Nom : ....

Prénom : ....

Numéro Parcoursup : ....

ConcoursAvenir

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
SUJET A

Durée : 1h30
Coefficient : 6

Qui peut utiliser ce sujet de **Mathématiques A** ?

- Profil Violet : **OUI** ✔
- Profil Jaune : **NON** ✗
- Profil Vert : **OUI** ✔

Consignes spécifiques :

Lisez attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve.

Cette épreuve comporte volontairement plus d'exercices que vous ne pouvez en traiter dans le temps imparti. La raison en est que votre enseignant n'a pas forcément traité l'ensemble du programme de Terminale.

Vous devez répondre à 45 questions au choix parmi les 60 proposées pour obtenir la note maximale. Si vous traitez plus de 45 questions, seules les 45 premières répondues seront prises en compte.

Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon. **L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique (connecté ou non) est interdit.**

Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé. Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.

Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e). Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

***Barème* :** **Pour chaque question, une seule réponse est correcte.** Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, **chaque réponse exacte est gratifiée de trois points, tandis que chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'un point. Une question non traitée n'apporte et ne retire aucun point.**

Calculs numériques et suites numériques

Question 1.
Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{\pi^n}{e^n}$, on peut alors affirmer que :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ **c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **d.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\pi}{e}$

Question 2.
Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2-n^2}{(n+1)(n+2)}$, on peut alors affirmer que :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ **b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$ **c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ **d.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Question 3.
Soit une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\dfrac{1}{u_n^2+1}\right)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$, on peut alors affirmer que :

a. (u_n) est croissante
b. (u_n) n'est pas monotone
c. (u_n) est décroissante
d. le sens de variation de (u_n) dépend de u_0

Question 4.
Dans une culture de bactéries, le nombre de bactéries augmente chaque heure de 300%.
Soit la suite (u_n) où pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n représente le nombre de bactéries après n heures.
On peut alors affirmer que :

a. (u_n) est géométrique de raison 4
b. (u_n) est géométrique de raison 3
c. (u_n) est géométrique de raison $1,3$
d. (u_n) est géométrique de raison 2

Question 5.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte ?

a. Si une suite diverge vers $+\infty$, alors elle est croissante à partir d'un certain rang
b. Si (u_n) converge vers 0, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ diverge vers $-\infty$ ou $+\infty$
c. Si une suite est décroissante et à termes positifs, alors elle est bornée
d. Si une suite est strictement décroissante alors elle diverge vers $-\infty$

Question 6.
Soient les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$u_n < v_n < w_n.$$

On peut alors affirmer que :

a. si (u_n) et (w_n) convergent, alors (v_n) aussi
b. si (u_n) est croissante, (v_n) l'est aussi
c. les 3 suites peuvent avoir la même limite
d. (v_n) est bornée

Question 7.
Soit une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \ln(u_n + 2)$.
On peut alors affirmer que :

a. si $u_0 \in [0; 2]$, alors (u_n) est croissante
b. si $u_0 \in [0; 2]$, alors (u_n) est décroissante
c. si $u_0 \in [2; +\infty[$, alors (u_n) est croissante
d. si $u_0 \in [2; +\infty[$, alors (u_n) est décroissante

Question 8.
Soit une suite (u_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définit la suite (v_n) par $v_n = e^{u_n} \times \left(\ln\left(\dfrac{n^3-1}{n-1}\right) - \ln(n^2+n+1)\right)$. On a alors :

a. (v_n) diverge vers $+\infty$

b. (v_n) est constante

c. (v_n) diverge vers $-\infty$

d. (v_n) converge vers e

Question 9.
On considère le programme en Python suivant qui prend en entrée un entier naturel $N \geq 1$:

```python
def algorithme_mystère(N) :
    u = 4
    for i in range(1, N+1):
        u = -u + 2*i + 3
    return(u)
```

