'utilisant pas de fonction «puissance», un algorithme donnant à partir d'un entier naturel n non nul, l'unique couple d'entiers naturels (p,k).

10. On reprend la décomposition vue dans la question 8, et on pose $k = k_n$ ainsi que $p = p_n$. On définit sur $\mathbf{N}^*$ la suite réelle u par
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = k_n\,.$$

(a) Détailler les valeurs de u_n pour n compris entre 1 et 20. On présentera les résultats dans un tableau.

Tournez la page S.V.P.

(b) Donner l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u.

11. Toujours avec la décomposition vue dans la question 8, on définit sur $\mathbf{N}^*$ la suite v par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad v_n = \frac{k_n}{2^{p_n}}\,.$$

On considère un réel x appartenant à l'intervalle $[0,1[$ et un entier naturel n.

(a) Démontrer que x est une valeur d'adhérence de la suite v.

(b) Déterminer alors $V(v)$.

C) Limite inférieure d'une suite réelle

Pour les questions 12 à 15, on considère une suite réelle bornée $u = (u_n)$.

12. Soit N un entier naturel. Justifier l'existence de

$$m_N = \inf T_N(u)\,.$$

13. **(a)** Démontrer que la suite $(m_N)_{N\in\mathbf{N}}$ est convergente. Sa limite est appelée **limite inférieure** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et notée $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(b) Vérifier que

$$\inf u \leqslant \liminf_{n\to+\infty} u_n \leqslant \sup u.$$

14. Montrer que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ est une valeur d'adhérence de la suite u.

15. Dans cette question, on compare $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\inf V(u)$ et $\min V(u)$. Soit ℓ une valeur d'adhérence de la suite u. Démontrer que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \ell$. Conclure.

16. On considère deux suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que, pour tout entier n, $u_n \leqslant v_n$. Démontrer que

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leqslant \liminf_{n\to+\infty} v_n\,.$$

17. On considère deux suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Comparer les nombres suivants

$$\liminf_{n\to+\infty}(u_n + v_n) \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} u_n + \liminf_{n\to+\infty} v_n$$

et donner au moins un exemple de suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que l'égalité n'ait pas lieu.

D) Suites à évolution lente

On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de E est à **évolution lente** si

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_{n+1} - u_n\| = 0\,.$$

18. Donner un exemple de suite bornée, à évolution lente mais non convergente.

Le but des questions qui suivent est de montrer que si une suite u est bornée et à évolution lente alors l'ensemble $V(u)$ est connexe.
Nous allons effectuer une preuve par l'absurde ; ***on suppose donc que*** $V(u)$ ***n'est pas connexe.***

19. Démontrer qu'il existe deux compacts non vides K_1 et K_2 vérifiant

$$\begin{cases} K_1 \cap K_2 = \emptyset \\ K_1 \cup K_2 = V(u). \end{cases}$$

20. Démontrer que la distance entre K_1 et K_2 est strictement positive. Elle sera notée a.

21. On note

$$\Omega_1 = \left\{x \in E / d(x, K_1) < \frac{a}{3}\right\} \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \left\{x \in E / d(x, K_2) < \frac{a}{3}\right\}.$$

On considère M un majorant de la suite $\|u\| = (\|u_n\|)$. Démontrer que

$$K = \overline{\mathcal{B}(0, M)} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$$

est un compact.

22. Démontrer qu'il existe une suite extraite de u à valeurs dans K et conclure à l'absurdité de l'hypothèse initiale.

– Partie II : Valeurs d'adhérence de suites itératives –

On considère une partie compacte K de E, une application continue f définie sur K, à valeurs dans K et enfin une suite récurrente u associée à f, c'est-à-dire définie par

$$\begin{cases} u_0 \in K, \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

23. Démontrer que $V(u)$ est invariant par f, c'est-à-dire que $f(V(u)) = V(u)$.

Pour les questions 24 à 27, le compact K est le segment $[0,1]$, *la fonction* f *est définie par*

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & 1 - |2x - 1| \end{array} \quad \textit{c'est-à-dire } f(x) = \begin{cases} 2x & \textit{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2(1-x) & \textit{si} \quad x \in]\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

et u est une suite récurrente associée à f.

24. Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a l'équivalence : $\quad x \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow f(x) \in \mathbf{Q}$.

Le but des questions 25 et 26 est de montrer que la suite u est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si le réel u_0 est un nombre rationnel.

25. Dans cette question, on suppose que u_0 est un nombre rationnel. Il existe donc deux entiers a et b tels que $u_0 = \frac{a}{b}$ avec $0 \leqslant a \leqslant b$, a et b étant premiers entre eux.

(a) Démontrer que pour tout entier naturel n, le réel u_n s'écrit sous la forme $u_n = \frac{h_n}{b}$ où h_n est un entier naturel inférieur ou égal à b.

(b) Démontrer qu'il existe un entier naturel N et un entier strictement positif p tels que $u_{N+p} = u_N$. En déduire que u est périodique à partir d'un certain rang.

26. On suppose que la suite u est périodique à partir d'un certain rang.

(a) Soit x un réel appartenant au segment $[0,1]$. Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe deux entiers a_n et b_n dépendant de x vérifiant

$$f^n(x) = a_n x + b_n$$

(b) En déduire que u_0 est un nombre rationnel.

27. Soit p un entier strictement positif. On considère la suite u de premier terme $u_0 = \dfrac{2}{1 + 2^p}$.

(a) Donner les valeurs de u_k pour tout entier k compris entre 0 et p.

(b) Donner l'ensemble $V(u)$ des valeurs d'adhérence de u. On justifiera la réponse.

– Partie III : Force d'un point par rapport à une suite –

Pour les questions 28 à 30, on considère un nombre réel x et une suite réelle u. À tout réel strictement positif ε, on associe la suite $(H_m(x,u,\varepsilon))_{m\in\mathbf{N}^*}$ définie par

$$\forall m \in \mathbf{N}^*, \quad H_m(x,u,\varepsilon) = \frac{\mathrm{Card}\left\{n \in [\![0, m-1]\!] / |x - u_n| < \varepsilon\right\}}{m},$$

où Card A représente le cardinal d'un ensemble A. Ainsi, $H_m(x,u,\varepsilon)$ représente la proportion des m premiers éléments de la suite appartenant à la boule ouverte de centre x et de rayon ε.

28. Démontrer que la suite $(H_m(x,u,\varepsilon))_{m\in\mathbf{N}^*}$ est bornée. On note

$$H(x,u,\varepsilon) = \liminf_{m\to+\infty} H_m(x,u,\varepsilon)\,.$$

29. Démontrer que l'application $H(x,u,.)$ définie par

$$H(x,u,.) : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \varepsilon & \longmapsto & H(x,u,\varepsilon) \end{array}$$

admet une limite à droite en 0 que l'on note $F(x,u)$.

*Cette limite est appelée **force** de x par rapport à la suite u.*

30. Démontrer que

$$0 \leqslant F(x,u) \leqslant 1\,.$$

31. Soit u une suite réelle. On considère un entier p strictement positif et $(p+1)$ réels distincts que l'on note $x_0, x_1, \cdots, x_p$.

(a) Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{p} F(x_k, u) \leqslant 1\,.$$

(b) Soit $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de réels distincts. Démontrer que la série $\sum F(x_k,u)$ est convergente avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty} F(x_k, u) \leqslant 1\,.$$

32. On considère dans cette question u une suite réelle convergente vers un réel ℓ.

(a) Démontrer que

$$F(\ell, u) = 1\,.$$

(b) En déduire que

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{\ell\}, \quad F(x,u) = 0\,.$$

33. Démontrer que si un réel a une force strictement positive par rapport à une suite u alors il est valeur d'adhérence de cette suite.

Nous verrons grâce à la question 35 que la réciproque est fausse.

