CONCOURS AVENIR 2014 – CORRIGE COMPLET AVEC JUSTIFICATIONS

SECTION 1 : LES COMPLEXES

1. Le nombre complexe i est :

a. nul
b. négatif
c. positif
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

Un nombre complexe n'a pas de signe car il comporte une partie « imaginaire »
De plus, ici, le nombre complexe « i » est un imaginaire pur !

L'équation $z^3 + z = 0$ admet

2. Dans $\mathbb{R}$:

a. 0 solution
b. 1 solution
c. 2 solutions
d. 3 solutions

3. Dans $\mathbb{C}$:

a. 0 solution
b. 1 solution
c. 2 solutions
d. 3 solutions

Résolvons cette équation :

$z^3 + z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 + 1) = 0$
$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z^2 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z^2 = -1 = i^2$
$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z = i$ ou $z = -i$

$0 \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{C}$ et $(-i) \in \mathbb{C}$

Cette équation admet 1 solution dans $\mathbb{R}$ et
3 solution dans $\mathbb{C}$ (attention, en effet, car $0 \in \mathbb{C}$!!!)

Soient, dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe, les points A ; B ; C et D d'affixes respectives : 4+i ; -2-i ; 2+3i et 1

4. Le triangle *ABC* est :

a. rectangle en A
b. rectangle en B
c. rectangle en C
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On a $AB^2 = |z_B - z_A|^2 = |-2 - i - (4 + i)|^2 = |-2 - i - 4 - i|^2 = |-6 - 2i|^2$
$= \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2}^{\,2} = (-6)^2 + (-2)^2 = 36 + 4 = 40$
$AC^2 = |z_C - z_A|^2 = |2 + 3i - (4 + i)|^2 = |2 + 3i - 4 - i|^2 = |-2 + 2i|^2$
$= \sqrt{(-2)^2 + 2^2}^{\,2} = (-2)^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$
$BC^2 = |z_C - z_B|^2 = |2 + 3i - (-2 - i)|^2 = |2 + 3i + 2 + i|^2 = |4 + 4i|^2$
$= \sqrt{4^2 + 4^2}^{\,2} = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$

On constate que $AC^2 + BC^2 = 8 + 32 = 40 = AB^2$
Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès ABC est rectangle en C

5. Un argument de $\left(i\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right)$ correspond à une mesure de l'angle orienté :

a. $(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AB})$
b. $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$
c. $\frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$
d. $\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$

On a $Arg\left(i\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) = Arg(i) + Arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} + (-(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}))$

Donc $Arg\left(i\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) = \frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$

6. **Le module de $\left(i\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right)$ correspond à :**

a. $i\frac{AB}{CD}$

b. $i\frac{CD}{AB}$

c. $\frac{AB}{CD}$

d. $\frac{CD}{AB}$

$$\left|i\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right| = |i| \times \left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right| = 1 \times \frac{|z_A - z_B|}{|z_C - z_D|}$$
$$= \frac{|z_A - z_B|}{|z_C - z_D|} = \frac{AB}{CD}$$

7. **L'écriture algébrique de $i\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}$ est :**

a. $\frac{9}{5} + \frac{3}{5}i$

b. $\frac{8}{5} + \frac{6}{5}i$

c. $-2 + 2i$

d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

On a $i\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} = i\frac{4+i-(-2-i)}{2+3i-1} = i\frac{4+i+2+i}{1+3i} = i\frac{6+2i}{1+3i} = \frac{i(6+2i)}{1+3i} = \frac{6i+2i^2}{1+3i} = \frac{6i+2\times(-1)}{1+3i} = \frac{6i-2}{1+3i}$

Donc $i\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} = \frac{(6i-2)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{6i-2-18i^2+6i}{1^2-(3i)^2} = \frac{6i-2-18\times(-1)+6i}{1-9i^2} = \frac{6i-2+18+6i}{1-9\times(-1)} = \frac{16+12i}{1+9} = \frac{16+12i}{10}$

Donc $i\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} = \frac{16}{10} + \frac{12}{10}i = \frac{8}{5} + \frac{6}{5}i$

8. **Le point *D* appartient au segment :**

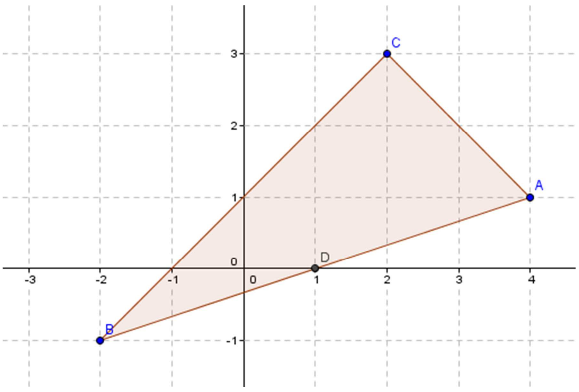
a. $[AB]$

b. $[AC]$

c. $[BC]$

d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

On peut conjecturer une réponse à l'aide d'un dessin (tracer rapidement à la main un repère sans être trop précis) Mais attention, il s'agit bien d'une conjecture, et pas de la réponse ! Cela nous permet uniquement de gagner du temps et de ne pas faire tous les essais avec tous les segments.



On peut conjecturer que D ∈ [AB]

Démontrons cette conjecture.

On a, d'après leurs affixes, A (4 ; 1) B (-2 ; -1) C (2 ; 3) et D (1 ; 0) dans le repère (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$)

Donc $\overrightarrow{AB}$ (-2 – 4 ; -1 – 1) soit $\overrightarrow{AB}$ (-6 ; -2)

Et $\overrightarrow{AD}$ (1 – 4 ; 0 – 1) soit $\overrightarrow{AD}$ (-3 ; -1)

Supposons que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires. Alors il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AD}$ = k $\overrightarrow{AB}$