Si $N = 11$ en entrée, le programme ci-dessus renvoie :

a. Le terme d'indice 11 de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = -u_n + 2n + 3$

b. Le terme d'indice 11 de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = -u_n + 2n + 5$

c. Le onzième terme de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = -u_n + 2n + 3$

d. Le onzième terme de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = -u_n + 2n + 5$

Question 10.
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 1500 \\ u_{n+1} = 0,6 \times u_n + 10 \end{cases}$

Algorithme 1 Algorithme mystère

Entrées: A
  $u = 1500$
  $n = 0$
  tant que $u \geq A$:
    $u = 0,6 \times u + 10$
    $n = n + 1$
Sortie(s): n

L'algorithme ci-dessus a renvoyé 6 avec $A = 100$ en entrée. On peut alors affirmer que :

a. $u_5 \leq 100 < u_6$ **b.** $u_6 < u_5$ **c.** $u_7 \geq 100$ **d.** $u_{101} = 6$

Pour les deux prochaines questions, on rappelle qu'on définit la factorielle d'un nombre entier naturel n strictement positif par :

$$\boxed{n\,! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1.}$$

Par exemple $3\,! = 3 \times 2 \times 1 = 6$. ***Par convention*** $0\,! = 1$.

Question 11.
On peut affirmer que :

a. $4\,! \times 5\,! = 9\,!$ **b.** $\dfrac{6\,!}{3\,!} = 3\,!$ **c.** $\dfrac{6\,!}{3\,!} = 2\,!$ **d.** $10\,! = 7\,! \times 6\,!$

Question 12.
Avec combien de zéros le nombre $25\,!$ se termine-t-il ?

a. 3 **b.** 4 **c.** 5 **d.** 6

Étude de fonctions

Dans toute cette section, on considère les courbes représentatives de fonctions dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Question 13.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. On peut alors affirmer que :

a. Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ vaut 3
b. Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est atteint en $x = 1$
c. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est atteint en $x = 1$
d. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ vaut 3

Question 14.
Combien d'asymptotes verticales ou horizontales la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x-3)(x+1)}$ compte-t-elle ?

a. 2
b. 3
c. 5
d. 6

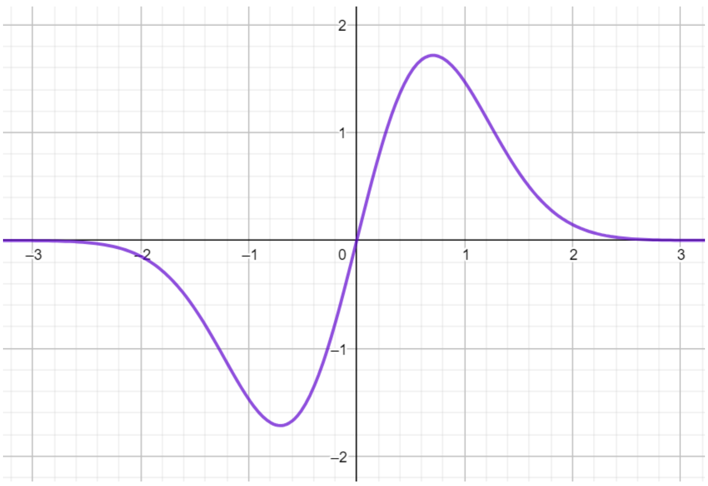
Question 15.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(8\pi)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

a. $f'(x) = \dfrac{1}{\pi}$
b. $f'(x) = \dfrac{1}{8\pi}$
c. $f'(x) = 0$
d. $f'(x) = 8\ln(\pi)$

Question 16.
Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \pi^x$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

a. $f'(x) = \ln(\pi) \times \pi^x$
b. $f'(x) = x \times \pi^{x-1}$
c. $f'(x) = \ln(x) \times \pi^x$
d. $f'(x) = \pi \times x^{\pi-1}$

Question 17.
Soit une fonction f. On a représenté ci-dessous la courbe de sa fonction dérivée f'.