34. Donner un exemple d'une suite bornée divergente u et d'un réel x vérifiant

$$F(x,u) = 1\,.$$

35. Donner un exemple de suite u ayant une suite de valeurs d'adhérence $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ deux à deux distinctes et vérifiant
$$\sum_{k=0}^{+\infty} F(x_k, u) = 0\,.$$

– Partie IV : Algorithme déterminant le nombre de valeurs d'adhérence –

Définition : on appelle **liste de réels** toute suite finie de nombres réels.
Par exemple : $L = (2; 5; 20; 15; 12; 14; 3, 14; 15)$.
À toute liste de réels $L = (x_1; \ldots; x_p)$ et à tout réel strictement positif r, on associe $\mathcal{G}(L, r)$ l'union suivante de segments :
$$\mathcal{G}(L,r) = \bigcup_{((i,j)/0\leqslant x_j - x_i \leqslant r)} [x_i, x_j]\,.$$

On note $\mathcal{N}(L, r)$ le nombre de composantes connexes de $\mathcal{G}(L, r)$, c'est-à-dire le nombre de segments disjoints composant $\mathcal{G}(L, r)$.

36. Soit $L = (2; 5; 20; 15; 12; 14; 3, 14; 15)$ et $r = 2$.
Donner sans justification $\mathcal{G}(L, r)$ et $\mathcal{N}(L, r)$.

37. On considère une liste de réels L et un réel r strictement positif. Écrire dans le langage de votre choix un algorithme permettant de déterminer $\mathcal{N}(L, r)$.
On pourra supposer qu'on dispose d'une fonction permettant de trier les éléments d'une liste par ordre croissant.

Jusqu'à la fin du problème, on considère une suite bornée u admettant un nombre fini de valeurs d'adhérence, notées $y_1, y_2, \cdots y_q$, **toutes de force strictement positive** *et un réel strictement positif r vérifiant pour tout $i \neq j$, $|y_i - y_j| \geqslant r$.*
On considère, pour tout entier naturel p strictement supérieur à 1, la liste
$$L_p = (u_p; u_{p+1}; \cdots; u_{p^2-1})\,.$$

On considère enfin l'algorithme N.V.A. qui à l'entier p associe le nombre $N.V.A(p) = \mathcal{N}(L_p, \frac{2r}{5})$. Le but de cette dernière partie est de prouver que la suite $(N.V.A.(p))_{p\geqslant 2}$ est stationnaire et que les termes de cette suite à partir d'un certain rang sont égaux au nombre de valeurs d'adhérence de la suite u.
On considère un entier naturel p_0 (il en existe d'après la question **I-4a***) vérifiant*
$$\forall p \geqslant p_0, \quad u_p \in \bigcup_{k=1}^{q} \left]y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5}\right[\,.$$

38. Soit p un entier supérieur à p_0. Démontrer que
$$\forall (n,m) \in [\![p, p^2-1]\!]^2, \quad |u_n - u_m| \leqslant \frac{2r}{5} \Longleftrightarrow \exists k \in [\![1, q]\!] / (u_n, u_m) \in \left(\left]y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5}\right[\right)^2\,.$$

39. En déduire que
$$\forall p \geqslant p_0, \quad \mathcal{G}\left(L_p, \frac{2r}{5}\right) \subset \bigcup_{k=1}^{q} \left]y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5}\right[\,.$$

Tournez la page S.V.P.

40. Démontrer que si x est un réel de force strictement positive par rapport à u, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall p \geqslant p_\varepsilon, \quad \left\{u_p, u_{p+1}, \cdots, u_{p^2-1}\right\} \cap \left]x-\varepsilon, x+\varepsilon\right[\neq \emptyset\,.$$

41. En déduire qu'il existe un entier P tel que

$$\forall p \geqslant P, \forall k \in [\![1,q]\!], \quad \mathcal{G}\left(L_p, \frac{2r}{5}\right) \bigcap \left]y_k - \frac{r}{5}, y_k + \frac{r}{5}\right[\neq \emptyset\,.$$

42. Démontrer que

$$\forall p \geqslant P, \quad N.V.A.(p) = q\,.$$

FIN DU SUJET