

SESSION 2014

**AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE**

**Section : PHYSIQUE-CHIMIE
Option : CHIMIE**

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Une ouverture sur le monde quantique

Introduction

L'exploration de l'infiniment petit tout au long du siècle dernier est certainement une des aventures les plus fascinantes de la science. Elle a abouti, non sans polémique ni controverse, à l'élaboration de l'une des plus belles théories de la physique, la physique quantique. De plus, les prédictions de la physique quantique sont, avec celles de la relativité générale, vérifiées avec une précision inégalée. Enfin, la physique quantique n'est pas qu'une belle théorie dotée d'une redoutable puissance prédictive, elle est aussi à la base de nombreuses applications concrètes, parmi lesquelles le laser ou le transistor, qui ont fondamentalement modifié nos vies, en particulier dans les domaines de l'information et de la communication. La découverte historique du boson de Higgs au CERN et le prix nobel de physique décerné en 2012 à Serge Haroche et David Wineland pour leurs travaux expérimentaux sur les photons, sont des illustrations encore plus récentes du rôle important que joue le monde quantique en physique. La physique quantique est ainsi non seulement au cœur de la recherche fondamentale mais elle est aussi une science concrète dont certaines applications nous accompagnent tous les jours.

Ce problème a pour objet d'étudier certains aspects fondamentaux de cette physique quantique. Dans la première partie, nous montrerons comment et pourquoi nous sommes passés d'une vision classique à une vision quantique de l'atome. Dans la deuxième partie sera introduite la notion centrale de fonction d'onde dont on étudiera quelques propriétés fondamentales. On illustrera en particulier les notions d'orbitales atomique et moléculaire. La troisième partie abordera la question de la quantification de la lumière, de l'émergence du photon et l'étude de ses interactions avec les atomes.

Les trois parties sont indépendantes les unes des autres. A l'intérieur même des parties, les sous-parties sont souvent indépendantes les unes des autres.

Table des matières

1	L'atome : de la vision classique à la vision quantique	4
1.1	Le modèle de Rutherford	4
1.2	Le modèle de Bohr	8
2	Les propriétés quantiques des atomes	9
2.1	Discrétisation des niveaux d'énergie	9
2.2	Les relations d'incertitudes d'Heisenberg	13
2.3	Des orbitales atomiques aux orbitales moléculaires	14
3	De l'onde à la particule : le photon	18
3.1	La théorie de Planck du corps noir	18
3.2	Les interactions entre le photon et la matière	25

Formulaire

1. Formules mathématiques

1. Intégrales avec fonctions trigonométriques (n est un entier non nul) :

$$\int_0^\pi \sin^2(nx) dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\pi x \sin^2(nx) dx = \frac{\pi^2}{4}, \quad \int_0^\pi x^2 \sin^2(nx) dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4n^2}.$$

2. Orthogonalité entre fonctions trigonométriques (n et m sont des entiers distincts) :

$$\int_0^\pi \sin(nx) \sin(mx) dx = 0 = \int_0^\pi \sin(nx) \cos(mx) dx.$$

3. Fonctions hyperboliques :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

4. Gradient d'une fonction $f(r)$ en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \overrightarrow{\nabla}(f) = \frac{df}{dr} \vec{e}_r.$$

5. Formules d'analyse vectorielle (\vec{V} est un vecteur et Φ est un scalaire) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi)) = \vec{0}, \quad \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})) = 0;$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})) - \Delta \vec{V}, \quad \Delta \Phi = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi))$$

6. Calcul de séries (x est un nombre réel tel que $|x| < 1$) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

2. Constantes fondamentales et grandeurs physiques

Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8$ m.s⁻¹

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ m².kg.s⁻².K⁻¹

Charge élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C

Masse de l'électron : $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg

Masse de la particule α : $m_\alpha = 6,70 \times 10^{-27}$ kg

Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F.m⁻¹

Conductivité électrique du cuivre : $\sigma = 5,69 \times 10^7$ S.m⁻¹

Nombre de charges du noyau d'or : $Z_{Au} = 79$

1 L'atome : de la vision classique à la vision quantique

Parmi les grandes questions ouvertes de la fin du 19^{ème} siècle, celles concernant le rayonnement des sources lumineuses ont conduit à repenser la structure fondamentale de l'atome. Que ce soit le rayonnement du corps noir avec sa catastrophe de l'ultra-violet ou le spectre d'émission discret de certaines sources, leurs observations ont permis de conclure que les échanges d'énergie entre la lumière et l'atome devaient se faire de façon discrète, par quanta d'énergie. Evidemment, cela tranchait radicalement avec la vision classique.

Quelques années après que Max Planck ait présenté sa résolution de la catastrophe de l'ultra-violet avec la première apparition de la constante fondamentale h qui portera désormais son nom, Niels Bohr a proposé le premier modèle quantique de l'atome d'hydrogène pour expliquer son spectre d'émission discret. La constante de Planck h joue un rôle crucial dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène et c'est véritablement à ce moment-là que commence l'élaboration de la physique quantique. Plus tard, on soulignera les limites du modèle de Bohr et on comprendra comment le modifier et l'adapter à tous les atomes.

Avant d'étudier le modèle de Bohr dans la partie 2, on reviendra sur le modèle classique de l'atome élaboré par Rutherford dans la partie 1.1.

1.1 Le modèle de Rutherford

Grâce aux résultats d'une célèbre expérience, Rutherford (avec l'aide de ses étudiants) a élaboré en 1911 un modèle classique de l'atome dans lequel les électrons tournent autour du noyau, de la même façon que les planètes tournent autour du Soleil. Entre les électrons et le noyau, l'espace est vide, ce qui a conduit Rutherford à qualifier la matière de lacunaire. Dans cette partie, nous allons étudier succinctement l'expérience de Rutherford et montrer les limites de son modèle classique de l'atome.

a. La diffusion de particules α par des atomes d'or

C'est en étudiant la diffusion de particules α lancées sur une feuille d'or très fine que Rutherford a illustré l'aspect lacunaire de la matière (figure 1). Il a en effet observé que la très grande majorité des particules α traversait la feuille d'or sans être déviées, comme si elles ne rencontraient rien sur leur passage. Toutefois, l'observation de quelques particules (de l'ordre de 0,01 %) pouvant être déviées très fortement a permis de conforter l'idée que l'atome était composé d'un noyau de charge positive quasi ponctuel autour duquel tournent des électrons de charge négative.

1. Donner un ordre de grandeur de la taille de l'atome d'hydrogène (que l'on notera a_H) et un ordre de grandeur de la taille du proton (que l'on notera a_p). Préciser alors l'idée de caractère lacunaire de la matière.
2. Dans l'expérience de Rutherford, les électrons ne semblent jouer aucun rôle dans la diffusion des particules α . On pourrait invoquer leur éventuelle très petite taille qu'on ne connaissait pas. Pour estimer la taille de l'électron, certains ont modélisé l'électron comme une boule de rayon R chargée uniformément. Le centre de la sphère est noté O et on munit l'espace d'un système de coordonnées sphériques pour repérer les points M de l'espace. On notera, en particulier, $r = OM$ la distance radiale et $\vec{e}_r = \overrightarrow{OM}/OM$ le vecteur de base radial des coordonnées sphériques.

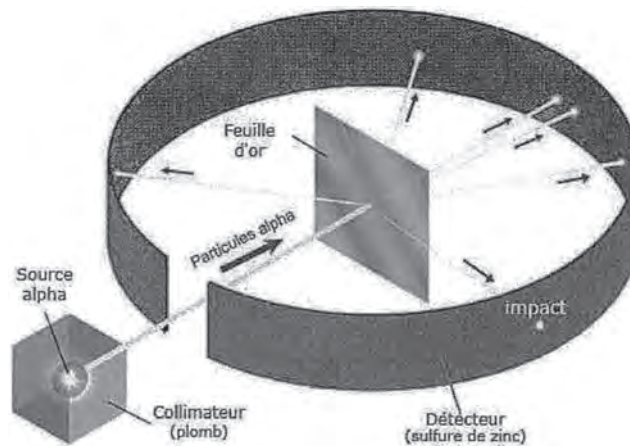


FIG. 1 – Illustration de l’expérience de Rutherford. Les particules α sont envoyées sur une feuille d’or. Une très grande partie des particules ne sont pas déviées. Les particules α sont ensuite détectées grâce à un écran circulaire fluorescent.

- Déterminer la densité volumique de charge ρ de l’électron en fonction de sa charge $-e$ et de son rayon R .
- Cette charge crée un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point M de l’espace. Par des arguments de symétrie qu’on exposera clairement, montrer que le champ électrique s’écrit nécessairement sous la forme $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$.
- Enoncer le théorème de Gauss pour l’électrostatique. En déduire l’expression de $E(r)$ pour toute valeur de r . On distinguera les cas $r \leq R$ et $r \geq R$.
- Quelle est la relation entre le potentiel électrostatique V et le champ électrostatique \vec{E} associé? Pour un champ \vec{E} donné, le potentiel V est-il unique?
- Ecrire les équations locales de l’électrostatique. Laquelle de ces équations locales permet de justifier l’existence d’un potentiel électrostatique pour tout champ électrostatique?
- Calculer alors le potentiel électrostatique $V(r)$ pour le champ $\vec{E}(r)$ créé par l’électron. Pour cela, on supposera que le potentiel s’annule lorsque $r \rightarrow \infty$ et on montrera que :

$$\text{si } r \geq R \text{ alors } V(r) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ et si } r \leq R \text{ alors } V(r) = \frac{e}{8\pi\epsilon_0 R^3}(r^2 - 3R^2). \quad (1)$$

- L’énergie électrostatique \mathcal{E}_{elec} d’une distribution de densité de charges ρ , délimitée dans un domaine \mathcal{D} de l’espace est donnée par l’intégrale volumique suivante

$$\mathcal{E}_{elec} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho(M) V(M) d\tau(M) \quad (2)$$

où $V(M)$ est le potentiel créé par la distribution de charges au point M . L’intégrale porte sur les points M du domaine \mathcal{D} et l’élément de volume infinitésimal est donné par $d\tau(M) = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ au voisinage d’un point M repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . Déterminer alors l’énergie électrostatique de l’électron dans ce modèle.

