ministère
Éducation
nationale

EAE MAT 1

SESSION 2013

AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE

Section : MATHÉMATIQUES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.
De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB *: La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.*

Tournez la page S.V.P.

Notations, définitions et attendus

Les calculatrices et documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Dans tout ce problème, les corps considérés sont supposés *commutatifs*.

Pour $(n,p) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $\mathbf{K}$ un corps, on note :
- $\mathbf{K}^*$ l'ensemble des éléments non nuls de $\mathbf{K}$;
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbf{K}$;
- $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la $\mathbf{K}$-algèbre des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbf{K}$; $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ le groupe de ses éléments inversibles ; $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ le sous-groupe de ses matrices de déterminant 1 ;
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$: les matrices de la forme λI_n, avec λ dans $\mathbf{K}$, sont dites **scalaires**.

On identifie, via la base canonique de $\mathbf{K}^n$, l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ à l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$.

Étant donné $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $\mathbf{K}[M]$ la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ engendrée par M (algèbre des polynômes en M).

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, et pour $\lambda \in \mathbf{K}^*$, on note

$$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} ,$$

où $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls hormis celui en position (i,j), lequel vaut 1.

On admet que $\left\{T_{i,j}(\lambda) \mid (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j,\ \lambda \in \mathbf{K}^*\right\}$ est une partie génératrice du groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$.

Définition. On appelle **transvection** de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tout élément $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $\mathrm{rang}(M - I_n) = 1$ et dont le polynôme caractéristique $\det(XI_n - M)$ vaut $(X-1)^n$.

Soit G un groupe (noté multiplicativement) et A une partie de G.

- Le **centralisateur de A dans G**, noté $\mathcal{Z}_G(A)$, est le sous-groupe de G constitué des éléments x de G vérifiant :
$$\forall a \in A,\ xa = ax.$$
Le centralisateur d'un élément a de G est défini comme le centralisateur du singleton $\{a\}$ dans G, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de G qui commutent avec a.
- Le **normalisateur de A dans G**, noté $\mathcal{N}_G(A)$, est le sous-groupe de G constitué des éléments x de G vérifiant $xAx^{-1} = A$.

- Le **centre** de G est le centralisateur de G dans G. On le note $\mathcal{Z}(G)$.
- Le **groupe dérivé** de G, noté $D(G)$, est le sous-groupe de G engendré par l'ensemble $\{xyx^{-1}y^{-1} \mid (x,y) \in G^2\}$. On admet que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

Un morphisme de groupes $\varphi : G \to H$ est dit **trivial** lorsque son image est le sous-groupe trivial $\{1_H\}$, où 1_H désigne le neutre de H.

Étant donné $\sigma : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ un isomorphisme de corps (c'est-à-dire que $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ sont des corps et que σ est un isomorphisme d'anneaux du premier vers le second) et $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note

$$M^\sigma = \big(\sigma(m_{i,j})\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{L}).$$

On admet que $M \mapsto M^\sigma$ définit alors un isomorphisme d'anneaux de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{L})$ et induit un isomorphisme de groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ sur $\mathrm{SL}_n(\mathbf{L})$.

On admet enfin le résultat classique suivant :

Théorème 0 (admis). Soit $\mathbf{K}$ un corps, et G un sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ contenant une matrice non scalaire. Si $n \geqslant 3$ ou $\mathbf{K}$ possède au moins 5 éléments, alors $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$.

Objectifs

On s'intéresse ici aux trois théorèmes suivants, dus à Schreier et Van der Wærden :

Théorème 1. Soit $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ deux corps, et n et p deux entiers naturels avec $n > p \geqslant 1$. Tout morphisme de groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathrm{SL}_p(\mathbf{L})$ est alors trivial.

Théorème 2. Soit $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ deux corps, et n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. Si les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}_p(\mathbf{L})$ sont isomorphes, alors $n = p$ et les corps $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ sont isomorphes.

Théorème 3. Soit $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ deux corps, n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $\Psi : \mathrm{SL}_n(\mathbf{K}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbf{L})$ un isomorphisme de groupes. Il existe alors une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{L})$ et un isomorphisme de corps $\sigma : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ tels que

$$\forall M \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{K}),\ \Psi(M) = PM^\sigma P^{-1} \quad \text{ou} \quad \forall M \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{K}),\ \Psi(M) = P\big({}^tM^{-1}\big)^\sigma P^{-1}.$$

Structure du sujet

La partie I regroupe plusieurs résultats utilisés dans le reste du problème.
La partie II est consacrée à la démonstration du théorème 1 pour des corps $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ de caractéristique différente de 2.
Dans la partie III, on démontre le cas $n = 2$ du théorème 3 pour des corps $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ de caractéristique différente de 2. Le théorème 2 est enfin démontré dans la partie IV pour des corps $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ de caractéristique différente de 2.
Les parties II et III sont totalement indépendantes l'une de l'autre.