Courbe représentative de f'

On peut alors affirmer que :

a. f impaire
b. f admet un minimum en $x = 0$
c. f est convexe sur $[-2; 0]$
d. f est convexe sur $[0; 2]$

Question 18.
Soient deux fonctions f et g définies et concaves sur $\mathbb{R}$. On peut alors affirmer que :

- **a.** $f \times g$ est convexe
- **b.** $f \times g$ est concave
- **c.** $f \circ g$ est concave
- **d.** Sans autres informations, on ne peut rien conclure

Question 19.
On note $\log$ le logarithme décimal (en base 10 donc) et $\ln$ le logarithme népérien (en base e donc). Pour tout $a > 0$, on a :

- **a.** $\log a = \dfrac{\ln a}{\ln 10}$
- **b.** $\log a = \ln a \times \ln 10$
- **c.** $e^{\log a} = 10^{\ln a}$
- **d.** $\log(a) = 10^{\ln(a)}$

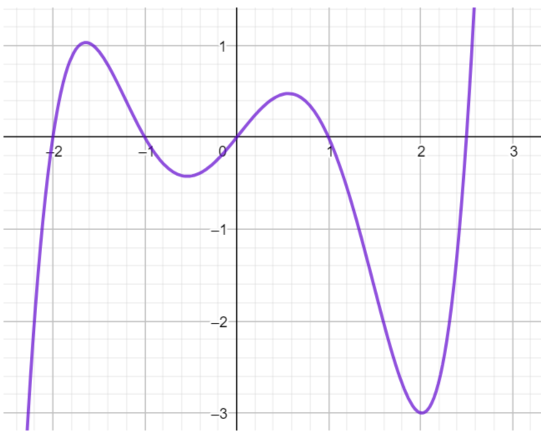
Question 20.
Soit une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f'', continue sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f''(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

On peut alors affirmer que :

- **a.** f est convexe sur $[0; +\infty[$
- **b.** f' admet un minimum sur $[0; +\infty[$
- **c.** La courbe représentative de f admet un unique point d'inflexion
- **d.** f'' est paire

Question 21.
Soit une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ que l'on a représentée ci-dessous.
On admet aussi que pour tout $x \notin [-2; 3]$, $f(x) \neq 0$.



Courbe représentative de f

L'équation $f\left(x^2\right) = 0$ admet combien de solutions réelles ?

- **a.** 5 solutions
- **b.** 6 solutions
- **c.** 9 solutions
- **d.** 10 solutions

Question 22.
Soit une fonction f vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty$.

Parmi les 4 propositions suivantes, quelle pourrait être l'expression de f ?

a. $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-x}$

b. $f(x) = \dfrac{x^2+5}{(x-1)(x^2+1)}$

c. $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\ln(x)}$

d. $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$

Question 23.
Soit la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x^2} \times \cos(3x)$.
La tangente au point d'abscisse 0 de sa courbe représentative :

a. est parallèle à l'axe des abscisses

b. a pour équation réduite $y = x + 1$

c. passe par l'origine du repère

d. a pour équation réduite $y = -x + 1$

Question 24.
Soit la fonction f définie sur $]1; 2[\cup]2; +\infty[$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x \sin(x-1)}{\ln(x-1)}$.
On peut alors affirmer que :

a. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

b. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

c. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

d. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{e}$

Probabilités et dénombrement

Question 25.
On interroge des individus au hasard dans un cinéma et on s'intéresse à deux caractéristiques présentées dans le tableau d'effectifs ci-dessous.