- h. Pour estimer le rayon R de l'électron, on estime que l'énergie de masse (relativiste) \mathcal{E}_m de l'électron a une origine purement électrostatique et est précisément égale à l'énergie \mathcal{E}_{elec} . En déduire une expression de R en fonction des différentes constantes fondamentales mises en jeu.
- i. Faire l'application numérique. Cette valeur de R semble-t-elle possible ? Discuter le résultat.
3. Les électrons ne jouent en fait aucun rôle dans l'expérience de Rutherford. On se concentre alors sur l'interaction entre une particule α et le noyau d'un atome d'or.
- Qu'est-ce qu'une particule α ?
 - Une particule α possède une charge positive égale à $2e$ où e est la charge élémentaire. Décrire de manière succincte un protocole expérimental permettant d'accélérer une telle particule.
 - Quel pourrait être le rôle du collimateur au plomb dans l'expérience de Rutherford illustrée dans la figure (1) ?
 - On suppose la particule α ponctuelle alors que le noyau d'or est modélisé comme une sphère de centre O et de rayon a_0 . Par ailleurs, la masse du noyau étant bien plus importante que celle de la particule α , on supposera que le noyau reste immobile lors de la diffusion.
On s'intéresse tout d'abord à une particule α "faiblement" déviée par un noyau d'or. Expliquer succinctement pourquoi la particule α est déviée. Quelle est la nature de la trajectoire de la particule α ?
 - L'expérience de Rutherford permet d'estimer la taille du noyau en étudiant en particulier les particules α ayant rebondi sur le noyau, c'est-à-dire ayant été diffusées avec un angle de 180° (par rapport à la direction incidente), comme indiqué sur la figure (2).

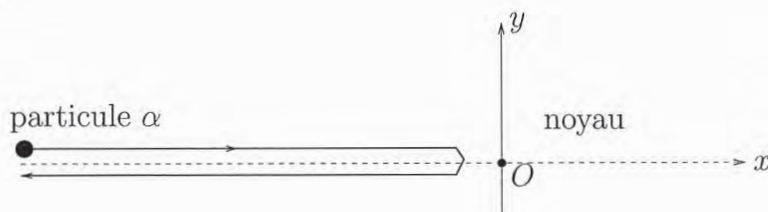


FIG. 2 – Les particules α sont émises avec une vitesse v_0 . Celles qui "rebondissent" s'approchent du noyau jusqu'à une distance a_{min} de son centre avant de rebrousser chemin. Le point O représente le centre du noyau.

Ainsi, une telle particule est émise avec une vitesse v_0 , s'approche du noyau à une distance a_{min} , puis rebrousse chemin. Tant que $a_{min} > a_0$, on peut supposer la diffusion élastique, sinon elle est inélastique. Nous allons étudier ces deux situations.

- On suppose tout d'abord le choc élastique. Déterminer, dans ce cas, l'énergie mécanique $E_m(M)$ de la particule α lorsqu'elle se trouve en un point M tel que $OM = r$ à la vitesse v . On notera m_α la masse de la particule α .
- On suppose qu'à l'instant initial, la particule α est infiniment éloignée du noyau d'or et sa vitesse est v_0 . En déduire la distance minimale a_{min} entre le noyau et la particule α en fonction de la vitesse v_0 en particulier.

- iii. Supposons que l'on puisse comparer l'énergie cinétique initiale de la particule α à l'énergie cinétique à son retour après interaction avec un noyau (ce n'est pas ce que Rutherford a fait dans son expérience historique). On constaterait alors que la diffusion est élastique tant que la vitesse d'émission est plus faible que $v_{max} = 2 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$. Donner alors une valeur numérique pour le rayon du noyau a_0 . Discuter le résultat obtenu.
 - iv. Lorsque la vitesse d'émission de la particule α est supérieure à v_{max} , la diffusion devient inélastique et une partie de l'énergie de la particule est absorbée par le noyau. Comment pourrait se manifester cette absorption d'énergie par le noyau ?
4. Suite à cette expérience, Rutherford a proposé en 1911 le modèle planétaire de l'atome dans lequel une charge positive est concentrée dans un "petit" noyau au centre alors que les électrons tournent autour du noyau par le fait de l'interaction électromagnétique. Quel modèle pour l'atome était communément admis avant les expériences de Rutherford ? Quel physicien avait développé ce modèle ?

b. L'instabilité de l'atome classique

Malgré les progrès conceptuels sur la compréhension fondamentale de la matière qu'a permis de faire l'expérience de Rutherford, le modèle planétaire souffrait d'un problème important. Il ne permettait pas de comprendre la stabilité de l'atome ! En effet, toute particule chargée accélérée rayonne et perd donc de l'énergie. Il en est ainsi avec le modèle classique de l'atome où les électrons en rotation autour du noyau sont accélérés, ils devraient donc perdre de l'énergie et ainsi s'écrouler sur le noyau au bout d'un certain temps. Par conséquent, selon la théorie classique, un atome aurait un temps de vie fini.

Le but de cette partie est d'évaluer le temps de vie de l'atome d'hydrogène dans le cadre du modèle de Rutherford.

1. Dans un premier temps, on suppose que l'électron tourne autour du noyau avec une trajectoire circulaire de rayon r . Déterminer alors la norme de la vitesse v et celle de l'accélération a .
2. Calculer également l'expression E_m de son énergie mécanique en supposant que l'énergie potentielle E_p s'annule lorsque le rayon est infiniment grand.
3. A cause de son accélération, l'électron rayonne et perd ainsi de l'énergie. La puissance P perdue par rayonnement dépend de la norme de son accélération a et de la charge e de l'électron, mais aussi des constantes caractéristiques du rayonnement que sont la célérité de la lumière dans le vide c et la permittivité du vide ϵ_0 . Par des arguments d'analyse dimensionnelle, déterminer une expression de P sous la forme :

$$P = K e^\alpha \epsilon_0^\beta c^\gamma a^\delta \quad (3)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers et K est une constante sans dimension. Larmor a montré dans un modèle non-relativiste que $K = 1/(6\pi)$. On prendra cette valeur par la suite.

4. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, montrer qu'en raison de la perte par rayonnement le rayon de la trajectoire diminue selon la loi

$$\frac{dr^3}{dt} = -\frac{e^4}{4\pi^2 c^3 \epsilon_0^2 m_e^2} \quad (4)$$

5. Intégrer cette équation et évaluer le temps de vie τ de l'atome en fonction de la taille de l'atome d'hydrogène a_H , de celle du proton a_p et des données du problème.
6. Donner alors un ordre de grandeur pour τ . En déduire les limites du modèle classique de l'atome de Rutherford.

Rutherford a ainsi mis la communauté scientifique sur la bonne voie avec le modèle planétaire de l'atome mais nombreux étaient les aspects qui restaient obscurs comme cette question de la stabilité de l'atome. Le modèle de Rutherford ne permettait pas de comprendre non plus la nature discrète du spectre d'émission de certaines sources qu'on observait depuis déjà longtemps sans pouvoir en donner une interprétation. En fait, ces deux problèmes majeurs du modèle de Rutherford sont intimement liés...

1.2 Le modèle de Bohr

C'est Niels Bohr, physicien danois, qui a ouvert la voie vers la construction d'un modèle quantique de l'atome d'hydrogène alors qu'il travaillait dans le laboratoire de Rutherford. Son modèle, certes encore imparfait, résout le problème de la stabilité évoqué ci-dessus et a permis de franchir un pas décisif vers l'élaboration de la physique quantique.

Niels Bohr connaissait les travaux de Planck et d'Einstein qui aboutissaient à cette idée que les échanges d'énergie électromagnétique se faisait par paquets discrets et non de façon continue. Pourquoi alors, s'était-il demandé, les rayons des orbites des atomes resteraient continus et ne prendraient-ils pas des valeurs discrètes également ?

1. On considère l'atome d'hydrogène. Pour commencer, on suppose, comme dans la partie précédente, que l'électron tourne autour du noyau avec une trajectoire circulaire de rayon r . On munit le plan de la trajectoire d'un système de coordonnées polaires dont l'origine O est confondue avec le centre de la trajectoire. L'électron est repéré par son vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et son vecteur vitesse est noté \vec{v} . Définir le moment cinétique de l'électron \vec{L} par rapport au point O . Déterminer alors sa norme L en fonction de r et v .
2. L'hypothèse fondamentale du modèle de Bohr consiste à supposer que seules les trajectoires permises sont celles pour lesquelles le moment cinétique est quantifié selon la loi

$$L = n\hbar \quad (5)$$

où n est un entier strictement positif et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Vérifier que la relation de quantification (5) est bien homogène. Ainsi, une trajectoire circulaire autorisée est entièrement caractérisée par la donnée d'un entier strictement positif n .

3. Déduire de cette règle de quantification (5) que le rayon r_n de la trajectoire caractérisée par n ainsi que la vitesse v_n et l'énergie E_n de l'électron sur cette trajectoire sont données par

$$r_n = n^2 r_1, \quad v_n = \alpha \frac{c}{n}, \quad E_n = -\frac{E_1}{n^2} \quad (6)$$

où on déterminera les expressions du rayon de Bohr r_1 , de la constante de structure fine α et de l'énergie d'ionisation E_1 . Calculer numériquement leurs valeurs.

4. En quoi est-ce que le modèle de Bohr permet de résoudre le problème de la stabilité de l'atome ?

5. Pour expliquer la nature discrète du spectre de certaines sources lumineuses, Bohr a postulé, en plus de la règle de quantification (5), qu'un électron pouvait passer d'un niveau d'énergie E_n à un niveau d'énergie E_m en émettant ou en absorbant des photons dont l'énergie E_γ est précisément donnée par la différence entre les niveaux d'énergie $E_\gamma = |E_n - E_m|$. Après avoir rappelé la relation entre l'énergie E_γ d'un photon et sa fréquence ν , déterminer la fréquence et la longueur d'onde dans le vide λ du photon émis ou absorbé lors de la transition entre deux états d'énergies E_n et E_m .

Ce modèle très simple est redoutablement efficace pour comprendre les propriétés quantiques de l'atome d'hydrogène mais il atteint vite ses limites. En particulier, on ne peut pas l'adapter simplement pour expliquer les propriétés des atomes plus complexes que l'atome d'hydrogène. Il a toutefois permis d'ouvrir une grande porte vers le monde de l'infiniment petit.

2 Les propriétés quantiques des atomes

Max Planck et Albert Einstein ont été les premiers à comprendre, au tout début du 20ème siècle, que la lumière, jusqu'alors considérée comme onde, pouvait revêtir les caractéristiques d'un corpuscule, le photon. Dans les années 1920, Louis de Broglie postule que cette dualité onde-corpuscule se généralise aux particules élémentaires matérielles. Cette caractéristique ondulatoire de la matière est même fondamentale puisqu'elle attribue à toute particule une fonction d'onde. C'est Max Born qui l'interprètera en terme de probabilités. Erwin Schrödinger écrira son équation d'évolution.

L'objet de cette partie est d'étudier certaines propriétés fondamentales de la fonction d'onde à travers des exemples simples.