I. Résultats préliminaires

Dans toute cette partie, $\mathbf{K}$ désigne un corps quelconque et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

I.A. Quelques calculs de commutants

1. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AB = BA$.
   Montrer que les sous-espaces propres de A sont stables par B.

2. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des éléments deux à deux distincts du corps $\mathbf{K}$, et $(p_1, \dots, p_r) \in (\mathbf{N}^*)^r$ une liste d'entiers naturels non nuls telle que $p_1 + \dots + p_r = n$.
   Montrer que l'algèbre des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec la matrice diagonale par blocs
$$D := \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{p_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{p_r} \end{bmatrix}$$
   est l'ensemble des matrices diagonales par blocs de la forme
$$\begin{bmatrix} M_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_r \end{bmatrix},$$
   où $M_1, \dots, M_r$ représentent des matrices carrées de formats respectifs $p_1 \times p_1, \dots, p_r \times p_r$.

3. *Cas d'une matrice compagnon.*
   On se donne ici une liste $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$ et l'on considère la matrice compagnon
$$C := \begin{bmatrix} 0 & & (0) & & a_0 \\ 1 & \ddots & & & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ (0) & & 0 & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}).$$
   On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$.
   (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
   Montrer qu'il existe une liste $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$ telle que $Me_1 = \sum_{k=0}^{n-1} b_k C^k e_1$.
   (b) En déduire que l'algèbre des matrices qui commutent à C est $\mathbf{K}[C]$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ non scalaire.
   En utilisant la question précédente, montrer que l'algèbre des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ qui commutent à A est $\mathbf{K}[A]$. Préciser sa dimension.

I.B. Éléments de structure de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{K})$

1. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :
   (i) M est une transvection.
   (ii) Il existe un λ dans $\mathbf{K}^*$ tel que M soit semblable à $T_{1,2}(\lambda)$.
   (iii) M est semblable à $T_{1,2}(1)$.
   On rappelle que la notion de transvection a été définie en page 2.
   (b) Montrer que toute transvection de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ appartient à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$.
2. Quels sont les éléments d'ordre 2 du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$?
3. Déterminer le centralisateur de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Préciser le centre de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$.
4. (a) Montrer que $D\big(\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})\big)$ contient une matrice non scalaire.
   (b) On suppose que $n \geqslant 3$ ou que $\mathbf{K}$ possède au moins 5 éléments.
   Déterminer $D\big(\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})\big)$.

I.C. Dénombrement de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{K})$

On suppose ici que $\mathbf{K}$ est fini, de cardinal noté q.

1. Étant donné un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie d, montrer que E est fini et déterminer son cardinal.
2. (a) Montrer que
$$\operatorname{card} \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) = \prod_{k=0}^{n-1} (q^n - q^k).$$
   Pour ce faire, on pourra par exemple dénombrer les bases de $\mathbf{K}^n$.
   (b) Dénombrer $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$.
   (c) Soit $\mathbf{L}$ un corps tel que les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{L})$ soient isomorphes. Montrer que $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ sont isomorphes.

II. Le théorème 1 en caractéristique différente de 2

Pour établir le théorème 1 en caractéristique différente de 2, nous procédons par récurrence en définissant, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, la propriété

$\mathcal{H}_n$: "Quels que soient les corps $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ de caractéristique différente de 2, tout morphisme de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbf{L})$ est trivial."

Le cas $n = 2$ est immédiat et ne mérite pas de commentaire particulier.

1. Soit H un groupe quelconque, $\mathbf{K}$ un corps, n un entier naturel supérieur ou égal à 3, et $\Psi : \mathrm{SL}_n(\mathbf{K}) \to H$ un morphisme non trivial. Montrer que toute matrice appartenant à $\operatorname{Ker} \Psi$ est scalaire.

Tournez la page S.V.P.

2. *Le cas* $n = 3$.
Soit $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ deux corps de caractéristique différente de 2, et $\Psi : \mathrm{SL}_3(\mathbf{K}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{L})$ un morphisme.
   (a) Exhiber trois éléments de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{K})$ dont l'ordre divise 2.
   (b) En déduire deux éléments distincts A et B de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{K})$ tels que $\Psi(A) = \Psi(B)$ et $A^2 = B^2 = I_3$.
   (c) En déduire que Ψ est trivial.

