MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

EAI MAT 2

SESSION 2019

AGRÉGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

A

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► **Concours interne de l'Agrégation de l'enseignement public** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAI	1300A	102	0530

► **Concours interne du CAER / Agrégation de l'enseignement privé** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAH	1300A	102	0530

Notations et présentation du problème

- ▷ On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbf{C}$ celui des nombres complexes.
- ▷ On note $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs et $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs.
- ▷ Soient E et F deux ensembles quelconques. On note $E \setminus F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E mais pas à F.
- ▷ Lorsque le corps $\mathbf{K}$ est égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on identifie polynômes et fonctions polynômiales associées. On note $\mathbf{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ et, pour n entier, $\mathbf{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- ▷ Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble de ses endomorphismes.
- ▷ On note indifféremment, lorsque la notion est bien définie, $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x)$ ou $f^{(n)}(x)$ la dérivée n-ième d'une fonction f en un point x. Par convention, pour $n = 0$, $f^{(0)}(x) = f(x)$.
- ▷ On note $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ (respectivement $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$) l'ensemble des fonctions continues (respectivement infiniment dérivables) sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$.

Dans la première partie, on introduit la famille des polynômes d'Hermite $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On établit son orthogonalité pour un certain produit scalaire, ainsi que d'autres propriétés. Après avoir étudié, en partie II, quelques propriétés de la fonction Γ utiles par la suite, on définit et étudie dans la partie III la dérivation d'une fonction à un ordre $s \in \mathbf{R}$, ceci pour une classe appropriée de fonctions. Ce travail permettra de définir une famille de fonctions $(H_s)_{s\in\mathbf{R}}$ qui étend naturellement la famille des polynômes d'Hermite $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$. L'étude des propriétés de cette famille, en lien avec l'équation différentielle d'Hermite, fera l'objet de la partie IV.

Partie I : Polynômes orthogonaux d'Hermite

1. (a) Soit un couple $(P, Q) \in \mathbf{R}[X]^2$.
Montrer que la fonction de la variable réelle x définie par : $x \mapsto P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

(b) On note $< , >$ l'application définie sur $\mathbf{R}[X]^2$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{R}[X]^2, \ < P, Q > \ = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Établir que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

Dans la suite du problème, on munit $\mathbf{R}[X]$ de cette structure d'espace préhilbertien réel.

2. Montrer qu'il existe une suite $(Q_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments unitaires de $\mathbf{R}[X]$ deux à deux orthogonaux telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le sous-espace engendré par $Q_0, \ldots, Q_n$ soit $\mathbf{R}_n[X]$.

3. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note H_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$x \mapsto H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

(a) Établir, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la relation : $\forall x \in \mathbf{R},\ H_{n+1}(x) = -2xH_n(x) + H_n'(x)$.

(b) Calculer $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ et $H_3(x)$.

(c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est un polynôme de degré n.
H_n désigne le n-ième polynôme d'Hermite.

(d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le coefficient dominant du polynôme H_n.

4. Établir que $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille orthogonale de $(\mathbf{R}[X], <\ ,\ >)$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le polynôme H_n est colinéaire au polynôme Q_n introduit à la question 2 (pour la structure d'espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$).

6. Établir, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'existence d'un nombre réel α_n tel que $H_n'(x) = \alpha_n H_{n-1}(x)$ pour tout réel x. On précisera la valeur de α_n.

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est solution de l'équation différentielle (dite d'Hermite) :

$$(E_n) \qquad y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

8. Établir, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la relation de récurrence :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

9. Que dire de la parité de H_n ?

10. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, H_n possède n racines réelles distinctes.

Indication : on pourra remarquer que $< H_n, P > = 0$ pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$.

Partie II : Quelques résultats sur la fonction Γ

On considère la fonction Γ définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

On rappelle les résultats suivants (que l'on admet) :

▷ la fonction Γ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$;

▷ $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in]0\,,+\infty[,\ \Gamma^{(n)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^n\, t^{x-1}e^{-t}dt.$

11. Vérifier que Γ satisfait à l'équation fonctionnelle :

$$(E_f) \qquad \forall x \in]0\,,+\infty[,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

12. Déterminer un équivalent simple de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

13. Déterminer les limites de $\Gamma'(x)$ quand x tend vers 0^+ et quand x tend vers $+\infty$.

14. On étudie un prolongement de Γ sur l'ensemble des réels négatifs non entiers qui soit compatible avec l'équation fonctionnelle (E_f) de Γ.