2.1 Discrétisation des niveaux d'énergie

Etudier directement l'électron en interaction avec le proton dans l'atome d'hydrogène est un problème totalement soluble mais techniquement complexe. Pour le simplifier, on modélisera l'électron comme une particule évoluant librement dans une boîte à une seule dimension. Plus précisément, on considère une particule ponctuelle de masse m piégée dans un puits de potentiel infini à une dimension représenté sur la figure (3). On munit l'axe du mouvement de la particule d'un système de coordonnées où O est l'origine et \vec{e}_x le vecteur unitaire. Le puits de potentiel infini est un modèle où l'énergie potentielle $V(x)$ de la particule est nulle lorsque $x \in [0, L]$, sinon elle est infinie.

On pourra ainsi interpréter la particule dans le puits de potentiel comme un modèle simple d'un électron lié au proton où la variable x représenterait la distance de l'électron au proton. Ce modèle est simple et atteint vite ses limites mais il sera largement suffisant pour comprendre précisément la quantification des niveaux d'énergie.

a. Brève étude de la théorie classique

Avant d'étudier le puits de potentiel quantique, nous allons voir dans quelle mesure le puits de potentiel infini est une bonne modélisation de l'interaction entre le proton et l'électron. On note alors m_e et m_p les masses de l'électron et du proton.

1. On suppose que le proton est immobile dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen alors que l'électron est en mouvement. Qu'est-ce qui peut justifier cette hypothèse ?

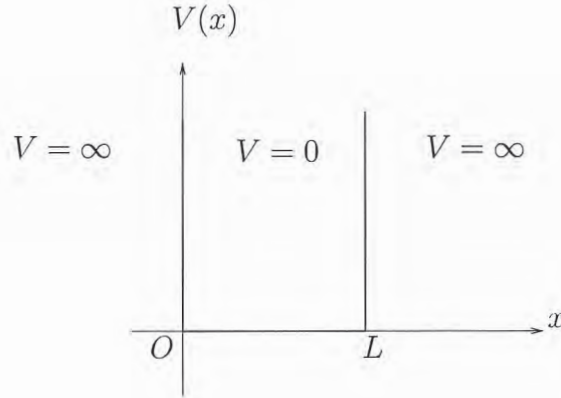


FIG. 3 – La particule de masse m se déplace a priori selon l'axe (Ox) . Ce schéma représente l'allure de l'énergie potentielle $V(x)$ de la particule en fonction de sa position x . Compte tenu de sa forme, on qualifie souvent ce type d'énergie potentielle de puits de potentiel infini.

2. On considère seulement l'interaction électrostatique entre l'électron et le proton dans la suite du problème. Quelle propriété particulière de cette interaction permet de conclure que la trajectoire de l'électron est nécessairement plane ?
3. On admet que cela est bien le cas et on munit le plan de la trajectoire d'un système de coordonnées polaires dont le centre O est confondu avec le centre du proton. L'électron, dont la position est notée M , est repéré dans ce référentiel par la distance $r = OM$ et l'angle θ formé entre un axe fixe et le vecteur \overrightarrow{OM} . Faire un schéma dans lequel on fera apparaître le point M , ses coordonnées polaires (r, θ) et la base de vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ associée au système de coordonnées polaires.
4. Appliquer la seconde loi de Newton à l'électron et montrer que les fonctions $r(t)$ et $\theta(t)$ satisfont les équations différentielles suivantes :

$$m_e \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = -\frac{K}{r^2} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \quad (7)$$

où K est une constante fondamentale que l'on déterminera. Donner une interprétation géométrique de la seconde équation.

5. Dédire de ces deux équations que $r(t)$ satisfait l'équation suivante :

$$m_e \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{K}{r^2} + \frac{K_1}{r^3} \quad (8)$$

où K_1 est une constante positive que l'on ne cherchera pas à expliciter.

6. Montrer que l'on peut interpréter cette équation différentielle pour $r(t)$ comme l'équation du mouvement d'une particule fictive de masse m_e évoluant a priori sur le demi-axe réel $r > 0$ et soumise à une force qui dérive de l'énergie potentielle $E_p(r)$ donnée par

$$E_p(r) = -\frac{K}{r} + \frac{K_1}{2r^2}. \quad (9)$$

Tracer schématiquement $E_p(r)$. Montrer que, selon la valeur de son énergie mécanique E , la particule fictive décrit une trajectoire fermée ou une trajectoire ouverte. On parle respectivement d'état lié ou d'état de diffusion de la particule classique.

7. Par souci de simplification, on modélise l'énergie potentielle $E_p(r)$ par le puits infini $V(x)$ en identifiant la variable radiale r à la position x . Quelles sont les limites de ce modèle? En particulier, on décrira un phénomène physique que le modèle du puits infini ne peut pas prédire.
8. A quelles conditions sur l'énergie de la particule la modélisation de l'énergie potentielle par le puits infini est-elle toutefois pertinente? On supposera ces conditions satisfaites par la suite.
9. On étudie maintenant le mouvement d'une particule classique dans le puits de potentiel infini $V(x)$.
 - a. Justifier que classiquement la particule ne peut pas se trouver dans les zones où le potentiel est infini.
 - b. Décrire alors le mouvement de la particule dans la zone où le potentiel est nul.

Comme cela a déjà été souligné dans l'introduction de cette partie, la quantification de la dynamique de l'électron en interaction coulombienne avec le noyau est un système dit intégrable dont on peut décrire les états quantiques et les niveaux d'énergie de façon exacte. D'ailleurs, cette étude aboutit exactement aux niveaux d'énergie prédits dans le modèle de Bohr mais maintenant l'électron est décrit par une fonction d'onde. Comme la résolution du problème est toutefois relativement complexe, on étudiera dans la suite le modèle du puits de potentiel infini, en ayant conscience de ses limites.

b. Etude du puits infini quantique

Dans la théorie quantique, la particule n'est plus décrite comme un point mais comme une fonction d'onde $\psi(x, t)$ qui est a priori complexe. On dit que la fonction d'onde caractérise un état quantique de la particule. On reviendra sur l'interprétation physique de la fonction d'onde plus tard mais pour le moment, on précise qu'elle satisfait la condition de normalisation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1. \quad (10)$$

Cette fonction d'onde satisfait l'équation de Schrödinger que l'on peut écrire dans ce cas sous la forme suivante :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t). \quad (11)$$

1. Vérifier que cette équation est bien homogène.
2. Montrer que, pour que l'équation (11) ait un sens physique dans les zones où le potentiel est infini, la fonction d'onde est nécessairement nulle.
3. Ecrire l'équation de Schrödinger dans la zone où le potentiel est nul. C'est donc cette équation qu'on va chercher à résoudre par la suite.
4. On cherche des solutions par la méthode de séparation des variables, $\psi(x, t) = F(x)\chi(t)$ où $F(x)$ ne dépend que de la variable de position et $\chi(t)$ que de la variable de temps. Dans un modèle plus réaliste, $F(x)$ serait l'orbitale atomique de la particule. Montrer que la fonction $\chi(t)$ s'écrit nécessairement (à une constante multiplicative près) sous la forme

$$\chi(t) = e^{-iEt/\hbar} \quad (12)$$

où E est une constante qui représente l'énergie de la particule dans l'état $\psi(x, t)$. Vérifier que E est bien homogène à une énergie.

5. Ecrire l'équation que doit satisfaire la fonction $F(x)$. Donner les solutions générales pour $F(x)$ lorsque E est positive et lorsque E est négative.
6. Justifier que $F(0) = 0 = F(L)$. En déduire que l'équation de Schrödinger n'admet pas de solution lorsque $E < 0$. On ne s'intéressera pas ici au cas où $E = 0$.
7. Si on interprète la particule dans le puits de potentiel comme un modèle de l'électron lié à son proton, pourquoi peut-on dire que l'atome ainsi modélisé est stable (contrairement au modèle classique) ?
8. Dans le cas où $E > 0$, l'équation de Schrödinger admet une infinité de solutions compatibles avec les conditions aux limites $F(0) = 0 = F(L)$. Montrer que ces solutions sont indexées par un entier strictement positif n et sont données par les fonctions :

$$F_n(x) = N \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \quad (13)$$

où N est une constante multiplicative. Déterminer la valeur de N en utilisant la condition de normalisation (10).

9. Tracer les orbitales atomiques des trois premiers états quantiques $F_1(x)$, $F_2(x)$ et $F_3(x)$ sur un schéma. Ces graphes rappellent un phénomène ondulatoire à une dimension, de quel phénomène s'agit-il ?
10. Montrer que l'énergie E de la particule est nécessairement quantifiée et que ses valeurs possibles E_n dépendent d'un entier n . Noter que E_n représente l'énergie de la particule lorsqu'elle se trouve dans l'état quantique suivant

$$\psi_n(x, t) = e^{-i \frac{E_n t}{\hbar}} F_n(x). \quad (14)$$

On dit que $\psi_n(x, t)$ est un état propre de l'énergie.

11. Ce modèle très simple permet ainsi de comprendre que la quantification des niveaux d'énergie est en fait intimement liée à l'existence de conditions aux limites $F(0) = 0 = F(L)$. Plus précisément, c'est parce que la particule est classiquement dans un état lié qu'elle a des niveaux d'énergie discrets dans la théorie quantique. Expliquer alors pourquoi l'énergie E peut être infiniment grande dans notre modèle simplifié alors que ce n'est pas le cas pour l'électron dans l'atome d'hydrogène.

c. Interprétation et étude de la fonction d'onde

L'interprétation physique de la fonction d'onde a été au centre de nombreuses discussions scientifiques. De Broglie, qui a découvert la dualité onde-corpuscule, interprétait cette fonction comme une onde "pilote" qui dirigerait la trajectoire de la particule. Or cette vision s'est vite heurtée à des incohérences. C'est Max Born qui en 1926 a découvert l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde, celle qui est la plus communément acceptée aujourd'hui même si elle suscita à l'époque de très vives réactions.

D'après Max Born, la fonction d'onde $\psi(x, t)$ permet de déterminer une amplitude de probabilité. Plus précisément, la probabilité de trouver la particule entre les points d'abscisse x et $x + dx$ est donnée par

$$P(x, t) dx = |\psi(x, t)|^2 dx. \quad (15)$$

Par conséquent, la mesure de la position de la particule est un processus probabiliste. Il en est de même pour la mesure de toute grandeur physique f . Plusieurs mesures consécutives de f conduisent, en général, à des valeurs différentes. Lorsque f est une grandeur qui ne dépend que de la position x , on peut la modéliser comme une fonction $f(x)$ et il est possible de définir sa valeur moyenne spatiale $\langle f \rangle$:

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) |\psi(x, t)|^2 dx \quad (16)$$

lorsque la particule se trouve dans l'état quantique $\psi(x, t)$.