	Moins de 18 ans	**Entre 19 et 59 ans**	**60 ans ou plus**
Abonné	**12**	**58**	**110**
Non abonné	**90**	**38**	**42**

La probabilité que la personne interrogée ait 60 ans ou plus, sachant qu'elle est abonnée est :

a. $\dfrac{110}{152}$

b. $\dfrac{110}{170}$

c. $\dfrac{11}{18}$

d. $\dfrac{11}{35}$

Question 26.
Soit X la variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(4; p)$. Pour quelle valeur de p l'écart-type de X est-il maximal ?

a. 0

b. 1

c. $\dfrac{1}{4}$

d. $\dfrac{1}{2}$

Question 27.
Soient deux évènements A et B avec $P(A) = 0,4$ et $P(B) = p$. De plus, on a $P(A \cup B) = 0,5$.
Pour quelle valeur de p, les évènements A et B sont-ils incompatibles ?

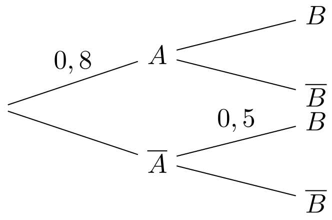
a. $\dfrac{1}{6}$

b. $\dfrac{1}{3}$

c. $0,25$

d. $0,1$

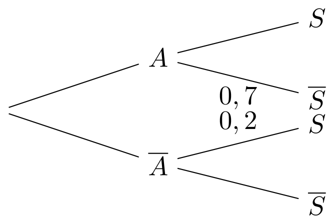
Question 28.
Soient deux évènements A et B avec $P(A \cap B) = 0,4$.



À partir de l'arbre pondéré ci-dessus, on peut affirmer que :

a. $P(\overline{A} \cap B) = 0,7$ **b.** $P(A \cup \overline{B}) = 0,4$ **c.** $P(B) = 0,6$ **d.** $P_B(A) = 0,8$

Question 29.
Soient deux évènements A et S avec $P(S) = 0,24$.



À partir de l'arbre pondéré ci-dessus, on peut affirmer que :

a. $P(A) = 0,25$ **b.** $P(A \cap \overline{S}) = 0,28$ **c.** $P_A(S) = 0,4$ **d.** $P(\overline{A}) > P(\overline{S})$

Pour les quatre questions suivantes on s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante :
on pioche au hasard deux jetons indiscernables au toucher, sans remise, dans une urne contenant 2 jetons rouges et m jetons verts, avec $m \in \mathbb{N}^*$.
Le joueur gagne 1 euro pour chaque jeton vert tiré, il perd 2 euros pour chaque jeton rouge tiré.
On note X la variable aléatoire associée à son gain algébrique.

Question 30.
Combien de valeurs différentes peut prendre la variable aléatoire X ?

a. 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 4

Question 31.
Quelle est la probabilité de réaliser un bénéfice à ce jeu ?

a. $\dfrac{m^2 - m}{m^2 + 3m + 2}$ **b.** $\dfrac{m^2 - 1}{(m+1)(m+2)}$ **c.** $1 - \dfrac{6m}{(m+1)(m+2)}$ **d.** $1 - \dfrac{2}{m^2 + 3m + 2}$

Question 32.
Quelle est la plus petite valeur de m pour que le joueur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

a. 3 **b.** 4 **c.** 5 **d.** 6

Question 33.
Si $m = 2$, on peut alors affirmer que $V(X) =$

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** 3

Question 34.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(5; \frac{1}{2})$. La probabilité $P(2 \leq X \leq 3)$ est alors égale à :

a. $\dfrac{5}{8}$ **b.** $\dfrac{3}{8}$ **c.** $\dfrac{15}{16}$ **d.** $\dfrac{1}{16}$

Pour les deux questions suivantes, on dispose de 5 jetons numérotés 1, 2, 3, 4 et 5.
On s'intéresse aux entiers naturels qu'on peut constituer en utilisant chacun des jetons une unique fois. Par exemple, on peut former le nombre 14325 ***mais pas les nombres*** 114235 ***ou*** 123.