La propriété $\mathcal{H}_3$ est donc établie.

On fixe désormais un entier naturel $n \geqslant 4$ et l'on suppose $\mathcal{H}_k$ vraie pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$. On fixe deux corps $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ de caractéristique différente de 2 et l'on se donne un morphisme

$$\Psi : \mathrm{SL}_n(\mathbf{K}) \to \mathrm{SL}_{n-1}(\mathbf{L}).$$

On souhaite montrer que Ψ est trivial.

3. Justifier que l'on ne perd pas de généralité à supposer que le polynôme $X^2 + 1$ est scindé sur $\mathbf{L}$.

Jusqu'à la fin de cette partie on fera l'hypothèse que $X^2 + 1$ est scindé sur $\mathbf{L}$ et l'on notera i l'une de ses racines dans $\mathbf{L}$ (*on ne la confondra pas avec le nombre complexe bien connu*).

4. Démontrer que pour tout $(p, q) \in [\![1, n-1]\!]^2$ tel que $p > q$, tout morphisme de $\mathrm{SL}_p(\mathbf{K})$ dans $\mathrm{SL}_q(\mathbf{L})$ est trivial.

À partir de cette question, on raisonne par l'absurde en supposant Ψ non trivial. On introduit les matrices

$$J_{\mathbf{K}} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{K}) \quad \text{et} \quad A := \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & J_{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{K}).$$

5. (a) Vérifier que $A^4 = I_n$, que A^2 n'est pas scalaire et que A et A^{-1} sont conjugués dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$.
   (b) En déduire qu'il existe trois entiers naturels p, q, r tels que $p + q + 2r = n - 1$, $r \geqslant 1$, et q pair, ainsi qu'une matrice $P \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{L})$ telle que
$$\Psi(A) = P \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iI_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iI_r \end{bmatrix} P^{-1}.$$
   (c) En déduire quatre morphismes $\alpha : \mathrm{SL}_{n-2}(\mathbf{K}) \to \mathrm{GL}_p(\mathbf{L})$, $\beta : \mathrm{SL}_{n-2}(\mathbf{K}) \to \mathrm{GL}_q(\mathbf{L})$, $\gamma : \mathrm{SL}_{n-2}(\mathbf{K}) \to \mathrm{GL}_r(\mathbf{L})$ et $\delta : \mathrm{SL}_{n-2}(\mathbf{K}) \to \mathrm{GL}_r(\mathbf{L})$ tels que
$$\forall M \in \mathrm{SL}_{n-2}(\mathbf{K}),\ \Psi\left(\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\right) = P \begin{bmatrix} \alpha(M) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta(M) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(M) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta(M) \end{bmatrix} P^{-1}.$$

6. On suppose $n \geqslant 5$. Montrer que α, β, γ et δ sont à valeurs respectivement dans $\mathrm{SL}_p(\mathbf{L})$, $\mathrm{SL}_q(\mathbf{L})$, $\mathrm{SL}_r(\mathbf{L})$ et $\mathrm{SL}_r(\mathbf{L})$, puis qu'ils sont tous triviaux, et conclure le raisonnement par l'absurde dans ce cas.

7. Traiter le cas $n = 4$, puis conclure.

III. Isomorphismes de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbf{L})$

Dans cette partie, on fixe deux corps $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ de caractéristique différente de 2. On se propose de démontrer que tout isomorphisme du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbf{L})$ est de la forme $M \mapsto PM^\sigma P^{-1}$ pour une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{L})$ et un isomorphisme de corps $\sigma : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$.

Pour $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{L})$, on notera
$$\varphi_P : M \mapsto PMP^{-1},$$
qui est clairement un automorphisme du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{L})$ (on ne demande pas de le démontrer).

III.A. Image d'une transvection par un isomorphisme

1. Dans cette question, on suppose $\mathbf{K}$ de caractéristique $p > 0$.
   (a) Comparer les polynômes $(X-1)^p$ et $X^p - 1$ de $\mathbf{K}[X]$.
   (b) Montrer que les transvections de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ sont les éléments d'ordre p de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.
   Exprimer les sous-espaces propres de PAP^{-1} à l'aide de ceux de A.