1. Interpréter la condition de normalisation (10) de la fonction d'onde.
2. Déterminer la valeur moyenne de la position x de la particule lorsqu'elle se trouve dans l'état quantique $\psi_n(x, t)$ définie par (14). Interpréter le résultat.
3. Lorsque la grandeur physique f qu'on cherche à mesurer ne dépend pas de x , mais de l'impulsion $\vec{p} = p\vec{e}_x$ de la particule par exemple, la formule (16) pour déterminer sa valeur moyenne n'est plus valable. Par exemple, les valeurs moyennes de p et de p^2 , pour une particule se trouvant dans un état quantique $\psi(x, t)$, sont données par les intégrales :

$$\langle p \rangle = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x, t)} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} dx \quad \text{et} \quad \langle p^2 \rangle = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x, t)} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (17)$$

où $\overline{\psi(x, t)}$ est le complexe conjugué de $\psi(x, t)$.

- a. Vérifier que les formules précédentes (17) sont bien homogènes.
- b. On suppose que la particule se trouve dans un état $\psi_n(x, t)$. Déterminer dans ce cas les valeurs de $\langle p \rangle$ et de $\langle p^2 \rangle$. Interpréter physiquement les résultats obtenus.
- c. On suppose maintenant que la particule se trouve dans un état quantique défini par une fonction d'onde du type :

$$\psi_{n,m}(x, t) = \alpha_n \psi_n(x, t) + \alpha_m \psi_m(x, t) \quad (\text{avec } n \neq m) \quad (18)$$

où α_m et α_n sont des coefficients complexes tels que la condition (10) est vérifiée.

- i. On dit que la particule se trouve dans une superposition de deux états propres de l'énergie. Pourquoi ? Quelle propriété de l'équation de Schrödinger (11) permet de conclure que la superposition d'états $\psi_{n,m}(x, t)$ en est une solution ?
- ii. Quelle relation doivent satisfaire les coefficients α_n et α_m pour que la condition (10) soit satisfaite ?
- iii. Calculer les valeurs moyennes $\langle p \rangle$ et $\langle p^2 \rangle$ lorsque la particule se trouve dans l'état $\psi_{n,m}(x, t)$. En déduire la valeur moyenne de l'énergie de la particule $\langle E \rangle$ dans cet état. Interpréter le résultat obtenu.

2.2 Les relations d'incertitudes d'Heisenberg

Les relations d'incertitudes établies par le physicien Allemand Werner Heisenberg constituent un des résultats les plus frappants de la physique quantique. De manière schématique, elles disent qu'on ne peut pas connaître simultanément, lors d'une mesure, la position et la

quantité de mouvement (ou bien la vitesse) d'une particule avec une précision aussi grande que l'on veut. Cette impossibilité n'est pas le fait d'une limite technologique sur l'appareillage de mesure, elle est intrinsèque aux systèmes quantiques.

Nous allons illustrer ces relations à travers le modèle simple de la particule dans le puits de potentiel infini. Pour cela, on supposera qu'un expérimentateur essaie d'évaluer la position et la quantité de mouvement de la particule piégée dans le puits de potentiel infini. La particule se trouve dans un état quantique $\psi_n(x, t)$.

1. Dans un premier temps, l'expérimentateur cherche à mesurer la quantité de mouvement $\vec{p} = p\vec{e}_x$ de la particule et à chiffrer la dispersion des mesures Δp que l'on identifiera à l'incertitude sur la mesure. Il effectue plusieurs mesures et obtient la valeur moyenne $\langle p \rangle$ pour l'impulsion et définit l'incertitude sur la mesure Δp par

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}. \quad (19)$$

Pourquoi prendre cette définition de l'incertitude ? Déterminer Δp en fonction de n , \hbar et L .

2. Dans un second temps, l'expérimentateur cherche à mesurer la position x de la particule. Il effectue également plusieurs mesures et obtient la valeur moyenne $\langle x \rangle$ avec une incertitude Δx sur la mesure de la position donnée par :

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}. \quad (20)$$

Calculer Δx explicitement.

3. Montrer que Δx et Δp satisfont une égalité de la forme

$$\Delta x \times \Delta p = C \quad (21)$$

où C est une constante qui ne dépend que de \hbar et de n .

4. Montrer alors que, en modifiant le dispositif expérimental, on ne peut pas réduire l'incertitude Δx sur la mesure de la position sans augmenter l'incertitude Δp sur la mesure de l'impulsion.
5. En fait, Heisenberg a montré que si une particule se trouve dans un état quantique $\psi(x, t)$ quelconque, les mesures de sa position et de sa quantité de mouvement sont associées à des incertitudes Δx et Δp qui satisfont l'inégalité suivante :

$$\Delta x \times \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (22)$$

Comparer la valeur de C obtenue dans l'égalité (21) à $\hbar/2$ et interpréter la différence observée.

6. Quel type d'états quantiques $\psi(x, t)$ pourraient minimiser l'inégalité de Heisenberg ?

2.3 Des orbitales atomiques aux orbitales moléculaires

Par souci de simplicité, on a modélisé l'électron lié au proton dans l'atome d'hydrogène comme une particule dans un puits de potentiel. En restant dans le cadre de ce modèle, on

étudie la possibilité de former une molécule de dihydrogène lorsque deux atomes, notés A et B par la suite, se rapprochent suffisamment.

En effet, lorsque les atomes A et B sont suffisamment proches alors l'électron de A sent l'influence de B et inversement. Dans ce cas, les électrons ne se trouvent plus chacun dans un puits de potentiel infini mais on peut les modéliser comme se trouvant dans un double puits de potentiel schématisé sur la figure (4). La modélisation par ce double puits de potentiel ne prend

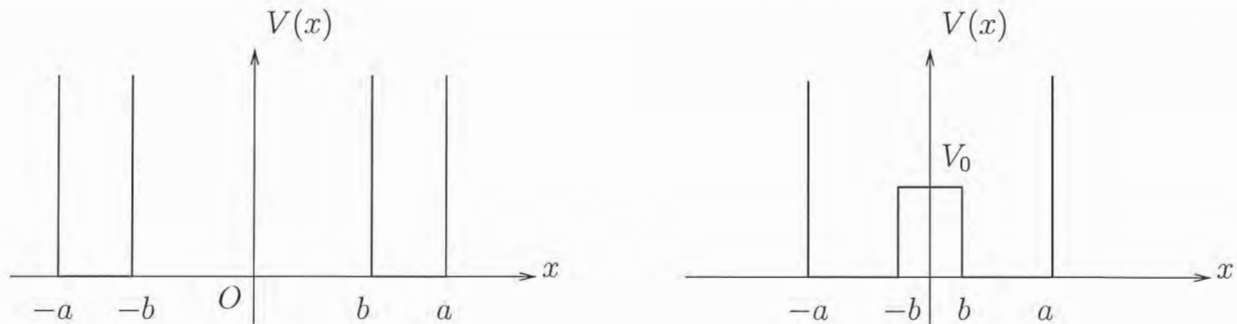


FIG. 4 – Lorsque les atomes sont éloignés l'un de l'autre (b suffisamment grand), les électrons sont chacun dans un puits de potentiel infini. Mais, lorsque les atomes sont suffisamment proches, les électrons sont dans le double puits de potentiel modélisé par la figure précédente. Lorsque $|x| > a$, le potentiel est infini ; il est nul lorsque $b < |x| < a$; et il est égal à V_0 lorsque $|x| < b$.

en compte que l'interaction entre les électrons et les protons. On néglige l'interaction entre les électrons.

Pour être plus précis, on considère dans un premier temps un seul électron en interaction avec les deux protons. Ainsi, on modélise l'ion H_2^+ et non la molécule H_2 . Dans un second temps seulement (lorsque cela sera explicitement indiqué), on introduira un électron supplémentaire dans le système afin de modéliser la molécule H_2 .

a. Les orbitales atomiques

On se place tout d'abord dans le cas où l'énergie potentielle de l'électron est décrite par les deux puits infinis illustrés dans le schéma de gauche de la figure (4). On cherche l'énergie du niveau fondamental, c'est à dire, l'énergie la plus petite que peut avoir l'électron dans ce double puits infini.

1. Justifier que l'énergie du niveau fondamental de l'électron dans le double puits infini est égale à l'énergie E_1 du niveau fondamental du simple puits étudié dans la partie (2.1.b.).
2. On peut alors écrire la fonction d'onde de l'électron (dans le double puits infini) dans le niveau fondamental sous la forme $\psi(x, t) = e^{-iE_1 t/\hbar} F(x)$ où F est une fonction réelle. Montrer que $F(x)$ s'écrit en général comme la somme de deux termes :

$$F(x) = \alpha_1 F_1^{(G)}(x) + \beta_1 F_1^{(D)}(x) \quad (23)$$

où α_1 et β_1 sont des constantes satisfaisant la condition $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$ alors que $F_1^{(G)}(x)$ et $F_1^{(D)}(x)$ sont simplement reliées à la fonction propre $F_1(x)$ du puits de potentiel infini (13). Pour cela, on identifiera L en fonction de a et de b .

3. Interpréter physiquement les fonctions $F_1^{(G)}(x)$ et $F_1^{(D)}(x)$.
4. Qu'appelle-t-on un niveau d'énergie dégénéré? Est-ce que le niveau fondamental du système total est dégénéré ici?
5. Représenter sur un schéma la fonction $F(x)$ lorsque $\alpha_1 = \beta_1$ et lorsque $\alpha_1 = -\beta_1$. On appellera $F_1^{(S)}(x)$ la fonction d'onde dans le premier cas et $F_1^{(A)}(x)$. Comment qualifie-t-on ces deux états?
6. On introduit maintenant un second électron dans le système pour modéliser la molécule H_2 . Par souci de simplicité, on néglige l'interaction entre les deux électrons. En déduire alors l'énergie du niveau fondamental du système quantique formé des deux électrons. On identifie cette énergie à celle du niveau fondamental de la molécule H_2 .

b. Les orbitales moléculaires

On se place maintenant dans la situation où le potentiel a la forme du double puits illustré par le schéma de droite de la figure (4). On désire étudier les niveaux d'énergie d'un seul électron (dans ce puits) dont on notera génériquement \mathcal{E} les valeurs. En particulier, on s'intéresse à la valeur \mathcal{E}_1 de l'énergie du niveau fondamental. Pour cette raison, on se limitera aux états du système tels que l'énergie $\mathcal{E} < V_0$. Aussi, une fonction d'onde d'énergie \mathcal{E} s'écrit sous la forme $\psi(x, t) = e^{-i\mathcal{E}t/\hbar}F(x)$ où $F(x)$ est interprétée comme l'orbitale moléculaire de notre modèle de H_2^+ . Compte tenu de la symétrie du double puits de potentiel, on cherche des fonctions $F(x)$ symétriques ou anti-symétriques pour décrire les orbitales moléculaires.