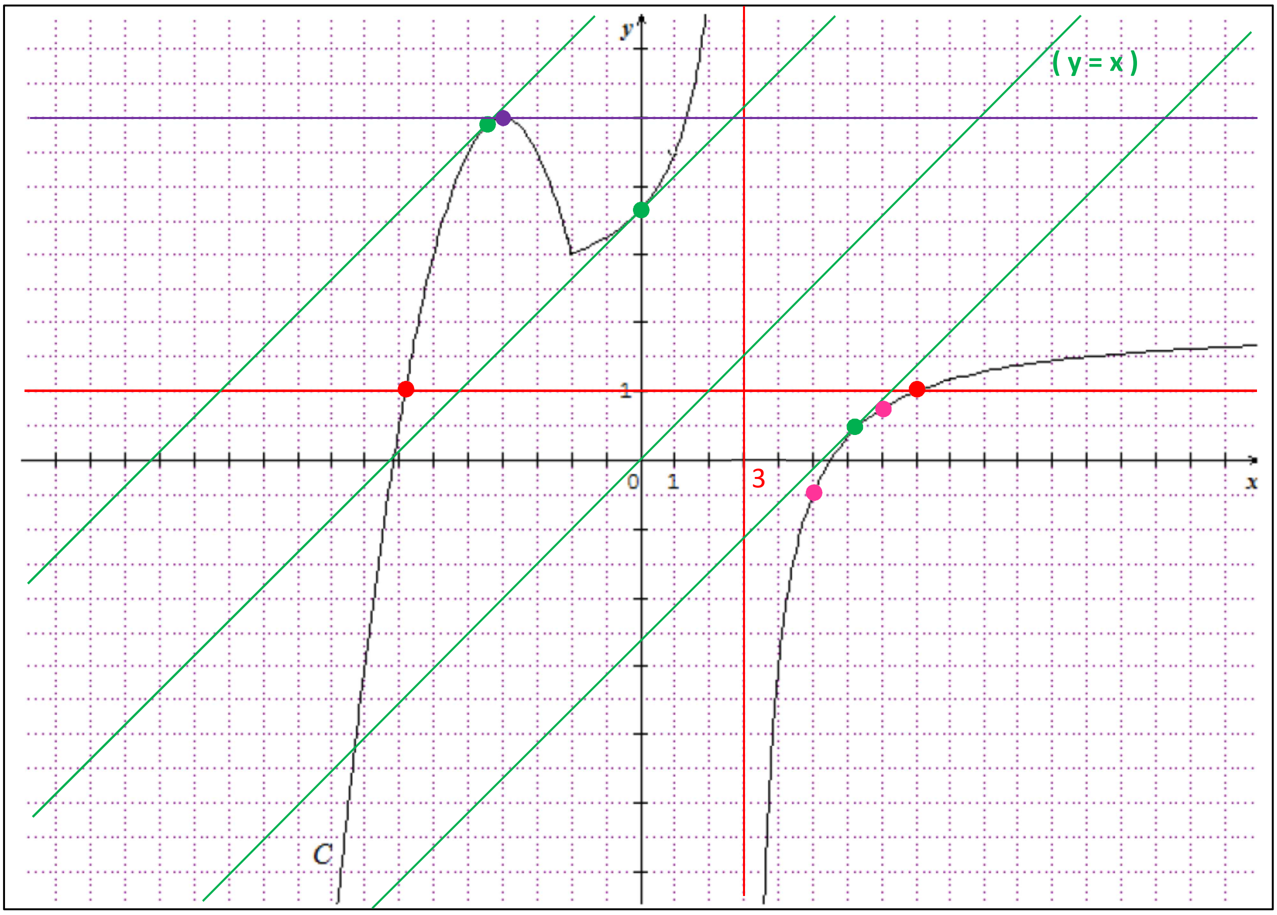
Donc d'après leurs coordonnées, $\begin{cases} -3 = -6k \\ -1 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \\ k = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

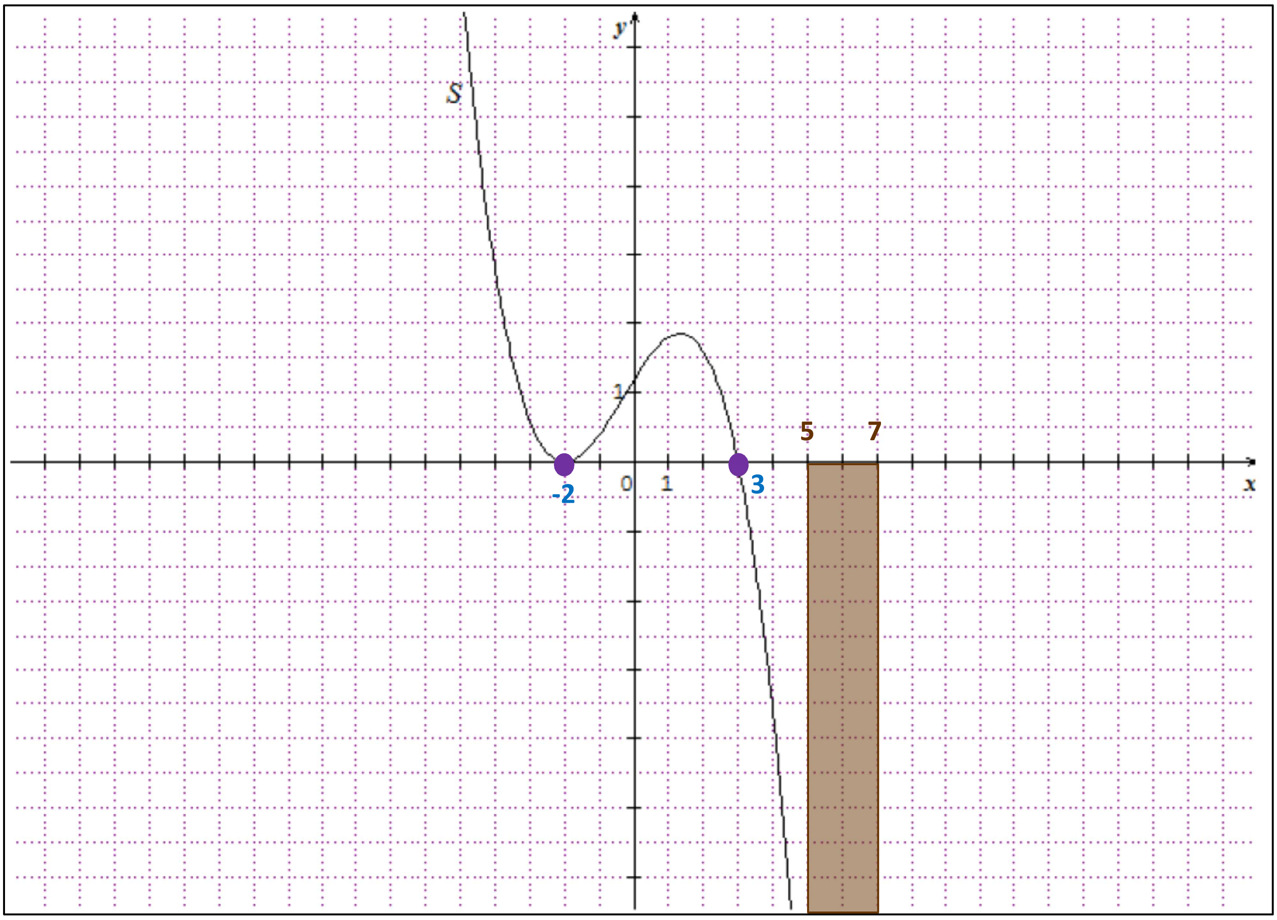
On a donc bien $\overrightarrow{AB}$ = $\frac{1}{2}$ $\overrightarrow{AD}$

Donc D ∈ [AB]

SECTION 2 : INTERPRETATION GRAPHIQUE

Ci-dessous les courbes C et S représentant respectivement les fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ - {3} et g' définie sur $\mathbb{R}$





9. $\lim_{x \to 3} f(x)$ **est :**

a. $-\infty$
b. $+\infty$
c. un réel
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

On a d'après le graphique $\lim_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = -\infty \neq \lim_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x)$

Donc la fonction f n'est pas continue en x = 3 et donc $\lim_{x \to 3} f(x)$ n'est pas définie !

