ministère

éducation
nationale
jeunesse
vie associative

EAE MAT 1
Repère à reporter sur la copie

SESSION 2012

AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : *Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

Tournez la page S.V.P.

EAE MAT 1

SESSION 2012

AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE

Section :
MATHÉMATIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

RECTIFICATIF

Dans la **Partie IV,** on prendra **K = C.**

Avertissement

Les calculatrices et documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Le but de ce problème est d'étudier le nombre de points à coordonnées entières contenus dans certaines parties de $\mathbf{R}^d$.

Les parties **I**, **II** et **III** du problème sont indépendantes les unes des autres.

Le symbole ♦ signale l'introduction dans le texte d'une définition, d'une hypothèse, d'une notation ou d'un rappel.

Notations

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls, $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbf{Q}$ le corps des rationnels, $\mathbf{R}$ celui des nombres réels et $\mathbf{C}$ celui des complexes.

Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière. Si X est un ensemble fini, $\mathrm{Card}(X)$ désigne son cardinal. Si X et Y sont des ensembles, on note

$$X - Y = \{ x \in X \mid x \notin Y \}.$$

Étant donné une partie X de $\mathbf{R}^d$ et un nombre réel λ, on note

$$\lambda X = \{ y \in \mathbf{R}^d \mid \exists x \in X, y = \lambda x \}.$$

♦ Une application $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ sera dite *polynomiale* s'il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[T]$ tel que

$$f(n) = P(n)$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$.

♦ Une application $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ sera dite *quasi-polynomiale* s'il existe un entier N strictement positif et des polynômes $P_0, \ldots, P_{N-1} \in \mathbf{C}[T]$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait

$$f(n) = P_{r_N(n)}(n)$$

où $r_N(n)$ désigne le reste de la division euclidienne de n par N.

Partie I

Un premier cas

Soit d un entier strictement positif et soient $m_1, \ldots, m_d$ des entiers strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$u_n = \mathrm{Card}(\{(k_1, \ldots, k_d) \in \mathbf{N}^d \mid \sum_{i=1}^{d} m_i k_i = n\})$$

et $v_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$.

1. Démontrer que la somme et le produit de deux fonctions quasi-polynomiales sont des fonctions quasi-polynomiales.

2. **(a)** Déterminer la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans le cas où $d = 1$.

(b) L'application $n \mapsto v_n$ est-elle quasi-polynomiale dans ce cas ?

3. Pour $i \in \{1, \ldots, d\}$, on pose $U_i = \sum_{k\in\mathbf{N}} T^{km_i}$ et on définit la série formelle

$$U = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n T^n \in \mathbf{Z}[[T]],$$

où les u_n ont été définis en début de partie.

(a) Écrire U à l'aide des séries formelles U_i.

(b) Déterminer le produit $U \times \prod_{i=1}^{d}(1 - T^{m_i})$.

4. On définit la série formelle $V = \sum_{n\in\mathbf{N}} v_n T^n$. Trouver une relation entre les séries formelles V et U.

♦ La dérivée d'une série formelle $F = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n T^n$ est la série formelle $F' = \sum_{n\geqslant 1} n a_n T^{n-1}$. On pourra utiliser sans preuve la formule $(F_1F_2)' = F_1'F_2 + F_1F_2'$ pour des séries formelles F_1 et F_2. Les dérivées successives d'une série formelle F sont obtenues en posant $F^{(0)} = F$ et en définissant $F^{(k+1)}$ comme la dérivée de la série $F^{(k)}$.

5. On pose $G = \sum_{n\in\mathbf{N}} T^n$.

(a) Trouver une relation entre les séries formelles G^2 (carré de la série G) et G'.

(b) Soit $k \in \mathbf{N}$. Trouver une relation entre les séries G^{k+1} et $G^{(k)}$.

(c) Trouver des expressions explicites pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans le cas où on a les égalités $m_1 = \cdots = m_d = 1$. Montrer dans ce cas particulier que la fonction $n \mapsto v_n$ est polynomiale.

6. On revient au cas général. Démontrer que la fonction $v : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ donnée par $n \mapsto v_n$ est quasi-polynomiale (*on pourra utiliser la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle*).