Question 35.
Combien d'entiers naturels distincts peut-on constituer à l'aide de ces 5 jetons ?

a. 120 **b.** $\binom{10}{5}$ **c.** 43210 **d.** 10^5

Question 36.
Si on range les différents entiers naturels que l'on peut constituer avec ces jetons dans l'ordre croissant, quel sera le 100ème nombre ?

a. 51423 **b.** 51432 **c.** 51324 **d.** 51342

Équations différentielles, primitives et calcul intégral

Dans toute cette section, sauf mention du contraire, on considère les courbes représentatives de fonctions dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Question 37.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\pi y' = y$ sont les fonctions définies par :

a. $f(x) = Ce^{-\pi x}$, où $C \in \mathbb{R}$ **b.** $f(x) = Ce^{\frac{x}{\pi}}$, où $C \in \mathbb{R}$
c. $f(x) = Ce^{-\frac{x}{\pi}}$, où $C \in \mathbb{R}$ **d.** $f(x) = Ce^{\pi x}$, où $C \in \mathbb{R}$

Question 38.
La solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{e}y = e$ avec $f(1) = 1$ est :

a. $f(x) = e^{\frac{x-1}{e}}(1-e^2) + e^2$ **b.** $f(x) = e^2$
c. $f(x) = e^{\frac{1-x}{e}}(1-e^2) + e^2$ **d.** $f(x) = e^{\frac{-x}{e}}(1-e^2) + e^2$

Question 39.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = x^2$ sont les fonctions définies par :

a. $f(x) = Ce^{x} + x^2 + 2x + 2$, où $C \in \mathbb{R}$ **b.** $f(x) = Ce^{x} + x^2 - 2x + 2$, où $C \in \mathbb{R}$
c. $f(x) = Ce^{-x} + x^2 + 2x + 2$, où $C \in \mathbb{R}$ **d.** $f(x) = Ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$, où $C \in \mathbb{R}$

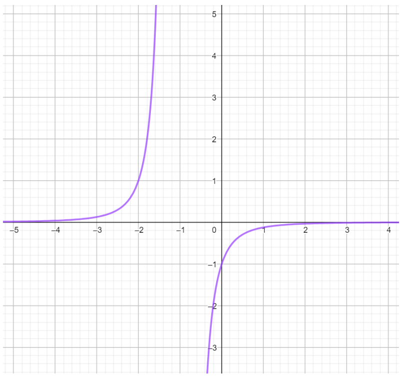
Question 40.
Soit f une solution de l'équation différentielle $y' - 2y = e^x$. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + e^x$. On peut alors affirmer que :

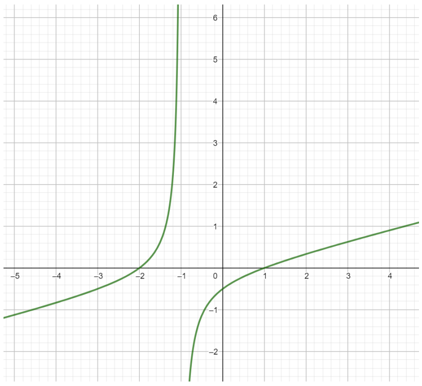
a. g est solution de $(E) : y' - 2y = 2e^x$ **b.** g est solution de $(E) : y' - 2y = e^x$
c. g est solution de $(E) : y' - 2y = -e^x$ **d.** g est solution de $(E) : y' - 2y = 0$

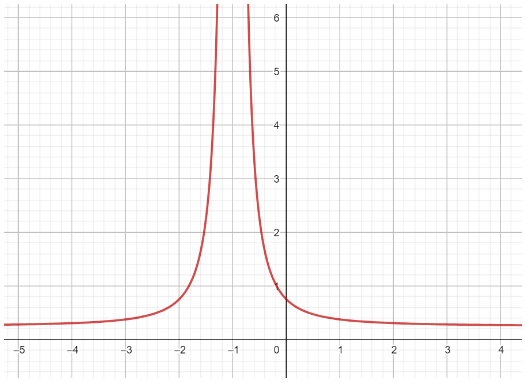
Question 41.
Une primitive de la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$ peut être définie par :

a. $F(x) = 2\sqrt{\ln(x)}$
b. $F(x) = \ln\left(\sqrt{\ln(x)}\right)$
c. $F(x) = \sqrt{\ln(x)}$
d. $F(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$

Question 42.
Soient trois fonctions f, g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, représentées ci-dessous.