10. **Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ est :**

a. 0
b. 1
c. 2
d. 3

D'après le graphique, l'équation f(x) = 1 admet 2 solutions (les 2 points rouges indiqués sur la courbe)

<u>Remarque importante</u> : on n'a une représentation graphique de la fonction f que sur l'intervalle [-18 ; 18] Rien ne prouve que la fonction f se comporte différemment en-dehors de cet intervalle, et que, peut-être, cette équation présente plus de solutions. L'énoncé devrait donc préciser « Sur l'intervalle [-18 ; 18], le nombre de solutions de l'équation f(x) = 1 est : »

11. **Le nombre de solutions de l'équation $f'(x) = 1$ est :**

a. 0
b. 1
c. 2
d. 3

f'(x) = 1 signifie que la pente de la tangente à la courbe C au point d'abscisse x est égale à 1.
La question est subtile, car il faut ici chercher tous les points de la courbe C où c'est le cas.
Cela veut dire que la tangente à la courbe a un coefficient directeur de 1, et donc qu'elle est parallèle à la droite d'équation (y = x)
On cherche donc ces points en déplaçant une règle parallèlement à la droite d'équation (y = x)
On obtient ainsi 3 points (les 3 points verts indiqués sur la courbe)
L'équation f'(x) = 1 admet donc 3 solutions (*sur l'intervalle [-18 ; 18], remarque identique au 10.*)

12. **Le nombre de solutions de l'équation $f'(x) \times g'(x) = 0$ est :**

a. 0
b. 1
c. 2
d. 3

$f'(x) \times g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \ \ ou \ \ g'(x) = 0$

- f'(x) = 0 lorsque la courbe C admet une tangente horizontale au point d'abscisse x
  On voit donc sur le graphique que la courbe C n'admet qu'une seule tangente horizontale au point d'abscisse (-4) indiquée en violet sur la courbe (attention : la courbe C n'admet pas de tangente horizontale au point d'abscisse (-2) car elle forme un sommet « abrupt », qui n'est pas « lissé » !!)
  f'(x) = 0 n'admet donc qu'une seule solution
- g'(x) = 0 admet 2 solutions (les 2 points violets de la courbe S)

Au total, l'équation $f'(x) \times g'(x) = 0$ admet donc 3 solutions (*sur l'intervalle [-18 ; 18]*)

<u>Nota</u> : le corrigé « officiel » indique la réponse C, avec laquelle je ne suis pas d'accord au vu de la lecture graphique !

13. **Sur $[-2;3[\cup]3;+\infty[$ la fonction f est :**
   a. constante
   b. strictement décroissante
   c. strictement croissante
   d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

   La remarque faite depuis le début prend ici tout son sens. En effet, on n'a sous les yeux que la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-18 ; 18] Ainsi, on ne peut connaître les variations de la fonction f au-delà de x = 18.

   L'affirmation juste serait : f est strictement croissante sur [-2 ; 3[U]3 ; 18]

14. **Sur $[-2;3]$ la fonction g est :**
   a. constante
   b. strictement décroissante
   c. strictement croissante
   d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

   On voit, sur le graphique représentant la courbe S de la fonction g', que g'(x) ≥ 0 sur [-2 ; 3]

   Donc la fonction g est strictement croissante sur [-2 ; 3]

15. **$\int_5^7 f'(x)dx$ est :**
   a. nulle
   b. strictement négative
   c. strictement positive
   d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

   On a $\int_5^7 f'(x)dx = [f(x)]_5^7 = f(7) - f(5) \approx 0{,}7 - (-0{,}5) = 0{,}7 + 0{,}5 = 1{,}2 > 0$

16. **$\int_5^7 g'(x)dx$ est :**
   a. nulle
   b. strictement négative
   c. strictement positive
   d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

   On voit, sur le graphique représentant la courbe S de la fonction g', que g'(x) < 0 sur [5 ; 7] (bien qu'on ne voie pas la courbe S sur [5 ; 7], on peut considérer qu'elle ne repasse pas au-dessus de l'axe des abscisses car, le cas échéant, on verrait réapparaître la courbe S sur cet intervalle, et traverser l'axe des abscisses)

   Donc $\int_5^7 g'(x)dx < 0$

SECTION 3 : FONCTIONS

Soient : f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 2e^{-3x} - 4x + 6\cos(0,5x)$, f' sa fonction dérivée et F sa primitive s'annulant en 0.

17. $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$

a. $-\infty$
b. $+\infty$
c. n'existe pas
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On sait que, pour tout nombre réel x, -1 ≤ cos (x) ≤ 1

Donc, pour tout nombre réel x, -1 ≤ cos (0,5x) ≤ 1 ⇔ -6 ≤ 6cos (0,5x) ≤ 6

Donc, pour tout nombre réel x, -4x -6 ≤ -4x + 6cos (0,5x) ≤ -4x + 6

Donc, pour tout nombre réel x, $2e^{-3x}$ – 4x – 6 ≤ f(x) ≤ $2e^{-3x}$ – 4x + 6

On sait que $\lim_{x\to-\infty}(-3x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}(e^{x}) = +\infty$

Donc par composition $\lim_{x\to-\infty}(e^{-3x}) = +\infty$

De plus, $\lim_{x\to-\infty}(-4x) = +\infty$

Donc, par somme, $\lim_{x\to-\infty}(e^{-3x} + (-4x) - 6) = +\infty$

On a, pour tout x, f(x) ≥ $2e^{-3x}$ – 4x – 6 et $\lim_{x\to-\infty}(e^{-3x} + (-4x) - 6) = +\infty$

Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

18. $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

a. $-\infty$
b. $+\infty$
c. n'existe pas
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On a montré que pour tout nombre réel x, $2e^{-3x}$ – 4x – 6 ≤ f(x) ≤ $2e^{-3x}$ – 4x + 6

On sait que $\lim_{x\to+\infty}(-3x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}(e^{x}) = 0$

Donc par composition $\lim_{x\to+\infty}(e^{-3x}) = 0$

De plus, $\lim_{x\to+\infty}(-4x) = -\infty$

Donc, par somme, $\lim_{x\to+\infty}(e^{-3x} + (-4x) + 6) = -\infty$

On a, pour tout x, f(x) ≤ $2e^{-3x}$ – 4x – 6 et $\lim_{x\to+\infty}(e^{-3x} + (-4x) + 6) = -\infty$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

19. Pour tout réel x on a : $f'(x) =$

a. $2e^{-3x} - 4 + 6\sin(0,5x)$
b. $2e^{-3x} - 4 - 6\sin(0,5x)$
c. $-6e^{-3x} - 4 + 3\sin(0,5x)$
d. $-6e^{-3x} - 4 - 3\sin(0,5x)$

On a f(x) = $2e^{-3x}$ – 4x + 6cos (0,5x)

- $x \longmapsto e^{-3x}$ est de la forme e^{u} avec $u(x) = -3x$ donc $u'(x) = -3$

  Donc $(e^{-3x})' = (e^{u})' = u'e^{u} = (-3)e^{-3x}$
- $x \longmapsto \cos(0,5x)$ est de la forme cos(u) avec u(x) = 0,5x donc u'(x) = 0,5

  Donc (cos(0,5x))' = (cos(u))' = -u'sin(u) = -0,5sin(0,5x)

Donc $f'(x) = 2 \times (-3)e^{-3x} - 4 + 6 \times (-0,5\sin(0,5x))$

Soit $f'(x) = -6e^{-3x} - 4 - 3\sin(0,5x)$

20. Le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 0$ est :

a. 0
b. 1
c. 2
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

Il ne faut bien sûr pas chercher à résoudre directement l'équation !
On a montré que $f'(x) = -6e^{-3x} - 4 - 3\sin(0,5x)$
On sait que pour tout nombre réel x, -1 ≤ sin(x) ≤ 1
Donc pour tout nombre réel x, -1 ≤ sin (0,5x) ≤ 1
Donc -3 ≤ -3sin(0,5x) ≤ 3
Donc $-6e^{-3x} - 4 - 3 \leq -6e^{-3x} - 4 - 3\sin(0,5x) \leq -6e^{-3x} - 4 + 3$
Soit $-6e^{-3x} - 7 \leq f'(x) \leq -6e^{-3x} - 1$
Or, pour tout nombre réel x, $e^x > 0$ donc $e^{-3x} > 0$ et donc $-6e^{-3x} < 0$
Soit $-6e^{-3x} - 1 < -1 < 0$
Donc, pour tout nombre réel x, $f'(x) \leq -6e^{-3x} - 1 < 0$
Donc, pour tout nombre réel x, $f'(x) < 0$
Donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
De plus, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$)
Enfin, on a montré que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty > 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty < 0$
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation f(x) = 0 admet une unique solution sur $\mathbb{R}$

21. La plus petite solution de l'équation $f(x) = 0$ est :

a. strictement négative
b. strictement positive
c. nulle
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

Il n'y a qu'une seule solution à cette équation, et on sait que la fonction f est strictement décroissante.
Calculons f(0) = $2e^{-3\times0}$ – 4x0 + 6cos (0,5x0) = $2e^{0}$ – 0 + 6cos(0) = 2x1 + 6x1 = 2 + 6 = 8 > 0
Donc, puisque f(0) > 0, et que f est strictement décroissante et continue, la solution de l'équation f(x) = 0 est strictement positive.
Les plus sceptiques peuvent s'en convaincre en visualisant le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	8 ↘	0 ↘	$-\infty$

22. Pour tout réel x on a : $F(x) =$

a. $2e^{-3x} - 2x^2 + 6\sin(0,5x)$
b. $2e^{-3x} - 2x^2 + 6\sin(0,5x) - 2$
c. $-\frac{2}{3}e^{-3x} - 2x^2 + 12\sin(0,5x)$
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

F est la primitive de la fonction f s'annulant en 0

Commençons déjà par calculer F(0) pour chaque fonction proposée :

a. $F(0) = 2e^{-3\times 0} - 2\times 0^2 + 6\sin(0,5\times 0) = 2e^0 - 0 + 6\sin(0) = 2 + 6\times 0 = 2 \neq 0$

b. $F(0) = 2e^{-3\times 0} - 2\times 0^2 + 6\sin(0,5\times 0) - 2$
$= 2e^0 - 0 + 6\sin(0) - 2 = 2 + 6\times 0 - 2 = 2 - 2 = 0$

c. $F(0) = -\frac{2}{3}e^{-3\times 0} - 2\times 0^2 + 12\sin(0,5\times 0)$
$= -\frac{2}{3}e^0 - 0 + 12\sin(0) = -\frac{2}{3} + 12\times 0 = -\frac{2}{3} + 0 = -\frac{2}{3} \neq 0$

Seule la b. s'annule en 0. Vérifions maintenant qu'on a bien F'(x) = f(x)

La démarche de dérivation est similaire à celle effectuée à la question 19.

$F'(x) = 2\times(-3e^{-3x}) - 2\times 2x + 6\times 0,5\cos(0,5x) - 0$
$= -6e^{-3x} - 4x + 3\cos(0,5x) \neq f(x)$

Donc F n'est pas une primitive de f

Donc aucune des propositions ne correspond à la bonne expression de F !

23. $\int_{-1}^{-3} f'(x)dx$ est :

a. nulle
b. strictement négative
c. strictement positive
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On a $\int_{-1}^{-3} f'(x)dx = [f(x)]_{-1}^{-3} = f(-3) - f(-1)$

Or on a montré que la fonction f est strictement décroissante

Donc (-3) < (-1) ⟹ f(-3) > f(-1) ⟹ f(-3) – f(-1) > 0

Donc $\int_{-1}^{-3} f'(x)dx > 0$

24. $\int_{-3}^{-1} f(x)dx$ est :

a. nulle
b. strictement négative
c. strictement positive
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On sait que f est strictement décroissante et que f(0) > 0, donc f(x) > 0 pour tout x < 0

Donc, puisque -3 < -1 < 0, $\int_{-3}^{-1} f(x)dx > 0$

25. f est une fonction :

a. à la fois paire et impaire
b. paire non impaire
c. impaire non paire
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On a $f(-x) = 2e^{-3(-x)} - 4(-x) + 6\cos\big(0,5(-x)\big)$
$= 2e^{3x} + 4x + 6\cos(-0,5x) = 2e^{3x} + 4x - 6\cos(0,5x) \neq f(x)$

De plus, $-f(x) = -(2e^{-3x} - 4x + 6\cos(0,5x)) = -2e^{-3x} + 4x - 6\cos(0,5x) \neq f(-x)$

Donc $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$

Donc la fonction f n'est ni paire, ni impaire !