Partie II

Étude en dimensions 1 et 2

1. Soient p et q des entiers strictement positifs et premiers entre eux. On pose $x = p/q$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$u_n = \mathrm{Card}(\mathbf{Z} \cap [0, nx]) - nx$$

pour $n \in \mathbf{N}$ est une suite périodique dont on déterminera une période.

2. Soient $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. On pose $A = (a, b) \in \mathbf{Z}^2$ et $B = (c, d) \in \mathbf{Z}^2$. On note $[A, B]$ le segment de $\mathbf{R}^2$ d'extrémités A et B. Démontrer que

$$\mathrm{Card}([A, B] \cap \mathbf{Z}^2) = \mathrm{pgcd}(c - a, d - b) + 1.$$

♦ Dans la suite de cette partie, on munit $\mathbf{R}^2$ de sa structure euclidienne usuelle et de la mesure usuelle, c'est-à-dire celle obtenue en faisant le produit des mesures de Lebesgue sur $\mathbf{R}$. On appellera *polygone* de $\mathbf{R}^2$ l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points. Si X est une partie de $\mathbf{R}^2$, on note ∂X sa frontière, c'est-à-dire $\overline{X} - X^o$, où $\overline{X}$ désigne l'adhérence de X et

X^o son intérieur. Soit $\mathscr{P}$ un polygone de $\mathbf{R}^2$. On dit que $\mathscr{P}$ est un *polygone à sommets entiers* s'il est l'enveloppe convexe d'une partie finie de $\mathbf{Z}^2$.

♦ Soit $\mathscr{P}$ une partie compacte de $\mathbf{R}^2$. On note $V(\mathscr{P})$ son aire. On dira que la partie $\mathscr{P}$ vérifie *la formule de Pick*, si elle vérifie la formule

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Card}(\mathscr{P} \cap \mathbf{Z}^2) = V(\mathscr{P}) + \frac{1}{2} \operatorname{Card}(\partial \mathscr{P} \cap \mathbf{Z}^2) + 1.$$

3. (a) Soient $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ avec $a < b$ et $c < d$. Le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ vérifie-t-il la formule de Pick ?

(b) Soient a, b des entiers non nuls. Le triangle obtenu comme enveloppe convexe des points $(0, 0)$, $(a, 0)$ et $(0, b)$ vérifie-t-il la formule de Pick ?

4. (a) Démontrer qu'un polygone est une partie compacte de $\mathbf{R}^2$.

(b) Soit $\mathscr{P}$ un polygone d'intérieur non vide. Démontrer que l'intérieur de $\mathscr{P}$ est dense dans $\mathscr{P}$.

5. Soient $\mathscr{P}_1$ (resp. $\mathscr{P}_2$) un polygone, enveloppe convexe d'une partie finie S_1 (resp. S_2) de $\mathbf{Z}^2$. On suppose que les intérieurs de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont non vides et que $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ est un segment $[A, B]$ où A et B sont des éléments distincts de $S_1 \cap S_2$.

(a) Démontrer l'égalité $[A, B] = \partial \mathscr{P}_1 \cap \partial \mathscr{P}_2$.

(b) Démontrer que $\mathscr{P}_1$ est contenu dans l'un des demi-plans fermés de frontière la droite (AB).

(c) On suppose que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ vérifient la formule de Pick. Démontrer qu'il en est de même pour $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$.

(d) On suppose que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$ vérifient la formule de Pick. Que peut-on en dire pour $\mathscr{P}_2$?

6. Soient A, B et C trois points non alignés de $\mathbf{R}^2$ à coordonnées entières. Démontrer que l'enveloppe convexe de $\{A, B, C\}$ vérifie la formule de Pick.

7. Soit $\mathscr{P}$ un polygone à sommets entiers et d'intérieur non vide. Soit S un ensemble de cardinal minimal dont $\mathscr{P}$ est l'enveloppe convexe. On note N le cardinal de S.

(a) Soit $A \in S$. Démontrer que A n'est pas barycentre à coefficients positifs de points de $S - \{A\}$.