Courbe représentative de f

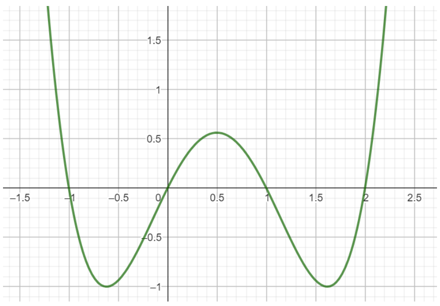

Courbe représentative de g


Courbe représentative de h

Quelle affirmation pourrait être vraie ?

a. f est une primitive de g et $h' = f$
b. h est une primitive de f et $h' = g$
c. f est une primitive de h et $g' = f$
d. g est une primitive de h et $h' = f$

Question 43.
Soit une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ dont on a tracé ci-dessous la courbe représentative.


Courbe représentative de f

On appelle F une de ses primitives sur $\mathbb{R}$. On peut alors affirmer que :

a. F est positive sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$
b. $F(0) = 0$
c. F est décroissante sur $[1;2]$
d. $f' = F$

Question 44.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\mathrm{d}x$ est égale à :

a. 1 **b.** 0 **c.** -1 **d.** 2

Question 45.
Soit F la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ définie par $F(x)=\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$. On peut alors affirmer que :

a. F change de signe sur $]0;+\infty[$

b. $F(e)=\frac{\ln(e^2)}{2}$

c. $F(e)=\frac{1}{2}$

d. $\forall x>0,\ F(x)=\frac{(\ln(x))^2}{2}-\frac{1}{2}$

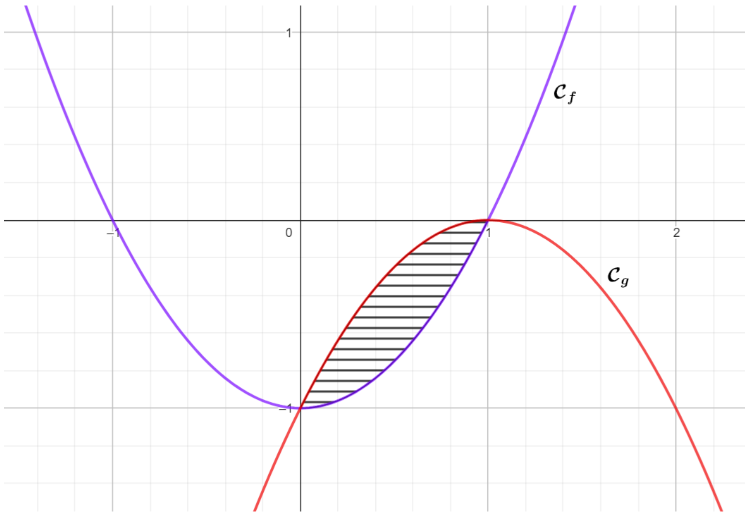
Question 46.
La valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x)=xe^{x^2}$ sur l'intervalle $[0;2]$ est :

a. $\frac{e^2-1}{2}$ **b.** $\frac{e^4-1}{2}$ **c.** $\frac{e^2-1}{4}$ **d.** $\frac{e^4-1}{4}$

Question 47.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O;I;J)$ avec $OI=0,5\ cm$ et $OJ=4\ cm$. Dans ce repère, l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ est égale à :

a. $\ln(2)\ cm^2$ **b.** $\frac{\ln(2)}{2}\ cm^2$ **c.** $\frac{\ln(2)}{4}\ cm^2$ **d.** $2\ln(2)\ cm^2$

Question 48.
On a représenté ci-dessous deux fonctions polynômes du second degré, s'annulant toutes deux en 1. Soit $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré.