26. f **est une fonction :**

a. périodique de période 2π
b. périodique de période π
c. périodique de période $\frac{\pi}{2}$
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On a : $f(x+2\pi) = 2e^{-3(x+2\pi)} - 4(x+2\pi) + 6\cos\big(0{,}5(x+2\pi)\big)$
$= 2e^{-3x-6\pi} - 4x - 8\pi + 6\cos(0{,}5x+\pi)$
$= 2e^{-3x}e^{-6\pi} - 4x - 8\pi - 6\cos(0{,}5x) \neq f(x)$
$f(x+\pi) = 2e^{-3(x+\pi)} - 4(x+\pi) + 6\cos\big(0{,}5(x+\pi)\big)$
$= 2e^{-3x-3\pi} - 4x - 4\pi + 6\cos(0{,}5x+0{,}5\pi)$
$= 2e^{-3x}e^{-3\pi} - 4x - 4\pi - 6\sin(0{,}5x) \neq f(x)$
$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{-3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} - 4\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + 6\cos\left(0{,}5\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$
$= 2e^{-3x-\frac{3\pi}{2}} - 4x - 2\pi + 6\cos(0{,}5x + 0{,}5\frac{\pi}{2})$
$= 2e^{-3x}e^{-\frac{3\pi}{2}} - 4x - 2\pi - 6\cos(0{,}5x+\frac{\pi}{4}) \neq f(x)$

Donc f n'est pas périodique, ni de période 2π, ni de période π, ni de période $\frac{\pi}{2}$

SECTION 4 : SUITES

Soient les suites : (U_n) ***définie par*** $U_0 = 4$ ***et pour tout entier naturel n:*** $U_{n+1} = -\frac{3}{2}U_n + \frac{5}{2}n + 1$ ***et*** (V_n) ***par*** $V_n = U_n - n$

27. $U_2 =$

a. 11
b. $\frac{39}{4}$
c. -5
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On a $U_0 = 4$ donc $U_1 = -\frac{3}{2}\times 4 + \frac{5}{2}\times 0 + 1 = -6 + 1 = -5$
Donc $U_2 = -\frac{3}{2}\times(-5) + \frac{5}{2}\times 1 + 1 = \frac{15}{2} + \frac{5}{2} + 1 = \frac{15}{2} + \frac{5}{2} + \frac{2}{2} = \frac{22}{2} = 11$

28. (U_n) **est :**

a. arithmétique et géométrique
b. arithmétique non géométrique
c. géométrique non arithmétique
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On a $U_{n+1} - U_n = -\frac{3}{2}U_n + \frac{5}{2}n + 1 - U_n = -\frac{5}{2}U_n + \frac{5}{2}n + 1$ n'est pas une constante
Donc (U_n) n'est pas arithmétique
On a $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{-\frac{3}{2}U_n + \frac{5}{2}n + 1}{U_n} = -\frac{3}{2} + \frac{5n}{2U_n} + \frac{1}{U_n}$ n'est pas une constante
Donc (U_n) n'est pas géométrique
Donc (U_n) n'est ni arithmétique, ni géormétrique !

29. (V_n) **est :**

a. arithmétique et géométrique
b. arithmétique non géométrique
c. géométrique non arithmétique
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On a $V_{n+1} = U_{n+1} - (n+1) = -\frac{3}{2}U_n + \frac{5}{2}n + 1 - n - 1 = -\frac{3}{2}U_n + \frac{3}{2}n$

Donc $V_{n+1} = -\frac{3}{2}(U_n - n) = -\frac{3}{2}V_n$

Donc (V_n) est géométrique de raison $\left(-\frac{3}{2}\right)$

On a $V_{n+1} - V_n = -\frac{3}{2}V_n - V_n = -\frac{5}{2}V_n$ n'est pas une constante

Donc (V_n) n'est ps arithmétique

Donc (V_n) est géométrique non arithmétique

30. Quel que soit n **:** $U_n =$

a. $4 \times (-1{,}5)^n - n$
b. $4 \times (-1{,}5)^n$
c. $4 \times (-1{,}5)^n + n$
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

(V_n) est géométrique de raison $\left(-\frac{3}{2}\right)$ donc pour tout entier naturel n, $V_n = V_0 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^n$

Or $V_0 = U_0 - 0 = 4 - 0 = 4$

Donc $V_n = 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^n = 4 \times (-1{,}5)^n$

Or $V_n = U_n - n$ donc $U_n = V_n + n$

Donc pour tout entier naturel n, $U_n = 4 \times (-1{,}5)^n + n$

31. La suite (U_n) **:**

a. converge
b. diverge vers $-\infty$
c. diverge vers $+\infty$
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On sait que (V_n) est géométrique de raison $\left(-\frac{3}{2}\right)$ et que $-\frac{3}{2} < -1$

Donc (V_n) n'est ni convergente, ni divergente vers $+\infty$ ou $-\infty$

Or $U_n = V_n + n$, donc (U_n) n'est ni convergente, ni divergente vers $+\infty$ ou $-\infty$

32. $\sum_{k=0}^{2014} U_k$ **est :**

a. nulle
b. strictement négative
c. strictement positive
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

$\sum_{k=0}^{k=2014} U_k = \sum_{k=0}^{k=2014}(V_k + k) = \sum_{k=0}^{k=2014} V_k + \sum_{k=0}^{k=2014} k$

$\sum_{k=0}^{k=2014} V_k$ est la somme des termes d'une suite géométrique dont on connait l'expression :

$\sum_{k=0}^{k=2014} V_k = V_0 \frac{1-\left(-\frac{3}{2}\right)^{2014+1}}{1-\left(-\frac{3}{2}\right)} = 4\frac{1-\left(-\frac{3}{2}\right)^{2015}}{1+\frac{3}{2}} = 4\frac{1-\left(-\frac{3}{2}\right)^{2015}}{\frac{5}{2}}$

2015 est impair, donc $\left(-\frac{3}{2}\right)^{2015} = -\left(\frac{3}{2}\right)^{2015}$

Donc $\sum_{k=0}^{k=2014} V_k = 4\frac{1+\left(\frac{3}{2}\right)^{2015}}{\frac{5}{2}} > 0$

$\sum_{k=0}^{k=2014} k = 0 + 1 + 2 + \cdots + 2014$ est la somme des entiers de 0 à 2014

Donc $\sum_{k=0}^{k=2014} k > 0$

Donc, finalement, on a bien $\sum_{k=0}^{k=2014} U_k = \sum_{k=0}^{k=2014} V_k + \sum_{k=0}^{k=2014} k > 0$

SECTION 5 : PROBABILITES

On lance deux fois de suite et de manière indépendante un dé parfaitement équilibré à six faces dont : deux sont blanches marquées chacune du chiffre 2 ; une est blanche marquée du chiffre 1 ; une est noire marquée du chiffre 1 et les deux autres sont noires marquées du chiffre 3. On considère les variables aléatoires X correspondant à la somme des deux chiffres obtenus et Y le nombre de couleurs différentes obtenues.