(b) Soient A, B, C, D quatre points distincts de S. Soient (α, β, γ) le système de coordonnées barycentriques de D dans le repère affine (A, B, C) tel que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Démontrer qu'un et un seul des nombres α, β, γ est strictement négatif.

(c) On suppose $N \geqslant 3$. Démontrer qu'on peut choisir une bijection $i \mapsto A_i$ de $\{1, \ldots, N\}$ sur S de sorte que A_1 soit le seul point de S dans un des deux demi-plans ouverts de frontière la droite $(A_2 A_3)$ (*il est recommandé de faire un dessin*).

(d) On suppose $N \geqslant 4$. Soit M un point de $\mathscr{P}$ qui n'appartient pas à l'enveloppe convexe de $\{A_2, \ldots, A_N\}$. Démontrer que M appartient à l'enveloppe convexe de $\{A_1, A_2, A_3\}$. (*On pourra éventuellement écrire M comme barycentre à coefficients positifs des points $A_1, \ldots, A_i$ avec i minimal.*)

(e) Démontrer que $\mathscr{P}$ est la réunion de $N-2$ triangles dont les sommets appartiennent à S et dont les intérieurs sont non vides deux à deux disjoints.

8. Soit $\mathscr{P}$ un polygone à sommets entiers et d'intérieur non vide.

(a) Démontrer que $\mathscr{P}$ vérifie la formule de Pick.

(b) Démontrer que l'application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}$ qui envoie un entier n sur $\mathrm{Card}(n\mathscr{P} \cap \mathbf{Z}^2)$ est polynomiale.

Partie III

Le cas d'un simplexe

Soit d un entier strictement positif. Soient $A_1, \ldots, A_{d+1}$ des éléments de $\mathbf{Q}^d$. On suppose qu'il n'existe pas d'hyperplan affine de $\mathbf{R}^d$ contenant l'ensemble $S = \{A_1, \ldots, A_{d+1}\}$. Soit $\mathscr{S}$ l'enveloppe convexe de l'ensemble S. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$w_n = \mathrm{Card}(n\mathscr{S} \cap \mathbf{Z}^d)$$

et on considère la série formelle

$$W = \sum_{n \in \mathbf{N}} w_n T^n.$$

1. Décrire l'ensemble des entiers $q \in \mathbf{Z}$ tels que $qA_i \in \mathbf{Z}^d$ pour tout i de $\{1, \ldots, d+1\}$.

♦ On fixe un entier strictement positif q tel que $qA_i \in \mathbf{Z}^d$ pour $i \in \{1, \ldots, d+1\}$. Soit $\widehat{\mathscr{S}}$ l'ensemble des $(x, t) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ tels qu'il existe un élément $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d+1})$ de $[0, 1[^{d+1}$ vérifiant la relation

$$(x, t) = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i q(A_i, 1).$$

2. (a) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in n\mathscr{S}$ démontrer qu'il existe un unique élément $y \in \widehat{\mathscr{S}}$ et une unique famille $(n_1, \ldots, n_{d+1}) \in \mathbf{N}^{d+1}$ tels que

$$(x, n) = y + \sum_{i=1}^{d+1} n_i q(A_i, 1).$$

(b) On conserve les notations de la question **(a)**. Démontrer que $x \in \mathbf{Z}^d$ si et seulement si $y \in \widehat{\mathscr{S}} \cap \mathbf{Z}^{d+1}$.

3. Démontrer la relation

$$W = \sum_{(x,n) \in \widehat{\mathscr{S}} \cap (\mathbf{Z}^d \times \mathbf{Z})} T^n (1 - T^q)^{-d-1}.$$

4. Démontrer que la fonction $w : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ donnée par $n \mapsto w_n$ est quasi-polynomiale.

5. Démontrer qu'il existe une constante C telle que $w_n \leqslant 1 + Cn^d$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Partie IV
Applications

Dans cette partie $\mathbf{K}$ désigne un corps commutatif. On se donne un entier strictement positif d. On appelle *monôme* de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_d]$ un élément de la forme $\prod_{i=1}^{d} X_i^{a_i}$ pour un d-uplet $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbf{N}^d$. On note M l'ensemble de ces monômes.