1. Interpréter physiquement la forme de l'énergie potentielle (4). Quelle est la raison physique qui explique l'existence de la barrière de potentiel de valeur V_0 au centre du double puits?
2. On commence par chercher les fonctions $F(x)$ symétriques. On peut montrer que, dans ce cas, $F(x)$ prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} F(x) &= A \sin(k(a+x)) & \text{si } -a \leq x \leq -b, \\ F(x) &= B \cosh(Kx) & \text{si } -b \leq x \leq b, \\ F(x) &= A \sin(k(a-x)) & \text{si } b \leq x \leq a. \end{aligned} \quad (24)$$

Dans ces équations, $\cosh(x)$ est la fonction cosinus hyperbolique; A et B sont des constantes de normalisation réelles sur lesquelles on reviendra par la suite; k et K sont des constantes positives qui dépendent de l'énergie \mathcal{E} de l'électron.

- a. En écrivant l'équation de Schrödinger dans chacune des trois situations $-a \leq x \leq -b$, $-b \leq x \leq b$ et $b \leq x \leq a$, montrer que :

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{et} \quad V_0 - \mathcal{E} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}. \quad (25)$$

- b. Comme dans le cas du puits infini, la fonction d'onde doit s'annuler aux points $x = a$ et $x = -a$. Vérifier que cela est bien le cas pour la fonction ci-dessus (24).
- c. Par contre, on ne peut plus dire que $F(b)$ et $F(-b)$ s'annulent puisque la barrière de potentiel a une hauteur finie en ces points. Cette condition est, en fait, remplacée par la continuité de la fonction $F(x)$ et de sa dérivée $F'(x)$ aux points $x = b$ et $x = -b$. Montrer alors que K et k doivent satisfaire la condition

$$\frac{K}{k} \tan(k(a-b)) \tanh(Kb) = -1 \quad (26)$$

pour que la fonction $F(x)$ existe et ne soit pas identiquement nulle. Dans cette équation, $\tanh(x)$ est la fonction tangente hyperbolique.

- d. Cette relation (26) implique la quantification des niveaux d'énergie \mathcal{E} du double puits de potentiel qui sont inférieurs à V_0 . Pour illustrer ce fait, montrer que l'équation (26) permet de retrouver la quantification des niveaux d'énergie du puits de potentiel infini dans la limite où V_0 est infiniment grand.
- e. Lorsque la valeur de V_0 est finie, la détermination des niveaux d'énergie est bien plus complexe que celle des niveaux d'énergie du puits infini. Toutefois, on montre que, lorsque $F(x)$ est symétrique, le niveau d'énergie le plus bas \mathcal{E}_1^S est inférieur à E_1 . Lorsque V_0 est grand devant E_1 mais fini, alors l'énergie du niveau fondamental est donnée par

$$\mathcal{E}_1^S = E_1 - \delta\mathcal{E} \quad \text{où} \quad \delta\mathcal{E} = \frac{2\hbar^2\pi^2}{mKL^3} e^{-2bK}. \quad (27)$$

Dans cette formule $K \simeq \sqrt{2mV_0}/\hbar$. Interpréter cette formule, en particulier le facteur exponentiel dans l'expression de $\delta\mathcal{E}$.

- f. Pour finir l'étude des fonctions symétriques, écrire les deux équations qui permettent de déterminer les valeurs des constantes A et B des solutions (24). On ne cherchera pas à résoudre ce système d'équations.
 - g. On note $\mathcal{F}_1^S(x)$ l'orbitale moléculaire symétrique d'énergie \mathcal{E}_1^S . Représenter schématiquement cette fonction. Comparer son allure à celle de la fonction $F_1^S(x)$ représentée dans la question (2.3.a.5.).
3. En s'inspirant de la solution symétrique (24) des orbitales moléculaires, déterminer la solution générale antisymétrique. On écrira cette solution générale en fonction de deux constantes de normalisation, que l'on notera également A et B , et en fonction des constantes k et K introduites précédemment.
 4. On peut procéder à une étude très similaire au cas précédent pour étudier les orbitales antisymétriques. Cette fois-ci, on arrive à la conclusion que l'énergie \mathcal{E}_1^A du niveau fondamental pour les fonctions d'onde antisymétriques est donnée par

$$\mathcal{E}_1^A = E_1 + \delta\mathcal{E} \quad (28)$$

lorsque V_0 est grand devant E_1 .

- a. Représenter schématiquement l'orbitale antisymétrique $\mathcal{F}_1^A(x)$ de niveau d'énergie \mathcal{E}_1^A . Comparer son allure à celle de la fonction $F_1^A(x)$ représentée dans la question (2.3.a.5.).
- b. Tracer schématiquement sur un même graphique les énergies \mathcal{E}_1^S et \mathcal{E}_1^A en fonction de b , toutes les autres variables étant supposées constantes. Commenter l'allure du graphe obtenu.
- c. Comment aurait-on pu comprendre à partir des représentations des fonctions $\mathcal{F}_1^S(x)$ et $\mathcal{F}_1^A(x)$ que la configuration symétrique est énergétiquement favorisée par rapport à la configuration antisymétrique ?
- d. On introduit maintenant un second électron dans le modèle. On suppose toujours que les deux électrons n'interagissent pas l'un avec l'autre. Les deux électrons peuvent-ils se trouver tous les deux dans l'état d'énergie \mathcal{E}_1^S ? On justifiera la réponse.

- e. Conclure alors que, selon ce modèle simplifié, la molécule de dihydrogène est favorisée énergétiquement par rapport au système formé de deux atomes d'hydrogène sans interaction.
- f. Quelle serait la liaison π et la liaison σ dans ce modèle ?

Ce modèle très simple et très limité d'une molécule permet malgré tout d'illustrer comment les principes de la physique quantique sont essentiels pour comprendre non-seulement les atomes mais aussi les assemblages d'atomes. D'ailleurs, le modèle précédent aurait été tout aussi adapté pour expliquer les changements de conformation de la molécule d'ammoniac NH_3 .

3 De l'onde à la particule : le photon

En 1900, dans un article qui propose une explication théorique originale du rayonnement des corps noirs, Max Planck est le premier à introduire la fameuse constante qui portera dorénavant son nom. C'est à ce moment là que l'idée de quantification apparaît pour la première fois dans l'Histoire même s'il est vrai que Ludwig Boltzmann en avait sûrement eu l'intuition quelques années auparavant dans le contexte de la thermodynamique statistique. En 1905, Albert Einstein propose une théorie de l'effet photoélectrique où la constante de Planck joue un rôle central et où le concept de photon, ce corpuscule de lumière, apparaît. "Ca y est", la physique quantique est lancée et apporte avec elle sa nouvelle vision révolutionnaire du monde microscopique. Mais paradoxalement, si la physique quantique permettra très vite de cerner les propriétés fondamentales des atomes et de la matière, il faudra attendre la seconde moitié du 20ième siècle pour comprendre profondément la nature quantique de la lumière avec la théorie de l'électrodynamique quantique et ainsi de définir précisément la notion de photon. S'en suit alors l'émergence des lasers et la révolution technologique qu'ils vont induire dans le domaine des communications en particulier...

Cette partie a pour objet de revoir comment l'étude des propriétés de la lumière et de ses interactions avec les atomes a conduit à l'idée de quantification. On reviendra dans un premier temps sur la théorie de Planck du corps noir. Ensuite, on étudiera quelques interactions entre la lumière et la matière qui illustrent le caractère corpusculaire de la lumière : on verra alors la théorie d'Einstein sur l'effet photoélectrique, ainsi que l'effet Compton entre un électron et un photon.

3.1 La théorie de Planck du corps noir

Un corps matériel porté à une certaine température émet un rayonnement. Certains corps émettent un spectre continu d'ondes électromagnétiques et, lorsqu'ils sont en équilibre thermique avec le milieu extérieur, leur spectre d'émission (énergie électromagnétique émise par unité de temps et par unité de surface du corps) suit une loi quasiment universelle qui ne dépend pratiquement pas de leur composition physico-chimique. Comme ces corps absorbent en plus toutes les radiations électromagnétiques qui leur arrivent dessus, on les qualifie de corps noir. Pour un corps noir idéal, le spectre d'émission (ou plus précisément la luminance monochromatique qui représente l'énergie émise par unité de temps, par unité de surface du corps noir et par longueur d'onde et qui s'exprime donc en $W.m^{-2}.m^{-1}$) est universel et ne dépend que de la température du corps. Ce spectre est illustré dans la figure (5). En réalité, la notion de corps noir modélise avec précision certains systèmes physiques tels les étoiles, les ampoules à filament ou encore l'Univers dans son ensemble...

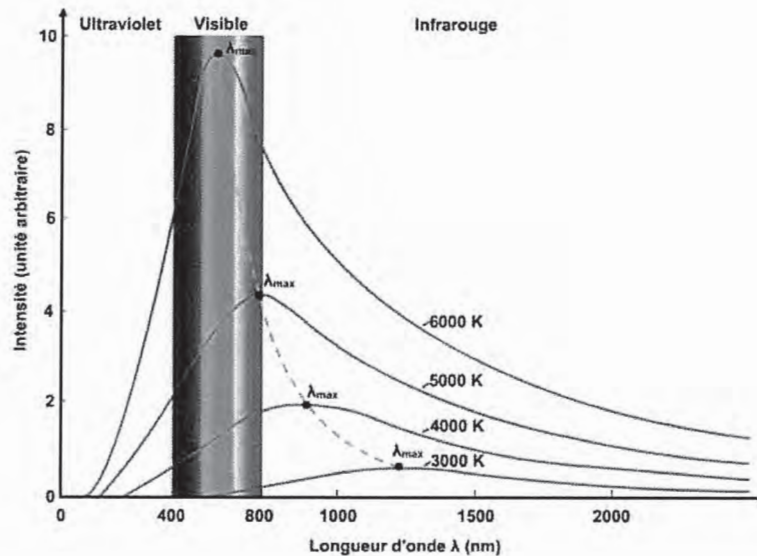


FIG. 5 – Spectre d'émission du corps noir en unités arbitraires en fonction de la longueur d'onde et de la température. A toute température, l'intensité émise est maximale pour une certaine longueur d'onde λ_{max} . Cette longueur d'onde diminue en fonction de la température selon la loi, dite de déplacement de Wien. Sur le schéma est mis en valeur le domaine visible du spectre électromagnétique.

Nous allons montrer ici comment la compréhension théorique du rayonnement d'un corps noir a amené Planck à poser les premières briques de la mécanique quantique.

a. La théorie classique de Rayleigh-Jeans

La théorie classique du corps noir a été élaborée par Rayleigh et Jeans à la fin du 19^{ème} siècle. Elle est fondée sur la théorie ondulatoire de la lumière et s'appuie, de fait, essentiellement sur les équations de Maxwell.