(a) On note D_Γ l'ensemble $\mathbf{R}$ privé des entiers négatifs ou nuls, c'est-à-dire :

$$D_\Gamma = \mathbf{R} \setminus \{-n,\ n \in \mathbf{N}\}.$$

Montrer qu'il existe un unique prolongement de Γ sur D_Γ qui préserve (E_f) sur D_Γ.

<u>Dans toute la suite du problème, on note encore Γ le prolongement ainsi obtenu.</u>

(b) Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer un équivalent simple de $\Gamma(x)$ au voisinage de $(-n)^+$, c'est-à-dire quand x tend vers $(-n)$ par valeurs strictement supérieures à $(-n)$, et au voisinage de $(-n)^-$, c'est-à-dire quand x tend vers $(-n)$ par valeurs strictement inférieures à $(-n)$.

(c) Montrer que Γ est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$ et qu'elle présente un minimum strict en un point $x_0 \in [1,2]$. Établir le tableau de variations de Γ sur $]0,3]$.

(d) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction Γ sur $]-3,3[$. Il est inutile de reproduire sur la copie un éventuel tableau de variations. On placera les asymptotes sur le dessin lorsqu'elles existent.

15. Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$. On pose, lorsque l'intégrale converge :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Démontrer que la fonction B est définie sur $]0,+\infty[^2$.

(b) Établir l'égalité :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \ B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

(c) Montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ B(x,x) = 2^{1-2x} B\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

(d) Calculer la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire la formule de duplication de la fonction Γ :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ \Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

On admettra que, par une utilisation directe de l'équation fonctionnelle, la formule de duplication de Γ s'étend à tout $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{-n}{2},\ n \in \mathbf{N}\right\}$.

Partie III : Une généralisation de la notion de dérivation

On définit deux espaces de fonctions en posant :

▷ $\mathbf{S}_0 = \left\{ f \in C^0(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \ / \ \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } f(x) = o\left(e^{\alpha x}\right) \text{ quand } x \text{ tend vers } -\infty \right\}$;

▷ $\mathbf{S}_\infty = \left\{ f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \ / \ \forall n \in \mathbf{N},\ f^{(n)} \in \mathbf{S}_0 \right\}$.

Pour $f \in \mathbf{S}_0$, $s \in]-\infty, 0[$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose :

$$D^{(s)}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_{-\infty}^{x} (x-u)^{-s-1} f(u)\mathrm{d}u.$$

16. Pour $f \in \mathbf{S}_0$, $s \in]-\infty, 0[$ et $x \in \mathbf{R}$, montrer que le nombre $D^{(s)}(f)(x)$ défini ci-dessus existe bien et que l'on a :

$$D^{(s)}(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_{0}^{+\infty} u^{-s-1} f(x-u)\mathrm{d}u.$$

17. Pour $f \in \mathbf{S}_0$ et $s < 0$, montrer que $D^{(s)}(f) \in \mathbf{S}_0$.

La linéarité étant immédiate, l'application $D^{(s)} : f \mapsto D^{(s)}(f)$ est donc un endomorphisme de $\mathbf{S}_0$, ce que l'on admettra.

18. Pour $p \in \mathbf{N}^*$ et $f \in \mathbf{S}_0$, établir que $D^{(-p)}(f)$ coïncide avec la primitive itérée p fois de f, lorsque les constantes d'intégration sont toutes choisies nulles en $-\infty$, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ D^{(-p)}(f)(x) = \int_{u_1=-\infty}^{x} \left(\int_{u_2=-\infty}^{u_1} \left(\cdots \left(\int_{u_p=-\infty}^{u_{p-1}} f(u_p)\mathrm{d}u_p \right) \cdots \right) \mathrm{d}u_2 \right) \mathrm{d}u_1.$$

19. Établir l'égalité entre éléments de $\mathcal{L}(\mathbf{S}_0)$:

$$\forall (s, s') \in]-\infty, 0[^2,\ D^{(s)} \circ D^{(s')} = D^{(s+s')}.$$

On souhaite étendre la dérivation d'ordre n (entier naturel) à des ordres réels. Pour cela, on va travailler sur $\mathbf{S}_\infty$.

20. Montrer que, pour tout réel s strictement négatif, $D^{(s)}$ laisse stable le sous-espace vectoriel $\mathbf{S}_\infty$.

Par la suite, on note encore $D^{(s)}$ les endomorphismes induits par la restriction de $D^{(s)}$ à $\mathbf{S}_\infty$.