33. Le nombre de valeurs différentes pouvant être prises par X est :

a. 3
b. 4
c. 5
d. 6

Faisons un tableau des possibilités des résultats obtenus en additionnant les chiffres obtenus sur les faces des deux dés :

		Dé n°2					
		1 blanc	1 noir	2 blanc	2 noir	3 noir	3 noir
Dé n°1	1 blanc	2	2	3	3	4	4
	1 noir	2	2	3	3	4	4
	2 blanc	3	3	4	4	5	5
	2 blanc	3	3	4	4	5	5
	3 noir	4	4	5	5	6	6
	3 noir	4	4	6	6	6	6

X peut donc prendre 5 valeurs différentes : 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

34. $P(X = 2) =$

a. $\frac{1}{6}$
b. $\frac{2}{36}$
c. $\frac{4}{36}$
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

Il y a 36 issues possibles (explicitées dans le tableau précédent)
4 issues amènent à X = 2
On a donc $P(X = 2) = \frac{4}{36}$

35. $P(Y=1) - P(Y=2)$ **est :**

a. nul
b. strictement négatif
c. strictement positif
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

Faisons un tableau des possibilités des résultats obtenus pour Y en fonction des résultats obtenus sur les faces des deux dés :

		Dé n°2					
		1 blanc	1 noir	2 blanc	2 noir	3 noir	3 noir
Dé n°1	1 blanc	1	2	1	2	2	2
	1 noir	2	1	2	1	1	1
	2 blanc	1	2	1	2	2	2
	2 blanc	1	2	1	2	2	2
	3 noir	2	1	2	1	1	1
	3 noir	2	1	2	1	1	1

On a d'après ce tableau $P(Y=1) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ et $P(Y=2) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

Donc $P(Y=1) - P(Y=2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

36. $P(X=Y) =$

a. $\mathrm{P(X=1)}$
b. $\mathrm{P(X=2)}$
c. $\mathrm{P(X=1)+P(X=2)}$
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

X = Y n'est possible que pour X = 2 (puisque Y n'est égal qu'à 1 ou 2)

Cependant, il y a 4 issues qui amènent à X = 2, mais dans ces issues, seules 2 amènent à Y = 2 (dans les 4 cases colorées du tableau précédent)

Donc $P(X=Y) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \neq P(X=2)$

Or $P(X=1) = 0$ puisque X ne peut pas être égal à 1 !

Donc $P(X=Y)$ n'est ni égal à $P(X=2)$, ni à $P(X=1)$, ni à $P(X=1)+P(X=2)$

37. L'espérance mathématique $E(Y) =$

a. $\frac{1}{2}$
b. $\frac{2}{2}$
c. $\frac{3}{2}$
d. 2

$$\begin{aligned} E(Y) &= 1 \times P(Y=1) + 2 \times P(Y=2) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

38. $P_{Y=2}(X=2) =$

a. $\frac{1}{2}$
b. $\frac{1}{9}$
c. $\frac{1}{18}$
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

Il y a 4 issues possibles pour avoir X = 2 (les 4 cases colorées du tableau)

Parmi ces 4 issues, seules 2 amènent à Y = 2

Donc $P\big((X=2) \cap (Y=2)\big) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Donc $P_{Y=2}(X=2) = \frac{P((X=2)\cap(Y=2))}{P(Y=2)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{18} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{9}$

39. $P_{X=2}(Y = 2) =$

a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{9}$

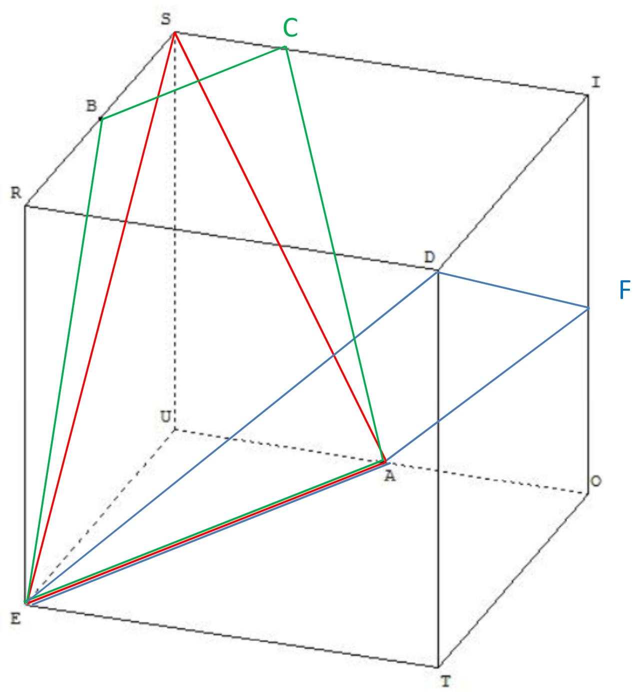
c. $\frac{1}{18}$

d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

$$P_{X=2}(Y=2) = \frac{P\big((X=2)\cap(Y=2)\big)}{P(X=2)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{18}\times\frac{36}{4} = \frac{2\times 18}{18\times 2\times 2} = \frac{1}{2}$$

SECTION 6 : GEOMETRIE NON ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

Soient ETOURDIS un cube et les points A et B milieux respectifs des arêtes [OU] et [RS] :



40. La section de ce cube par le plan (EAS) est :

a. un segment

b. un triangle

c. un quadrilatère

d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

Si on cherche à tracer des parallèles à (ES), (EA) ou (AS) passant par leur point opposé (respectivement A, S et E) on constate qu'on les trace « en-dehors » du cube, donc qu'il n'y a pas de sectrice du cube par le plan (EAS) autres que les segments [ES], [EA] et [AS]

Donc la section du cube ETOURDIS par la plan (EAS) correspond au triangle EAS.