1. On commence par un bref rappel de la théorie ondulatoire des ondes électromagnétiques.
 - a. Rappeler les équations de Maxwell dans un milieu de permittivité ϵ_0 et de perméabilité μ_0 . On notera ρ la densité volumique de charge et \vec{j} le vecteur densité de courant volumique.
 - b. On se place tout d'abord dans le vide (sans charge ni courant).
 - i. Montrer que, dans ce cas, les champs électrique et magnétique satisfont la même équation de propagation dont on notera c la célérité. Rappeler l'expression de la célérité en fonction de la permittivité ϵ_0 et de la perméabilité μ_0 du vide.
 - ii. On suppose que le champ électromagnétique est une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω polarisée rectilignement. Définir les différents qualificatifs de cette onde. On s'appuiera sur un schéma.
 - iii. On munit l'espace d'un système de coordonnées cartésiennes telle que \vec{e}_z désigne le sens de propagation de l'onde et \vec{e}_x la direction de polarisation du champ électrique. Ecrire la solution générale de l'onde définie dans la question précédente en notation complexe.

- c. L'onde précédente se propage dans le vide et rencontre ensuite un milieu conducteur ohmique comme illustré sur la figure (6). Il en résulte une onde transmise dans le milieu conducteur et une onde réfléchie qu'on n'étudiera pas ici. Le milieu conducteur est non-chargé mais, en présence d'un champ électrique \vec{E} , il est le siège de courants ohmiques dont le vecteur densité de courant est donné par la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ où σ est la conductivité du milieu.

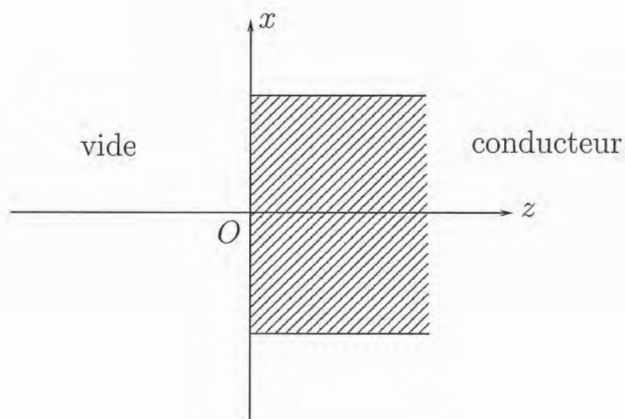


FIG. 6 – Une onde électromagnétique polarisée rectilignement se propage dans le vide dans le sens des z croissants et rencontre à partir de $z = 0$ un milieu conducteur ohmique.

- i. Justifier que le champ électrique, dans le milieu ohmique, s'écrit nécessairement, en notation complexe, sous la forme $\vec{E} = f(z)e^{-i\omega t}\vec{e}_x$ où $f(z)$ est une fonction qui ne dépend que de la variable z et i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.
- ii. En partant des équations de Maxwell, montrer que $f(z)$ satisfait l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} + i\mu_0\omega\sigma \right) f(z) = 0. \quad (29)$$

- iii. Déterminer la solution de cette équation sous la forme

$$f(z) = Ce^{ikz} \quad (30)$$

où C est une constante d'intégration alors que k dépend en particulier de la pulsation ω de l'onde.

- iv. Montrer que si la pulsation ω est petite devant une certaine pulsation ω_c , que l'on déterminera et dont on donnera un ordre de grandeur, alors k peut prendre les valeurs suivantes :

$$k = \pm \frac{1+i}{\delta} \quad (31)$$

où δ est une grandeur que l'on déterminera. Ces deux solutions sont-elles physiquement acceptables si on suppose que le milieu ohmique s'étend de $z = 0$ à $z = +\infty$?

- v. Ecrire alors la solution générale pour le champ électrique \vec{E} dans le milieu ohmique. Interpréter physiquement cette solution et donner en particulier un sens physique à la grandeur δ . Quel nom donne-t-on à la grandeur δ en général ?
- vi. Comment pourrait-on déterminer la constante C dans (30) ?
- d. Un conducteur parfait est caractérisé par une conductivité électrique infinie.
 - i. A la lumière des questions précédentes, montrer alors que le champ électrique est nécessairement nul à l'intérieur d'un tel conducteur.
 - ii. Que se passe-t-il lorsqu'une onde, se propageant dans le vide, arrive sur un conducteur parfait comme dans le cas de la figure (6) ?
 - iii. Rappeler les relations de passage pour le champ électrique à une interface entre deux milieux.
 - iv. Quelle est alors la particularité du champ électrique en un point à l'extérieur du conducteur parfait mais très proche de sa frontière ?
- 2. Venons en maintenant à l'approche de Rayleigh et Jeans pour comprendre le rayonnement du corps noir. Ils ont modélisé le corps noir comme une cavité parallélépipédique dont les parois sont des conducteurs parfaits et à l'intérieur de laquelle règne le vide. Ceci est illustré dans la figure (7). L'idée du modèle est que, si la cavité est percée d'un trou très petit devant les dimensions de la cavité, tout rayon qui y entre subit un grand nombre de réflexions et reste dans la cavité, avant de sortir éventuellement au bout d'un certain temps. Dans ce sens, la cavité "absorbe" tous les rayons qui y pénètrent et émet un rayonnement. Elle se comporte comme un corps noir.

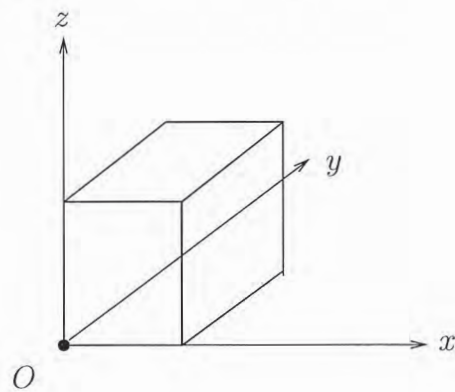


FIG. 7 – La cavité parallélépipédique a pour dimensions a dans la direction (Ox) , b dans la direction (Oy) et d dans la direction (Oz) .

On munit l'espace d'un repère de coordonnées cartésiennes décrit sur le schéma (7). On notera $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base de vecteurs associée.

- a. Pour simplifier le problème, on considère tout d'abord une onde électromagnétique, de pulsation ω , "unidimensionnelle" qui ne dépend que de la composante spatiale x en plus de la composante de temps t . Cette onde est supposée en outre polarisée rectilignement et son champ électrique s'écrit, en notation complexe, sous la forme :

$$\vec{E} = E(x) e^{-i\omega t} \vec{u} \tag{32}$$

où \vec{u} est un vecteur unitaire. Quelle équation de Maxwell permet de dire que soit \vec{u} est perpendiculaire à \vec{e}_x soit $E(x)$ est une fonction constante ? Pour quelle raison la dernière condition n'est-elle pas acceptable ?

- b. En partant de l'équation de propagation du champ électrique, écrire l'équation différentielle satisfaite par $E(x)$. En déduire la solution générale pour la fonction $E(x)$.
- c. Quelles sont les conditions aux limites (aux points $x = 0$ et $x = a$) que doit satisfaire la fonction $E(x)$? On justifiera clairement la réponse.
- d. En déduire alors que les fréquences $\nu = \omega/(2\pi)$ de l'onde (32) permises dans la cavité sont nécessairement quantifiées dans le sens où ses seules valeurs permises sont de la forme $\nu_n = n\frac{c}{2a}$, c étant la célérité de la lumière dans le vide.
- e. On introduit la fonction $N(\nu)$ telle que $N(\nu)d\nu$ représente le nombre de fréquences permises dans la cavité, pour les ondes du type (32), dont la valeur est comprise entre ν et $\nu + d\nu$. Calculer $N(\nu)$ et montrer que cette fonction s'écrit sous la forme :

$$N(\nu) = 2 \times \frac{2a}{c}. \quad (33)$$

On justifiera tout particulièrement le facteur 2 dans cette expression.

- f. Rayleigh et Jeans ont effectué une analyse très similaire à la précédente en ne considérant pas uniquement les ondes "unidimensionnelles" (32) mais en tenant compte de la structure tridimensionnelle de la cavité. Ils ont montré que, dans ce cas, la fonction $N(\nu)$ prend la forme suivante :

$$N(\nu) = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 \quad (34)$$

où V est le volume de la cavité. Retrouver cette formule et vérifier son homogénéité.

- g. Ils ont ensuite utilisé des résultats de thermodynamique statistique classique. Ils savaient, depuis les travaux de Boltzmann, que lorsqu'un système thermodynamique classique est en équilibre à la température T , la loi de l'équipartition de l'énergie s'applique. Plus précisément, un système (à l'équilibre à la température T) composé d'un très grand nombre de degrés de liberté sans interaction les uns avec les autres est tel que l'énergie moyenne \bar{u} par degré de liberté quadratique du système est donnée par $\bar{u} = \frac{1}{2}k_B T$ où k_B est la constante de Boltzmann. Qu'est-ce qu'un degré de liberté quadratique ? Combien de degrés de liberté quadratiques possède un oscillateur harmonique unidimensionnel ?
- h. Dans le cas de la cavité électromagnétique, les degrés de liberté sont ceux des ondes électromagnétiques qui sont effectivement en grand nombre. En outre, chaque onde de fréquence ν du type (32) dans une direction \vec{u} donnée, a une dynamique analogue à celle d'un oscillateur harmonique unidimensionnel. En déduire l'énergie moyenne associée à une telle onde.
- i. En déduire la densité volumique d'énergie par unité de fréquence $\rho_T(\nu)$ à l'intérieur de la cavité définie par le fait que $\rho_T(\nu)d\nu$ est l'énergie moyenne par unité de volume des ondes de la cavité en équilibre à la température T et dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu + d\nu$.

- j. Tracer schématiquement $\rho_T(\nu)$ en fonction de ν pour une température T fixée arbitrairement. En comparant les résultats théoriques de Rayleigh-Jeans avec les résultats expérimentaux illustrés sur la figure (8), le physicien autrichien Paul Ehrenfest a employé l'expression de "catastrophe ultraviolette". Pourquoi ?

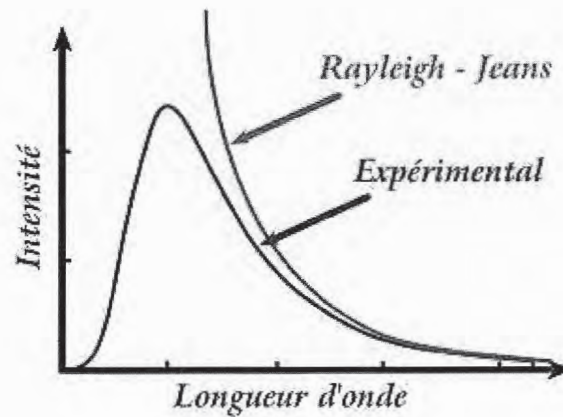


FIG. 8 – Comparaison entre la courbe théorique selon Rayleigh-Jeans et la courbe expérimentale du spectre du corps noir en fonction de la longueur d'onde. Les unités sont arbitraires.

b. La naissance de la constante de Planck

Max Planck a compris en 1900 que la raison de la catastrophe ultraviolette résidait fondamentalement dans l'attribution d'une énergie moyenne $\bar{u} = k_B T$ à chaque onde de fréquence ν dans la cavité. Or si cette loi semblait être vérifiée pour les "grandes" longueurs d'onde, elle paraissait ne plus pouvoir s'appliquer aux "petites" longueurs d'onde.