Dans la suite, on note $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs et on fixe jusqu'à la fin du problème $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbf{N}^{*d}$.

Pour tout $P \in \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_d]$, on note

$$\pi_{\boldsymbol{m}}(P) = \deg(P(T^{m_1}, \ldots, T^{m_d}))$$

avec la convention usuelle que $\deg(0) = -\infty$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $H_{\boldsymbol{m},n}$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$ tels qu'on ait la relation

$$P(T^{m_1}X_1, \ldots, T^{m_d}X_d) = T^n P(X_1, \ldots, X_d)$$

dans l'anneau $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_d][T]$.

1. (a) Soit P un monôme de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_d]$. Existe-t-il un $n \in \mathbf{N}$ tel que P appartienne à $H_{\boldsymbol{m},n}$?

(b) Démontrer que $H_{\boldsymbol{m},n}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont on donnera une base.

(c) Démontrer que l'application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ qui à un entier n associe la dimension de $H_{\boldsymbol{m},n}$ est quasi-polynomiale.

(d) Démontrer que $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_d]$ est la somme directe des sous-espaces $H_{\boldsymbol{m},n}$ où n décrit $\mathbf{N}$.

♦ Jusqu'à la fin de ce problème, on note G un groupe cyclique de cardinal N et ξ une racine primitive N-ème de l'unité dans le corps $\mathbf{C}$ des complexes. Soit g_0 un générateur de G.

2. Soit V un espace vectoriel de dimension d sur $\mathbf{C}$ et soit π une représentation de G dans V, c'est-à-dire un homomorphisme de groupes $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$. Démontrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de V et des entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ tels que $\pi(g_0)(e_i) = \xi^{\alpha_i} e_i$ pour $i \in \{1, \ldots, d\}$.

3. Pour tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$ et tout $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{C}^d$ on pose $P(\boldsymbol{x}) = P(x_1, \ldots, x_d)$. Soit u un automorphisme du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^d$. Démontrer qu'il existe un unique automorphisme $\widetilde{u}$ de la $\mathbf{C}$-algèbre $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$ tel que

$$\widetilde{u}(P)(u(\boldsymbol{x})) = P(\boldsymbol{x})$$

pour $P \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$ et $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^d$. Comparer les degrés totaux de P et $\widetilde{u}(P)$.

♦ Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ la base usuelle de $\mathbf{C}^d$. On définit une représentation π de G dans $\mathbf{C}^d$ par la relation $\pi(g_0)(e_i) = \xi^{m_i} e_i$. On note $\tau = \widetilde{\pi(g_0)}$ l'automorphisme de $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$ donné par la question précédente et on définit

$$A = \{\, P \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d] \mid \tau(P) = P \,\}.$$

4. (a) Démontrer que A est une sous-algèbre de $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_d]$.

(b) Caractériser les monômes appartenant à A.

(c) Démontrer que A est la somme directe des sous-espaces vectoriels $A \cap H_{\boldsymbol{m},n}$ où n décrit $\mathbf{N}$.

(d) Démontrer que l'application qui envoie un entier n sur la dimension de $A \cap H_{\boldsymbol{m},n}$ est quasi-polynomiale.

5. On note n_0 le plus petit entier strictement positif pour lequel il existe un monôme $P \in A$ avec $\pi_{\boldsymbol{m}}(P) = n_0$. Soit S l'ensemble

$$\{ P \in A \cap M \mid \pi_{\boldsymbol{m}}(P) = n_0 \}.$$

On note s le cardinal de S et $u_1, \ldots, u_s$ les éléments de S.

(a) Démontrer que $u_1, \ldots, u_s$ sont des éléments irréductibles de A.

(b) On suppose que $s > d$. Démontrer qu'il existe deux s-uplets distincts $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ dans $\mathbf{N}^s$ tels que

$$\prod_{i=1}^{s} u_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{s} u_i^{\beta_i}.$$

(c) On continue à supposer $s > d$. L'anneau A est-il factoriel ? Peut-il exister un entier strictement positif ℓ et un isomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres de $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_\ell]$ sur A ?