41. La section de ce cube par le plan (EAB) est :

a. un segment

b. un triangle

c. un quadrilatère

d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

Pour tracer la section du cube ETOURDIS par le plan (EAB), on trace la parallèle à (EA) passant par B dans le plan (RSD), face supérieure du cube. Elle coupe l'arête [SI] au point C.

La section correspond ainsi au quadrilatère EBCA.

42. La section de ce cube par le plan (EAD) est :

a. un segment
b. un triangle
c. un quadrilatère
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

Pour tracer la section du coube ETOURDIS par le plan (EAD), on trace la parallèle à (ED) passant par A dans le plan (SIO), face arrière du cube. Elle coupe l'arête [OI] au point F.
La section correspond ainsi au quadrilatère EAFD

SECTION 7 : GEOMETRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

Dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(0;-5;0)$, $B(1;0;1)$, $C(-1;-7;0)$; la droite D d'équation paramétrique: $\begin{cases} x=-6a+6 \\ y=4a-9 \\ z=0 \end{cases}$ où $a\in\mathbb{R}$

et le plan P d'équation cartésienne : $3x-2y-10=0$.

43. Le point A :

a. appartient à D et à P
b. appartient à D mais pas à P
c. appartient à P mais pas à D
d. n'appartient ni à D ni à P

Supposons que A ∈ D

Alors il existe un réel a tel que $\begin{cases} 0=-6a+6 \\ -5=4a-9 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a=6 \\ 4a=-5+9 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{6}{6}=1 \\ 4a=4 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=\frac{4}{4}=1 \\ 0=0 \end{cases}$

Ce réel a existe, donc on a bien A ∈ D
De plus, on a 3x0 – 2x(-5) – 10 = 0 + 10 – 10 = 0
Donc les coordonnées du point A vérifient l'équation du plan P
Donc A ∈ P
Donc le point A appartient à D et à P

44. Le triangle ABC est :

a. rectangle en A
b. rectangle en B
c. rectangle en C
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On a $AB^2=\sqrt{(1-0)^2+\left(0-(-5)\right)^2+(1-0)^2}^{\,2}=1^2+5^2+1^2=1+25+1=27$

$AC^2=\sqrt{(-1-0)^2+\left(-7-(-5)\right)^2+(0-0)^2}^{\,2}=(-1)^2+(-2)^2+0^2=1+4+0=5$

$BC^2=\sqrt{(-1-1)^2+(-7-0)^2+(0-1)^2}^{\,2}=(-2)^2+(-7)^2+(-1)^2=4+49+1=54$

Donc $AB^2+AC^2=27+5=32$, $AB^2+BC^2=27+54=81$ et $AC^2+BC^2=5+54=59$
Donc $C^2\neq AB^2+AC^2$, $AC^2\neq AB^2+BC^2$ et $AB^2\neq AC^2+BC^2$
Donc ABC n'est pas un triangle rectangle, ni en A, ni en B, ni en C

45. $\boldsymbol{D}$ **et** $\boldsymbol{P}$ **sont :**

a. parallèles
b. sécantes non perpendiculaires
c. perpendiculaires
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

D'après sa représentation paramétrique, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\4\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D

D'après son équation cartésienne, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P

Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{n}$ soient colinéaires, alors il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{n}$

Donc $\begin{cases}-6 = 3k\\4 = -2k\\0 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k = \frac{-6}{3}\\k = \frac{4}{-2}\\0 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k = -2\\k = -2\\0 = 0\end{cases}$ donc on a bien $\vec{u} = 2\,\vec{n}$

Donc $\vec{u}$ *et* $\vec{n}$ sont colinéaires

Donc D et P sont perpendiculaires

46. Les droites $(\boldsymbol{AB})$ **et** $\boldsymbol{D}$ **sont :**

a. parallèles
b. sécantes non perpendiculaires
c. perpendiculaires
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-0\\0-(-5)\\1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = 1\times(-6) + 5\times 4 + 1\times 0 = -6 + 20 + 0 = 14 \neq 0$

Donc $\overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux

Donc (AB) et D ne sont pas perpendiculaires

De plus, A∈D (question 43.) et A∈(AB)

Donc (AB) et D sont sécantes et non perpendiculaires

47. $\boldsymbol{C}$ **est sur la sphère de centre** $\boldsymbol{B}$ **et de rayon** $\boldsymbol{r}$ **où** $\boldsymbol{r}$ **appartient à l'intervalle :**

a. [5;6]
b. [6;7]
c. [7;8]
d. [8;9]

La sphère de centre B passant par le point C a pour rayon r = BC

On a $BC^2 = 54$ (question 44.)

De plus, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$ et $9^2 = 81$

Donc $7^2 < BC^2 < 8^2$

Donc $7 < BC < 8$

Donc $r \in [7\,;8]$

On considère l'algorithme suivant:

Saisir un entier N≥1
Affecter à S la valeur 1
Affecter à T la valeur 1
Tant que T≤N
  Affecter à S la valeur S+ln(T)
  Affecter à T la valeur T+1
Fin de tant que
Affecter à L la valeur S-1
Afficher L

48. La valeur de L affichée pour $N = 1$ est :

a. 0
b. 1
c. 2
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On déroule l'algorithme proposé en choisissant N = 1 :
N = 1
S = 1
T = 1
T ≤ 1
S = 1 + ln(1) = 1 + 0 = 1
T = 1 + 1 = 2
T > 1
L = 1 – 1 = 0
Afficher L = 0

49. La valeur de L affichée pour $N = 3$ est :

a. $\ln(5)$
b. $\ln(6)$
c. $\ln(7)$
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On déroule l'algorithme proposé en choisissant N = 3 :
N = 3
S = 1
T = 1

T ≤ 3	T ≤ 3	T ≤ 3
S = 1 + ln(1) = 1 + 0 = 1	S = 1 + ln(2)	S = 1 + ln(2) + ln(3) = 1 + ln(2x3) = 1 + ln(6)
T = 1 + 1 = 2	T = 2 + 1 = 3	T = 3 + 1 = 4

T > 3
L = 1 + ln(6) – 1 = ln(6)
Afficher L = ln(6)

50. La plus grande valeur de N telle que $L \leq \ln(25)$ est :

a. 3

b. 4

c. 5

d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

En ayant compris le principe de l'algorithme, on peut « résumer » le programme pour N = 5 :

T	1	2	3	4	5
S	1	1 + ln(2)	1 + ln(6)	1 + ln(6) + ln(4) = 1 + ln(6x4) = 1 + ln(24)	1 + ln(24) + ln(5) = 1 + ln(24x5) = 1 + ln(120)
L	0	ln(2)	ln(6)	ln(24)	ln(120)