21. On cherche à vérifier quelques égalités entre endomorphismes de $\mathbf{S}_\infty$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $d^{(n)}$ l'endomorphisme de dérivation n-ième sur $\mathbf{S}_\infty$:

$$\forall f \in \mathbf{S}_\infty,\ d^{(n)}(f) = f^{(n)}.$$

(a) Établir l'égalité suivante :

$$\forall s \in]-\infty, 0[,\ \forall n \in \mathbf{N},\ d^{(n)} \circ D^{(s)} = D^{(s)} \circ d^{(n)}.$$

(b) Pour $s \in]-\infty, 0[$ et $n \in \mathbf{N}$ tels que $s + n < 0$, établir l'égalité :

$$D^{(s)} \circ d^{(n)} = d^{(n)} \circ D^{(s)} = D^{(s+n)}.$$

(c) Pour $s \in \mathbf{R}$ et $(n, m) \in \mathbf{N}^2$ tels que $s < n$ et $s < m$, établir l'égalité :

$$d^{(n)} \circ D^{(s-n)} = d^{(m)} \circ D^{(s-m)}.$$

Pour $f \in \mathbf{S}_0$ et lorsque $s \geqslant 0$, la fonction $u \mapsto u^{-s-1} f(x-u)$ peut ne pas être intégrable sur $]0, +\infty[$. Aussi, lorsque $s \geqslant 0$, l'opérateur $D^{(s)}$ ne peut pas être défini à l'aide de la formule intégrale :

$$\forall f \in S_\infty, \ D^{(s)}\big(f\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_{-\infty}^{x} (x-u)^{-s-1} f(u) \mathrm{d}u = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_{0}^{+\infty} u^{-s-1} f(x-u) \mathrm{d}u.$$

En s'appuyant sur les questions précédentes, on définit, pour $s \in \mathbf{R}$, un opérateur $D^{(s)}$ sur $\mathbf{S}_\infty$ de la façon suivante :

$$D^{(s)} = D^{(s-n)} \circ d^{(n)} \quad \text{où } n \in \mathbf{N} \text{ est tel que } s < n.$$

On a montré à la question précédente que cette définition est indépendante de l'entier naturel n choisi tel que $s < n$. De manière explicite :

$$\forall f \in \mathbf{S}_\infty, \ \forall x \in \mathbf{R}, \ D^{(s)}\big(f\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-s)} \int_{0}^{+\infty} u^{n-s-1} f^{(n)}(x-u) \mathrm{d}u.$$

22. Montrer que dans $\mathcal{L}(\mathbf{S}_\infty)$, on a, pour tout $(s, s') \in \mathbf{R}^2$, l'égalité : $D^{(s+s')} = D^{(s)} \circ D^{(s')}$.

23. Soit $f \in \mathbf{S}_\infty$ et $x \in \mathbf{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $D^{(n)}\big(f\big)(x) = f^{(n)}(x)$.

24. Soit $f \in \mathbf{S}_\infty$. Établir que la fonction : $(x, s) \mapsto D^{(s)}\big(f\big)(x)$ est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Partie IV : Étude des polynômes d'Hermite généralisés.

On montre dans cette partie que la définition des opérateurs de dérivation $(D^{(s)})_{s \in \mathbf{R}}$ permet d'étendre la famille des polynômes d'Hermite $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$ donnée par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ \forall x \in \mathbf{R}, \ H_n(x) = \mathrm{e}^{x^2} D^{(n)}(\mathrm{e}^{-x^2})$$

en une famille des polynômes d'Hermite généralisés $(H_s)_{s \in \mathbf{R}}$:

$$\forall s \in \mathbf{R}, \ \forall x \in \mathbf{R}, \ H_s(x) = \mathrm{e}^{x^2} D^{(s)}(\mathrm{e}^{-x^2}).$$

25. Montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ appartient à l'espace $\mathbf{S}_\infty$, ce qui justifie la définition de la famille des polynômes d'Hermite généralisée, $(H_s)_{s \in \mathbf{R}}$.