Or la loi de l'équipartition de l'énergie pour les systèmes thermodynamiques classiques s'appuie sur deux idées : la loi de distribution des énergies de Maxwell-Boltzmann et le fait que l'énergie des degrés de liberté microscopiques du système est une grandeur continue. De façon surprenante, Planck n'a pas remis en question la première idée mais il a supposé que l'énergie des degrés de liberté microscopiques était une grandeur discrète. Même si l'Histoire montrera un peu plus tard que son approche n'est pas totalement juste, cette idée géniale vaudra à Planck le prix Nobel de physique en 1918 et sera le point de départ de l'une des aventures scientifiques les plus fabuleuses du siècle passé.

1. On considère alors la cavité électromagnétique comme un système thermodynamique avec un grand nombre de degrés de liberté (qui sont les ondes électromagnétiques de fréquence ν) sans interaction les uns avec les autres en équilibre à la température T . On suppose que l'énergie d'un degré de liberté microscopique (c'est à dire d'une onde électromagnétique de fréquence ν) est maintenant une grandeur discrète et ne peut prendre que les valeurs $e_n = nh\nu$ où h est une constante et n est un nombre entier quelconque, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.
 - a. Selon la loi de distribution des énergies de Maxwell-Boltzmann, la probabilité de trouver un degré de liberté ayant une fréquence ν avec une énergie e_n est donnée par $P(e_n) = Z^{-1} \exp(-\frac{e_n}{k_B T})$ où Z est une constante de normalisation. Quelle condition doit satisfaire la fonction $P(e_n)$ pour qu'elle définisse une loi de probabilité ? En déduire alors la valeur de Z .

- b. Définir l'énergie moyenne $\bar{u}(\nu)$ d'un degré de liberté de fréquence ν , montrer qu'elle dépend maintenant de ν et que son expression est donnée :

$$\bar{u}(\nu) = \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T}) - 1}. \quad (35)$$

- c. En déduire que maintenant la densité volumique d'énergie par unité de fréquence $\rho_T(\nu)$ à l'intérieur de la cavité, qui a été définie dans la question (3.1.a.2.h) est donnée par la formule :

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T}) - 1}. \quad (36)$$

Le spectre d'émission du corps noir est directement lié à $\rho_T(\nu)$: la puissance émise par unité de surface du corps noir (à la température T) entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$ est donnée par $\Phi_T(\nu)d\nu$ où $\Phi_T(\nu) = \frac{c}{4}\rho_T(\nu)$. Cette formule permet de reproduire avec une efficacité exceptionnelle la courbe expérimentale du spectre du corps noir lorsque la constante h est fixée à une valeur proche de $h \simeq 6,63 \times 10^{-34}$ J.s.

2. Nous allons maintenant étudier quelques propriétés du spectre du corps noir.
- Montrer que lorsque la fréquence ν est "faible", la formule de Planck (36) redonne celle obtenue par Rayleigh et Jeans. On précisera ce que signifie fréquence "faible".
 - Intégrer $\Phi_T(\nu)$ sur les fréquences pour montrer que la puissance surfacique par unité de surface que peut émettre le corps noir est proportionnelle à T^4 . On ne cherchera pas à calculer explicitement le coefficient de proportionnalité.
 - D'après la courbe du spectre du corps noir, illustrée sur la figure (5), il existe une longueur d'onde $\lambda_{max}(T)$, qui dépend de la température, pour laquelle le flux émis par le corps noir est maximal. La fonction $\lambda_{max}(T)$ est appelée la loi de déplacement de Wien.
 - Afin d'établir la loi de Wien, déterminer la fonction $M(\lambda)$ telle que la puissance surfacique émise par le corps noir entre les longueurs d'onde λ et $\lambda + d\lambda$ est donnée par $M(\lambda)d\lambda$.
 - Etablir alors l'équation que doit satisfaire λ_{max} .
 - Sachant que l'équation $e^{-x} + 0,2x - 1 = 0$ n'admet qu'une unique solution positive qui est approximativement donnée par $x \simeq 4,9651$, déterminer la loi de Wien et montrer qu'elle s'écrit sous la forme :

$$\lambda_{max}(T) = \frac{C}{T} \quad (37)$$

où $C \simeq 2,898 \times 10^{-3}$ m.K. Cette loi est-elle compatible avec la courbe $\lambda_{max}(T)$ représentée sur la figure (5) ?

- d. En 1964, Arno Penzias et Robert Wilson ont découvert de façon fortuite que dans tout l'Univers est présent, de façon quasi-homogène et isotrope, un rayonnement de type corps noir qui serait à la température très faible $T = 2,728$ K. Quelle est la longueur d'onde dans le vide et la fréquence typique de ce rayonnement ? Connaissez-vous l'origine de ce rayonnement dont la découverte a valu aux deux radio-astronomes le prix Nobel de physique en 1978 ?

3.2 Les interactions entre le photon et la matière

Planck n'a jamais eu besoin d'introduire l'hypothèse du photon pour comprendre le rayonnement d'un corps noir. C'est Einstein qui l'a introduite dans son modèle de l'effet photoélectrique en 1905, celui même qui lui vaudra le prix Nobel de physique en 1921. Plus tard, Compton utilisera l'hypothèse d'Einstein pour interpréter le fameux effet qui portera son nom et prouvera ainsi la dualité onde-corpuscule pour la lumière.

Cette partie a pour but de comprendre comment les deux expériences historiques, que sont l'effet photoélectrique et l'effet Compton, ont permis respectivement d'introduire l'hypothèse de l'existence du photon et de la confirmer.

a. L'effet photoélectrique : l'émergence du photon

L'effet photoélectrique consiste en l'émission d'électrons d'un matériau soumis à une irradiation lumineuse. Pour le mettre en évidence, on a mis en place l'expérience illustrée schématiquement sur la figure (9).

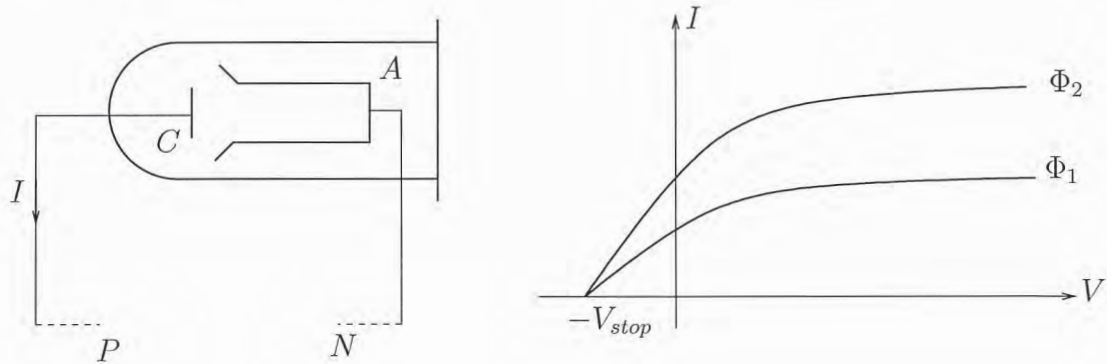


FIG. 9 – Pour mettre en évidence l'effet photoélectrique, on dispose dans une ampoule à vide une anode A et une cathode C soumises à une différence de potentiel $V = V_A - V_C$ où V_C et V_A sont les potentiels respectifs de la cathode et de l'anode. On éclaire la cathode par une lumière ultraviolette supposée monochromatique de fréquence ν fixée. La forme de l'anode est telle que cette dernière collecte le maximum d'électrons émis par la cathode. On observe alors un courant électrique I qui dépend de la différence de potentiel V et de l'intensité lumineuse Φ . On a représenté ici l'intensité I en fonction de V pour deux intensités lumineuses différentes $\Phi_1 < \Phi_2$.

1. Proposer un circuit électrique simple entre P et N utilisant un générateur de tension constante et des résistances qui permette simplement de faire varier la différence de potentiel V entre l'anode et la cathode.
2. On observe d'abord que l'intensité du courant sature lorsque V augmente. Cette intensité de saturation est proportionnelle à l'intensité lumineuse Φ . Interpréter cette observation.
3. On observe ensuite que même si la différence de potentiel V est négative, mais supérieure à une valeur $-V_{stop}$ qui est le "potentiel d'arrêt", un courant est émis. Donner une explication de ce phénomène. En déduire que l'énergie cinétique maximale E_c^{max} d'un électron émis est donnée par $E_c^{max} = eV_{stop}$ où e est la charge élémentaire.

4. En 1914, le physicien américain Robert Millikan étudia expérimentalement la dépendance de V_{stop} en fonction de la fréquence ν de la radiation lumineuse qui éclaire la cathode. Il constate qu'en dessous d'une certaine fréquence ν_0 , l'effet photoélectrique est inexistant alors que si $\nu > \nu_0$ on observe un effet photoélectrique dont le potentiel d'arrêt augmente de façon affine avec ν . Cette expérience très difficile à mettre en œuvre à cette époque vaudra à Millikan le prix de Nobel de physique en 1924. En quoi est-ce que la théorie classique de l'électromagnétisme est mise à mal par les résultats de cette expérience ?
5. En 1929, Lawrence et Beams montrent que l'intervalle de temps séparant l'illumination de la cathode et l'émission de l'électron est inférieure à 10^{-9} s. Or, toute modélisation de l'effet photoélectrique qui s'appuierait sur la théorie classique de l'électromagnétisme, ne pourrait aboutir à un intervalle de temps si court. Pour illustrer ce fait, étudions le modèle suivant. On dispose une source lumineuse à une distance $d = 1$ m d'une feuille métallique qui est le siège d'un effet photoélectrique. On prendra comme métal le potassium et la source lumineuse émet de façon isotrope et est supposée avoir une puissance P de 1 W. On fait l'hypothèse qu'un électron est éjecté par effet photoélectrique lorsque l'énergie lumineuse qu'il a absorbé (dans un sens que l'on va définir) est supérieure à l'énergie d'extraction du potassium.
 - a. Ainsi la source lumineuse éclaire la plaque et on fait l'hypothèse que l'électron absorbe l'énergie lumineuse provenant de la lumière qui éclaire un cercle de rayon r qui est de l'ordre de grandeur du rayon atomique. En déduire un ordre de grandeur de l'énergie absorbée par l'électron par unité de temps.
 - b. Sachant que que l'énergie d'extraction du potassium est de 2,1 eV, donner un ordre de grandeur du temps qu'il faudrait pour que l'électron soit éjecté.
 - c. Discuter le résultat obtenu et conclure quant à la pertinence de ce modèle classique de l'effet photoélectrique.
6. En 1905, Einstein fait l'hypothèse que le champ électromagnétique est quantifié dans le sens où il admet une description corpusculaire. Plus précisément, il suppose que l'émission et l'absorption d'un rayonnement lumineux de fréquence ν se fait par "quanta" (le terme de photon est apparu plus tard) d'énergie $E = h\nu$ où h est la constante que Planck avait introduite dans le modèle du corps noir. Il ajoutera que le photon est localisé dans l'espace et qu'il n'admet aucune extension spatiale. Cela est suffisant pour expliquer très simplement les différents résultats expérimentaux présentés ci-dessus.
 - a. Si on note W l'énergie d'extraction d'un électron, déterminer l'énergie cinétique E_c d'un électron éjecté par effet photoélectrique.
 - b. En déduire la fréquence ν_0 introduite dans la question (3.2.a.4.) en fonction de W en particulier.
 - c. Montrer que, dans le modèle d'Einstein, le potentiel d'arrêt V_{stop} est bien une fonction affine de la fréquence, comme le prouva quelques années plus tard Millikan.
 - d. Quelle caractéristique du photon permet d'expliquer le si court intervalle de temps entre l'illumination et l'éjection de l'électron mesuré par Lawrence et Beams ?