Pour avoir L ≤ ln(25) , on peut entrer 1, 2, 3 ou 4 comme valeurs de N

Si on entre 5 comme valeur de N, l'algorithme affichera L = ln(120) > ln(25)

La plus grande valeur de N telle que L ≤ ln(25) est N = 4

51. La plus petite valeur de N telle que $e^L \geq 25$ est :

a. 3

b. 4

c. 5

d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On a $e^L \geq 25 \Leftrightarrow e^L \geq e^{\ln(25)} \Leftrightarrow L \geq \ln(25)$

On a vu dans la question précédente que, si on entre 5 comme valeur de N,

l'algorithme affichera L = ln(120) > ln(25)

Si on entre 4 comme valeur de N, l'algorithme affichera L = ln(24) < ln(25)

Donc la plus petite valeur de N telle que $e^L \geq 25$ est N = 5

SECTION 9 : LOIS DE DENSITE

X suit la loi normale de moyenne -2 et de variance v telle que $P(X \leq 0) = a$ et Y suit la loi exponentielle de paramètre 0,2.

52. Ainsi :

a. $a = 0{,}5$

b. $a < 0{,}5$

c. $a > 0{,}5$

d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte.

X suit la loi normale de moyenne (-2)

On a P (X ≤ 0) = P (X ≤ -2) + P (-2 ≤ X ≤ 0) = 0,5 + P (-2 ≤ X ≤ 0)

Donc on a nécessairement P (X ≤ 0) > 0,5

Donc a > 0,5

53. $P(X = 0) =$

a. 0

b. $0{,}5$

c. 1

d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

X suit une loi normale, donc une loi de probabilité continue à densité

Donc (résultat de cours) quel que soit le réel a, P (X = a) = 0

Donc P (X = 0) = 0

54. $\boldsymbol{P(-2 \leq X \leq 0) =}$

a. $a - 0{,}5$
b. $a + 0{,}5$
c. 2
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On a P (X ≤ 0) = P (X ≤ -2) + P (-2 ≤ X ≤ 0)
Donc P (-2 ≤ X ≤ 0) = P (X ≤ 0) - P (X ≤ -2)
Donc P (-2 ≤ X ≤ 0) = a – 0,5

55. $\boldsymbol{P(X < -2) = b}$ **où :**

a. $b = 0{,}5$
b. $b < 0{,}5$
c. $b > 0{,}5$
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On a P (X < -2) = P (X ≤ -2) = 0,5 car X suit une loi normale de moyenne (-2)
Donc b = 0,5

56. $\boldsymbol{E(Y) =}$

a. $0{,}2$
b. 5
c. $5\ln(2)$
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

Y suit une loi exponentielle de paramètre 0,2
Donc (résultat de cours) E(Y) = $\frac{1}{0{,}2} = \frac{1}{\frac{2}{10}} = \frac{10}{2} = 5$

57. $\boldsymbol{P(-1 \leq Y \leq 1) =}$

a. $e^{0,2} - e^{-0,2}$
b. $e^{-0,2} - e^{0,2}$
c. $1 - e^{0,2}$
d. $1 - e^{-0,2}$

Y suit une loi exponentielle de paramètre 0,2
On a $P(-1 \leq Y \leq 1) = P(-1 \leq Y \leq 0) + P(0 \leq Y \leq 1) = 0 + P(0 \leq Y \leq 1)$
Donc $P(-1 \leq Y \leq 1) = P(Y \leq 1) = 1 - e^{-0,2\times 1}$
Donc $P(-1 \leq Y \leq 1) = 1 - e^{-0,2}$

58. La valeur de ϴ telle que $\boldsymbol{P(Y < \Theta) = P(Y > \Theta)}$ **est**

a. 0
b. $\frac{1}{2}$
c. 1
d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On a $P(Y > \Theta) = 1 - P(Y < \Theta)$
Donc $P(Y < \Theta) = P(Y > \Theta) \Leftrightarrow P(Y < \Theta) = 1 - P(Y < \Theta)$
$\Leftrightarrow P(Y < \Theta) + P(Y < \Theta) = 1$
$\Leftrightarrow 2P(Y < \Theta) = 1$
$\Leftrightarrow P(Y < \Theta) = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow 1 - e^{-0,2\Theta} = 1$
$\Leftrightarrow -e^{-0,2\Theta} = 0 \quad \Leftrightarrow e^{-0,2\Theta} = 0$

Cette équation n'admet pas de solution, donc il n'existe pas de valeur ϴ telle que $P(Y < \Theta) = P(Y > \Theta)$

59. $P_{Y>8}(Y < 5)$=

a. $\frac{P(Y<8)-P(Y<5)}{P(Y<8)}$

b. $\frac{P(Y>8)-P(Y<5)}{P(Y>8)}$

c. $1 - P(Y < 3)$

d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On a $P_{Y>8}(Y < 5) = 1 - P_{Y>8}(Y \geq 5)$

Or d'après la propriété de durée de vie sans vieillissement $P_{Y>8}(Y \geq 5) = P(Y \geq 8 - 5)$

Donc $P_{Y>8}(Y < 5) = 1 - P(Y > 3)$

Aucune des propositions ne correspond à ce résultat.

60. $P_{Y<8}(Y > 5)$ =

a. $\frac{\mathrm{P(Y<8)-P(Y<5)}}{\mathrm{P(Y<8)}}$

b. $\frac{\mathrm{P(Y>8)-P(Y<5)}}{\mathrm{P(Y>8)}}$

c. $1 - \mathrm{P(Y < 3)}$

d. aucune des trois propositions ci-dessus n'est correcte

On a $P_{Y<8}(Y > 5) = \frac{P((Y<8)\cap(Y>5))}{P(Y<8)} = \frac{P(5<Y<8)}{P(Y<8)} = \frac{P(Y<8)-P(Y<5)}{P(Y<8)}$

FIN DE L'EPREUVE

STAGES PRÉPA CONCOURS AVENIR

LA MEILLEURE PRÉPA AVENIR

- Intégration des meilleures écoles
- Une préparation progressive
- Petits groupe de préparation
- Support avec différents niveaux de difficulté

Préparation concours Avenir

STAGES PRÉPA CONCOURS AVENIR EN LIGNE

- Entrainement et préparation dans les conditions réelles
- Application mobile PrepApp gratuite
- Format où l'élève est au centre de l'attention en pédagogie différenciée

Stage en ligne prépa concours Avenir

https://groupe-reussite.fr/stages/toutes-matieres/prepa-concours-avenir/france/toutes-periodes/