26. Démontrer que, pour tout réel s et pour tout entier $m \in \mathbf{N}$ tel que $s < m$, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \ H_s(x) = \frac{1}{\Gamma(m-s)} \int_{0}^{+\infty} H_m(x-u) \mathrm{e}^{-u^2+2xu} u^{m-s-1} \mathrm{d}u.$$

27. Établir que, pour tout $s \in \mathbf{R}$:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \;\; H_s'(x) = -2sH_{s-1}(x).$$

28. Établir que, pour tout $s \in \mathbf{R}$, H_s est solution de l'équation différentielle :

$$(E_s) \qquad\qquad y'' - 2xy' + 2sy = 0$$

qui généralise, pour le paramètre s réel, l'équation d'Hermite (E_n) lorsque n est un entier positif ou nul.

29. Vérifier que, pour tout $s \in \mathbf{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \;\; H_{s+1}(x) + 2xH_s(x) + 2sH_{s-1}(x) = 0.$$

30. Que dire, sans calcul, des solutions maximales de (E_s) ? De la structure de l'ensemble des solutions ?

Par la suite, l'expression « solution de (E_s) » fera référence à une solution maximale.

31. Pour tout réel λ, on définit le symbole $(\lambda)_n$ par :

$$(\lambda)_0 = 1 \;\text{ et }\; \forall n \in \mathbf{N}^*, \; (\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n-1).$$

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose, lorsque cette quantité existe :

$$K(\alpha, \beta; x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k} \frac{x^k}{k!}.$$

(a) Montrer que $K(\alpha, \beta; x)$ est bien définie pour $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R} \setminus \{-n, \; n \in \mathbf{N}\}$ et $x \in \mathbf{R}$.

(b) À quelle(s) condition(s) la fonction $x \mapsto K(\alpha, \beta; x)$ est elle polynomiale ?

32. On veut déterminer deux solutions de (E_s) définies sur $\mathbf{R}$, notées $y_{1,s}$ et $y_{2,s}$, et vérifiant les conditions initiales :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_{1,s}(0) & = & 1 \\ y_{1,s}'(0) & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} y_{2,s}(0) & = & 0 \\ y_{2,s}'(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

Établir que $y_{1,s}(x) = K\left(-\frac{s}{2}, \frac{1}{2}; x^2\right)$ et exprimer $y_{2,s}$ sous une forme analogue.

33. On se place dans le cas où s est un entier naturel ($s = n \in \mathbf{N}$). Exprimer H_n en fonction de $y_{1,n}$ et $y_{2,n}$.

34. Avec les notations précédentes, établir que :

$$\forall s \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}, \; \forall x \in \mathbf{R}, \;\; H_s(x) = \frac{2^s \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} y_{1,s} + \frac{2^{s+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{-s}{2}\right)} y_{2,s}.$$

35. Pour z_1 et z_2, deux solutions de (E_s), on définit le wronskien de z_1 et z_2 au point $x \in \mathbf{R}$ par :

$$w(x) = \begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Établir l'existence d'une constante $C(z_1, z_2) \in \mathbf{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbf{R}, \;\; w(x) = C(z_1, z_2)\, e^{x^2}$, avec $C(z_1, z_2) = 0$ si et seulement si (z_1, z_2) est lié.

36. Pour tout $s \in \mathbf{R}$, on pose :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \tilde{H}_s(x) = H_s(-x).$$

(a) Montrer que $\tilde{H}_s$ est solution de (E_s).

(b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur s pour que le couple $(H_s, \tilde{H}_s)$ soit une base de l'espace des solutions de (E_s).

37. On veut préciser le comportement de $H_s(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

(a) On fixe un entier n. Pour $t \in \mathbf{R}$, on pose : $\quad g_n(t) = \mathrm{e}^{-t^2} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}.$

Montrer que : $\quad \left|g_n(t)\right| \leqslant \dfrac{t^{2n+2}}{(n+1)!}.$

(b) On se place dans le cas $s < 0$. Établir, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, l'existence d'un développement :

$$\forall x \in]-\infty, 0[, \quad H_s(x) = (-2x)^s \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (-s)_{2k}}{k!} (2x)^{-2k} + O\left(x^{-2n-2}\right) \right)$$

lorsque x tend vers $-\infty$.

(c) Montrer qu'un tel développement existe, en fait, pour tout $s \in \mathbf{R}$.

(d) En déduire un équivalent de $H_s(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

38. On étudie maintenant le comportement de $H_s(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(a) Démontrer que, pour $s \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$, $H_s(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-s)} x^{-s-1} \mathrm{e}^{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$. On pourra commencer par traiter le cas où $s < 0$.

(b) Lorsque $s \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$, la fonction $H_s(x)$ admet- elle au voisinage de $+\infty$ un développement de la forme de celui établi en question 37 (b) ?

FIN DU SUJET