Dans son expérience, Millikan a vérifié la théorie d'Einstein de l'effet photoélectrique avec une précision remarquable. Il a en particulier établi que la constante h qui apparaît dans le modèle d'Einstein est bien égale à la constante que Planck a introduite pour décrire le rayonnement du corps noir.

b. L'effet Compton : la confirmation du photon

En 1926, Wentzel et Beck ont néanmoins montré qu'il était possible de retrouver théoriquement toutes les caractéristiques de l'effet photoélectrique sans invoquer l'idée de photon. Dans ce sens, le modèle d'Einstein ne constitue pas une preuve irréfutable de l'existence du photon. Mais, en 1923, le physicien américain Arthur Compton réalisa une expérience de diffusion d'ondes électromagnétiques par une feuille de graphite, ce qui permit de valider définitivement la notion de dualité onde-corpuscule pour la lumière. Il fut récompensé en 1927 par le prix Nobel de physique pour cette découverte.

L'expérience de Compton consistait à envoyer un faisceau de rayons X monochromatiques de longueur d'onde λ sur une plaque de graphite. Il observa que certains rayons X diffusés par la plaque avaient une longueur d'onde λ' supérieure à λ . L'étude précise de ce phénomène montra que λ' dépendait de la direction des rayons diffusés mais qu'elle était indépendante de la nature du matériau (graphite ou autre) utilisé pour la plaque.

1. Ces observations peuvent-elle être interprétées dans le cadre de la théorie de la diffraction de la lumière ? On rappellera succinctement ce qu'est la diffraction et on en donnera un exemple concret. On soulignera dans quelles conditions il est possible d'observer le phénomène de diffraction.
2. Pour interpréter ses résultats, Compton a eu besoin d'utiliser l'hypothèse de l'existence du photon, à savoir que les ondes électromagnétiques sont fondamentalement des corpuscules. Chaque photon, que l'on notera génériquement γ , possède une énergie E_γ et une quantité de mouvement (ou impulsion) \vec{p}_γ . Rappeler les relations qui permettent de relier les caractéristiques corpusculaires (E_γ, \vec{p}_γ) aux caractéristiques ondulatoires des ondes électromagnétiques.
3. Il a ensuite supposé que la diffusion observée était en fait le résultat d'une "collision" entre un photon et un électron qui est schématisée sur la figure (10). Avant la collision, l'électron est supposé être au repos et le photon γ se déplace dans la direction \vec{e}_x . Après la collision, l'électron est en mouvement avec une impulsion \vec{p} alors qu'un photon γ' est émis dans une direction \vec{u} qui forme un angle θ avec la direction incidente \vec{e}_x .

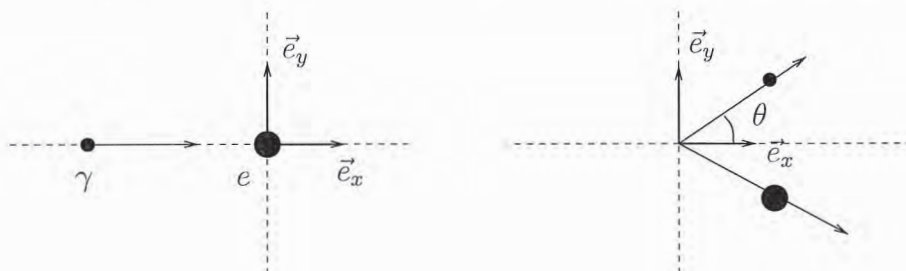


FIG. 10 – L'effet Compton est interprété comme le résultat de la collision entre un photon et un électron. La collision est représentée ici dans le référentiel où l'électron e est au repos avant la collision. La collision est plane et on munit le plan d'un système de coordonnées cartésiennes centré sur la position initiale de l'électron ; on note (\vec{e}_x, \vec{e}_y) la base de vecteurs. Après la collision, l'électron a une impulsion \vec{p}_f et un photon γ' est émis dans une direction \vec{u} qui forme un angle θ avec la direction incidente \vec{e}_x du photon γ .

- a. Pourquoi la collision entre le photon et l'électron doit nécessairement être étudiée dans le cadre de la relativité restreinte ?
- b. On rappelle que l'énergie totale E d'une particule relativiste de masse m ayant une impulsion \vec{p} est donnée par la relation $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ où c est la célérité de la lumière dans le vide. Comment définit-on l'énergie cinétique T d'une particule relativiste ? Montrer que T est approximativement donnée par l'expression classique de l'énergie cinétique de la particule dans la limite non-relativiste. On s'attachera à définir la limite non-relativiste.
- c. Pour étudier cette collision, on se place dans le référentiel où l'électron est au repos avant la collision.
 - i. Donner les grandeurs conservées lors de ce processus.
 - ii. Donner les expressions des énergies totales E_i et E_f de l'électron avant et après la collision en fonction de la masse de l'électron m_e et de l'impulsion \vec{p}_f après la collision.
 - iii. En déduire que l'énergie de l'électron E_f et la norme de son impulsion p_f après la collision satisfont les relations suivantes :

$$E_f = m_e c^2 + h(\nu - \nu'), \quad p_f^2 = \frac{h^2}{c^2} (\nu \vec{e}_x - \nu' \vec{u})^2. \quad (38)$$

- iv. En déduire que λ' est donnée la relation suivante

$$\lambda' - \lambda = \Lambda_c (1 - \cos \theta) \quad (39)$$

où la longueur d'onde Compton de l'électron Λ_c est une constante que l'on déterminera.

- d. Calculer Λ_c . En déduire pourquoi Compton a travaillé avec des rayons X pour observer cet effet.
4. La figure (11) donne les spectres relevés lors de l'expérience de Compton pour 4 angles de diffusion différents. Lorsque l'angle de diffusion θ est important, on observe très nettement deux pics de diffusion mais ces deux pics existent lorsque θ est plus faible même s'ils sont plus difficiles à distinguer.
 - a. Interpréter la présence des deux pics de diffusion.
 - b. Pourquoi les pics ont une largeur et ne sont pas infiniment minces comme le suggère la formule (39) ?
 - c. Vérifier enfin que les résultats expérimentaux obtenus par Compton sont bien compatibles avec la formule (39).
 5. L'expérience de Compton a joué un rôle capital dans l'histoire de la mécanique quantique puisqu'elle a permis la première vérification de la dualité onde-corpuscule. Elle a en fait ouvert une porte bien plus grande puisqu'elle illustre la compatibilité entre la mécanique quantique et la relativité restreinte ; dans la formule (39) apparaissent à la fois c et h . Les physiciens de la seconde moitié du 20ème siècle vont comprendre que c'est en effet dans le cadre de l'unification entre la mécanique quantique et la relativité restreinte qu'on peut décrire, comprendre et prévoir le monde de l'infiniment petit. Ainsi a été proposé dans les années 1970 le modèle standard de la physique des particules qui permet de classer toutes les particules et toutes les interactions présentes dans l'Univers.

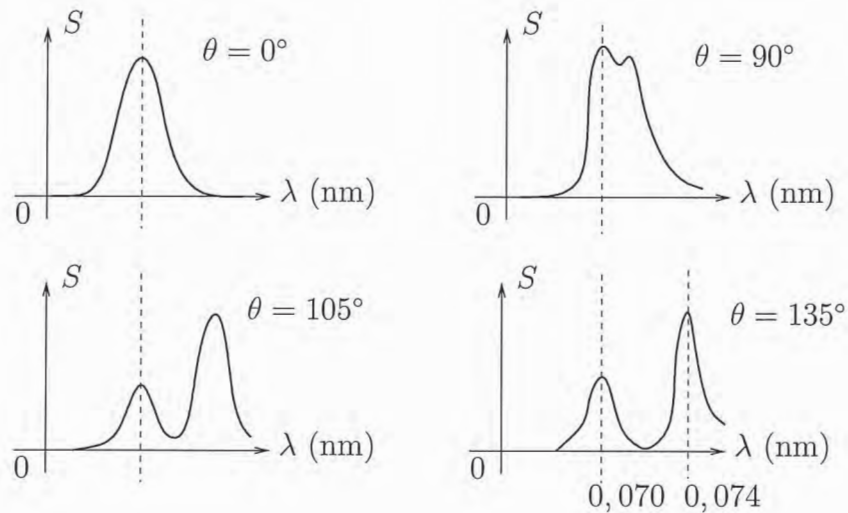


FIG. 11 – Représentation schématique des résultats expérimentaux obtenus par Compton lors de son expérience de diffusion de rayons X sur du graphite. Ces graphes représentent pour différentes valeurs de θ le spectre de diffusion $S(\lambda)$; les unités de l'énergie diffusée sont arbitraires. On observe deux pics et le premier est toujours centré sur la même valeur $\lambda = 0,070$ nm.

- Le modèle standard distingue les particules “matérielles” de celles qui véhiculent les interactions. Connaissez-vous le nombre de particules élémentaires “matérielles” présentes dans tout l'Univers que prévoit le modèle standard? Quel est le nombre et le nom des interactions fondamentales entre ces particules?
- Quel est le nombre de particules élémentaires “matérielles” qui permettent de constituer tous les atomes du tableau périodique des éléments? Quelles sont-elles?

La découverte expérimentale très récente du boson de Higgs est un des succès les plus marquants de la mécanique quantique.