Courbes représentatives de f et de g

On peut alors affirmer que :

a. $\mathscr{A}=\int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x$ u.a.

b. $\mathscr{A}=\int_0^1 2x(x-1)\,\mathrm{d}x$ u.a.

c. $\mathscr{A}=\frac{2}{3}$ u.a.

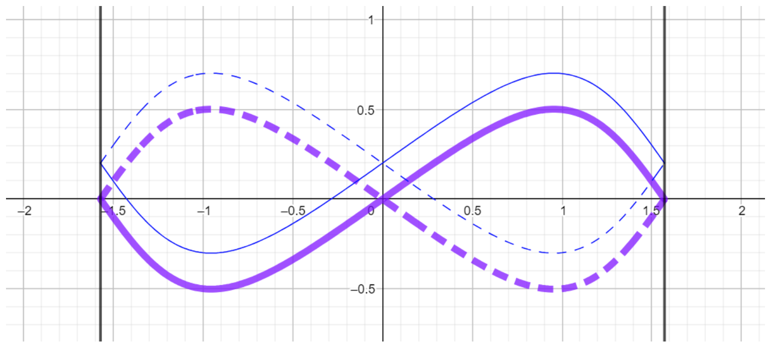
d. $\mathscr{A}=\frac{1}{3}$ u.a.

Question 49.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}\sin(x)\cos(x)}{1+\cos(x)^2}$, qu'on étudie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

- **On appelle $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction $-f+0,2$, la courbe de la fonction $-f$ et les droites d'équations $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.**
- **On appelle $\mathscr{A}_2$ l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction $f+0,2$, la courbe de la fonction f et les droites d'équations $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.**

Logo du concours avenir



En trait gras continu, on a représenté la courbe de la fonction f et en trait gras en pointillés, celle de la fonction $-f$, sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$

On souhaite colorier l'intérieur du logo du concours avenir. On approxime l'aire $\mathscr{A}$ de la surface à colorier par $\mathscr{A} \approx \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$. On obtient alors comme approximation :

a. $\mathscr{A} \approx \dfrac{\pi}{5}$ u.a. **b.** $\mathscr{A} \approx \dfrac{\pi}{4}$ u.a. **c.** $\mathscr{A} \approx \dfrac{2\pi}{5}$ u.a. **d.** $\mathscr{A} \approx \dfrac{3\pi}{4}$ u.a.

Géométrie

Dans toute cette section, sauf mention explicite du contraire, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Question 50.

On place une boule de diamètre $2\ cm$ dans un cône de révolution de hauteur $10\ cm$ et de rayon $10\ cm$. Quelle est la proportion, exprimée en pourcentage, du volume occupé par la boule par rapport au volume du cône de révolution ?

a. 4% **b.** $3,2\%$ **c.** $0,8\%$ **d.** $0,4\%$

Question 51.

Dans un repère orthonormé du plan, on a $A(0;2)$, $B(1;3)$ et $C(5;0)$. De plus, C est le milieu de $[BD]$. Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ est alors égal à :

a. 4 **b.** -14 **c.** $\dfrac{5}{2}$ **d.** 0

Question 52.

Soit un triangle ABC rectangle et isocèle en B, avec $AC = \sqrt{8}$.
Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est alors égal à :

a. 4 **b.** $2\sqrt{2}$ **c.** 2 **d.** 0

Question 53.
Dans l'espace, on considère les trois points non alignés $A(1;2;1)$, $B(1;-1;3)$ et $C(0;6;-2)$.
Une équation cartésienne du plan (ABC) est donnée par :

a. $-x+3y-z-4=0$
b. $2x-2y-3z+5=0$
c. $x-2y-3z+6=0$
d. $x+4y+6z-15=0$

Question 54.
Dans l'espace, on considère les trois points non alignés $A(-1;0;0)$, $B(1;2;0)$ et $C(0;0;-1)$.
Lequel des points suivants appartient au plan (ABC) ?