3. Soit $\lambda \in \mathbf{K}^*$.
   (a) Déterminer le centralisateur de $T_{1,2}(\lambda)$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$. On le note $\mathcal{C}$.
   (b) On note $\mathcal{N}$ le normalisateur de $\mathcal{C}$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$. Montrer que
   $$\mathcal{N} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^* \times \mathbf{K} \right\}.$$
   (c) À quelle condition, nécessaire et suffisante, sur $\mathbf{K}$ tous les carrés des éléments de $\mathcal{N} \setminus \mathcal{C}$ sont-ils des matrices scalaires ?

4. Soit $\alpha \in \mathbf{K} \setminus \{0, 1, -1\}$.
   (a) Déterminer le centralisateur dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$ de la matrice $D := \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$. On le note $\mathcal{C}'$.
   (b) Déterminer le normalisateur de $\mathcal{C}'$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$. On le note $\mathcal{N}'$.
   (c) Déterminer les carrés des éléments de $\mathcal{N}' \setminus \mathcal{C}'$.

5. Soit $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$ dont le polynôme caractéristique est irréductible. On se donne $P \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{K}) \setminus \mathbf{K}[A]$ telle que $PAP^{-1} \in \mathbf{K}[A]$.
   (a) Montrer que $\mathbf{K}[A]$ est un corps et que $M \mapsto PMP^{-1}$ définit un automorphisme de la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{K}[A]$.
   (b) Montrer que P^2 et A commutent.
   (c) En remarquant que P^2 et P commutent, en déduire que P^2 est scalaire.

6. Soit $\psi : \mathrm{SL}_2(\mathbf{K}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{L})$ un isomorphisme de groupes.
   (a) En exploitant les résultats précédents, démontrer que pour toute transvection $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$, il existe une transvection $M' \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{L})$ telle que $\psi(M) = \pm M'$.

Tournez la page S.V.P.

(b) En déduire que ψ envoie toute transvection de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$ sur une transvection de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{L})$.
On pourra vérifier que toute transvection $M \in SL_2(\mathbf{K})$ s'écrit $M = T^2$ avec T une transvection.

III.B. Analyse des isomorphismes de SL₂(K) sur SL₂(L)

Dans toute cette partie, on se donne un isomorphisme $\psi : \mathrm{SL}_2(\mathbf{K}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{L})$. On souhaite prouver le résultat annoncé en début de partie III.
On introduit trois sous-ensembles de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$:

$$\mathcal{E}_+(\mathbf{K}) := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbf{K} \right\}; \quad \mathcal{E}_-(\mathbf{K}) := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbf{K} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{\mathbf{K}} := \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbf{K}^* \right\}.$$

On définit de même les sous-ensembles $\mathcal{E}_+(\mathbf{L})$, $\mathcal{E}_-(\mathbf{L})$ et $\mathcal{D}_{\mathbf{L}}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{L})$.
On introduit les matrices

$$J_{\mathbf{K}} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{K}) \quad \text{et} \quad J_{\mathbf{L}} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{L}).$$

1. (a) Soit T_1 et T_2 deux transvections de $\mathcal{M}_2(\mathbf{L})$ ne commutant pas.
Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{L})$ telle que $PT_1P^{-1} \in \mathcal{E}_+(\mathbf{L})$ et $PT_2P^{-1} \in \mathcal{E}_-(\mathbf{L})$.
(b) En déduire qu'il existe $P_1 \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{L})$ telle que l'isomorphisme $\psi_1 := \varphi_{P_1} \circ \psi$ vérifie

$$\psi_1(\mathcal{E}_+(\mathbf{K})) = \mathcal{E}_+(\mathbf{L}) \quad \text{et} \quad \psi_1(\mathcal{E}_-(\mathbf{K})) = \mathcal{E}_-(\mathbf{L}). \tag{1}$$

2. (a) Déterminer les matrices $Q \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$ telles que

$$Q\mathcal{E}_+(\mathbf{K})Q^{-1} = \mathcal{E}_-(\mathbf{K}) \quad \text{et} \quad Q\mathcal{E}_-(\mathbf{K})Q^{-1} = \mathcal{E}_+(\mathbf{K}).$$

On pourra introduire la matrice $QJ_{\mathbf{K}}$.
(b) En déduire qu'il existe un $\lambda \in \mathbf{L}^*$ tel que :

$$\psi_1(J_{\mathbf{K}}) = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

On fixe un tel λ dans la suite de cette question.
(c) On pose $P_2 := \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que l'isomorphisme $\psi_2 := \varphi_{P_2} \circ \psi_1$ vérifie simultanément (1) et $\psi_2(J_{\mathbf{K}}) = J_{\mathbf{L}}$.