a. $D(0;0;0)$
b. $D(1;0;0)$
c. $D(0;1;0)$
d. $D(0;0;1)$

Question 55.
Dans l'espace, on considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Laquelle des droites ci-dessous, dont on donne à chaque fois une représentation paramétrique, est perpendiculaire à $\mathscr{D}$?

a. $\mathscr{D}_1 : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \\ z = -2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

b. $\mathscr{D}_2 : \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -2t \\ z = 2+4t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

c. $\mathscr{D}_3 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2+2t \\ z = -2 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

d. $\mathscr{D}_4 : \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+2t \\ z = 0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

Question 56.
Dans l'espace, on considère les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de représentation paramétrique :

$$\mathscr{D}_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 2+t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \textbf{et} \quad \mathscr{D}_2 \begin{cases} x = t \\ y = -2t-3 \\ z = -t-1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

et les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne :

$$\mathscr{P}_1 : x+y-z+2=0 \quad \textbf{et} \quad \mathscr{P}_2 : 3x+y+z+4=0.$$

On peut alors affirmer que :

a. les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles
b. $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants suivant la droite $\mathscr{D}_1$
c. les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes
d. $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants suivant la droite $\mathscr{D}_2$

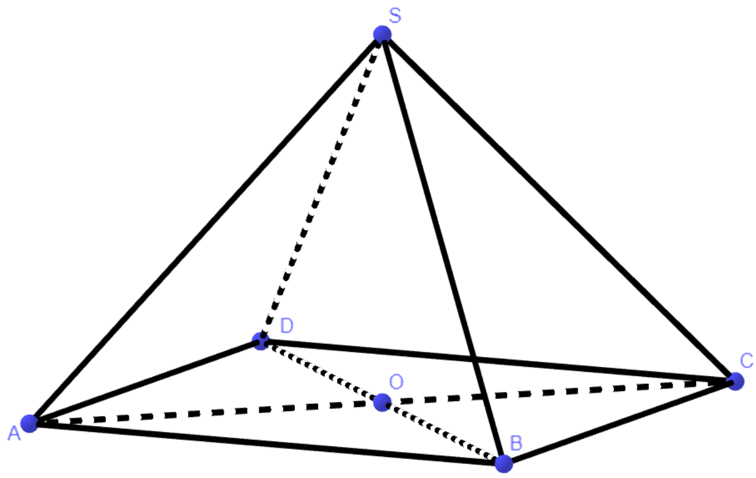
Question 57.
Dans l'espace, on considère le point $A(1;1;1)$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne :

$$\mathscr{P} : x+y=0.$$

Quelle est la distance entre le point A et le plan $\mathscr{P}$?

a. 0
b. 1
c. $\sqrt{2}$
d. $\sqrt{3}$

Pour les trois questions suivantes, on considère la pyramide ci-dessous $SABCD$***, à base carrée, de sommet*** S ***dont toutes les arêtes ont la même longueur. Le point*** O ***est le centre du carré*** $ABCD$***. On suppose que :*** $OA = OB = OS = 1$***. On munit l'espace du repère orthonormé*** $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS})$***.***



Question 58.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est correcte ?

- **a.** l'intersection des plans (SAB) et (SCD) est le point S
- **b.** l'intersection des plans (SAB) et (SCD) est le plan (ABC)
- **c.** l'intersection des plans (SAB) et (SCD) est la droite (SO)
- **d.** l'intersection des plans (SAB) et (SCD) est la droite passant par S et parallèle à (AB)

Question 59.
Un vecteur normal au plan (SBC) **est donné par :**

- **a.** $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$
- **b.** $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$
- **c.** $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$
- **d.** $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Question 60.
Quelles sont les coordonnées du projeté orthogonal du point C **sur le plan** (SAB) **?**

- **a.** $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$
- **b.** $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$
- **c.** $\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$
- **d.** $\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$

••• FIN •••