Nous allons maintenant mettre en évidence un isomorphisme de corps $\sigma : \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ tel que $\psi_2(M) = M^\sigma$ pour tout $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$.

3. (a) En utilisant le résultat de 2.(a), montrer que ψ_2 induit une bijection de $\mathcal{D}_{\mathbf{K}}$ sur $\mathcal{D}_{\mathbf{L}}$.
(b) En déduire un isomorphisme de groupes $\beta : (\mathbf{K}^*, \times) \to (\mathbf{L}^*, \times)$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbf{K}^*,\ \psi_2\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \beta(\lambda) & 0 \\ 0 & \beta(\lambda)^{-1} \end{bmatrix}.$$

On prolonge β en une bijection de $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{L}$ en posant $\beta(0) := 0$.

4. Montrer qu'il existe un isomorphisme de groupes $\alpha : (\mathbf{K}, +) \to (\mathbf{L}, +)$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{K},\ \psi_2\left(\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & \alpha(x)\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

et vérifier alors que

$$\forall x \in \mathbf{K},\ \psi_2\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \alpha(x) & 1\end{bmatrix}.$$

5. (a) Soit $M = \begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$ telle que $c \neq 0$.
Mettre en évidence une décomposition $M = A\,B\,C\,J_{\mathbf{K}}$ avec $(A, B, C) \in \mathcal{D}_{\mathbf{K}} \times \mathcal{E}_-(\mathbf{K}) \times \mathcal{E}_+(\mathbf{K})$.
(b) En déduire que $\beta = \alpha$.

6. Conclure.

IV. Le théorème 2 en caractéristique différente de 2

Dans toute cette partie, on fixe deux entiers naturels m et n supérieurs ou égaux à 2, deux corps $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ de caractéristique différente de 2, et l'on suppose l'existence d'un isomorphisme de groupes $\Psi : \mathrm{SL}_m(\mathbf{K}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbf{L})$.

1. Montrer que $m = n$ et que si l'un des corps $\mathbf{K}$ ou $\mathbf{L}$ est fini, alors ils sont isomorphes.

Jusqu'à la fin du problème, on suppose $\mathbf{K}$ *et* $\mathbf{L}$ *infinis.*

En utilisant Ψ, on se propose de construire un isomorphisme de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbf{L})$, le résultat final de la partie III permettant alors de conclure.

On suppose $n \geqslant 3$ dans la suite. On introduit la matrice

$$S := \begin{bmatrix}I_{n-2} & 0\\ 0 & -I_2\end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{K}).$$

2. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{L})$ et un couple $(k, \ell) \in (\mathbf{N}^*)^2$ tel que $k + \ell = n$ et

$$\Psi(S) = P \begin{bmatrix}I_k & 0\\ 0 & -I_\ell\end{bmatrix} P^{-1}.$$

Pour $(a, b) \in (\mathbf{N}^*)^2$, on admet que l'ensemble

$$G_{a,b}(\mathbf{K}) := \big\{(P, Q) \in \mathrm{GL}_a(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_b(\mathbf{K}) :\ \det(P)\,\det(Q) = 1\big\},$$

est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_a(\mathbf{K}) \times \mathrm{GL}_b(\mathbf{K})$, et l'on définit de même $G_{a,b}(\mathbf{L})$.

3. En considérant les centralisateurs respectifs de S et $\Psi(S)$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{L})$, obtenir un isomorphisme de groupes de $G_{n-2,2}(\mathbf{K})$ sur $G_{k,\ell}(\mathbf{L})$.

4. En déduire un isomorphisme de $\mathrm{SL}_{n-2}(\mathbf{K}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$ sur $\mathrm{SL}_k(\mathbf{L}) \times \mathrm{SL}_\ell(\mathbf{L})$.

5. En utilisant le Théorème 1, démontrer que $(k, \ell) = (2, n-2)$ ou $(k, \ell) = (n-2, 2)$.

6. Conclure dans le cas où $n \neq 4$.

7. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2, et G un sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}_p(\mathbf{K}) \times \mathrm{SL}_p(\mathbf{K})$, distinct de $\mathrm{SL}_p(\mathbf{K}) \times \mathrm{SL}_p(\mathbf{K})$ et non-abélien.
Montrer qu'il existe un sous-groupe G' de $\mathcal{Z}\big(\mathrm{SL}_p(\mathbf{K})\big)$ tel que $G = \mathrm{SL}_p(\mathbf{K}) \times G'$ ou $G = G' \times \mathrm{SL}_p(\mathbf{K})$. En déduire la structure de $D(G)$.

8. Conclure.

Fin du problème