Correction

Bac Cameroun 2022 série C-E

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 POINTS)

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{e_1}\,,\overrightarrow{e_2})$.

On considère les points A, B, F et G d'affixes respectives : $Z_A = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$; $Z_B = -1-\mathrm{i}\sqrt{3}$; $Z_F = 4$ et $Z_G = -4$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2+2-2\mathrm{i}\sqrt{3}=0$.

$$\begin{aligned} z^2+2-2\mathrm{i}\sqrt{3}=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad z^2 = -2+2\mathrm{i}\sqrt{3} \\ &\Longleftrightarrow \quad z^2 = 1+2\mathrm{i}\sqrt{3}-3 \\ &\Longleftrightarrow \quad z^2 = 1+2\mathrm{i}\sqrt{3}+\left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad z^2 = \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad z = 1+\mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad z = -(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Par conséquent, **l'ensemble des solutions de l'équation** $z^2+2-2\mathrm{i}\sqrt{3}=0$ **est** $\boxed{S=\{1+\mathbf{i}\sqrt{3}\,;\,-1-\mathbf{i}\sqrt{3}\}}$.

2. Soit s la similitude directe d'expression complexe $z' = (1-\mathrm{i}\sqrt{3})\,z$.

2. a) Nous devons donner les éléments caractéristiques de s .

Si s est une similitude directe d'expression complexe $z' = az+b$ avec $a \in \mathbb{C}^*\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, alors s est la similitude directe de centre d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

- Puisque s est la similitude directe d'expression complexe $z' = (1-\mathrm{i}\sqrt{3})\,z+0$, **le centre de s est O .**

- Déterminons le rapport de s .

$$\left|1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$

D'où **le rapport de s est égal à 2.**

- Déterminons l'angle θ de s .

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

D'où **l'angle de s est égal à** $-\dfrac{\pi}{3}$.

Par conséquent, **s est la similitude directe de centre O , de rapport 2 et d'angle** $-\dfrac{\pi}{3}$.

2. b) Nous devons déterminer les images par s des points A et B.

Soit $A' = s(A)$ et notons $Z_{A'}$ l'affixe de A' .

$$\begin{aligned} Z_{A'} &= (1-\mathrm{i}\sqrt{3})\,Z_A \\ &= (1-\mathrm{i}\sqrt{3})(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) \\ &= 1+3 \\ &= 4 \\ &= Z_F \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{s(A) = F}$

Soit $B' = s(B)$ et notons $Z_{B'}$ l'affixe de B' .

$$\begin{aligned} Z_{B'} &= (1-\mathrm{i}\sqrt{3})\,Z_B \\ &= (1-\mathrm{i}\sqrt{3})(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}) \\ &= -(1-\mathrm{i}\sqrt{3})(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) \\ &= -(1+3) \\ &= -4 \\ &= Z_G \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{s(B) = G}$

3. Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse de foyers A et B et d'excentricité $e = \dfrac{1}{2}$.

3. a) Nous devons déterminer une équation de l'image $(\mathcal{E}')$ de $(\mathcal{E})$ par la similitude s .

Le milieu du segment $[AB\,]$ est le point O car $\dfrac{Z_A + Z_B}{2} = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 0.$

Dès lors, le centre de $(\mathcal{E})$ est O .
Puisque s est une similitude directe de centre O , le centre de $(\mathcal{E}')$ est également le point O .

D'où une équation de l'ellipse $(\mathcal{E}')$ est de la forme $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

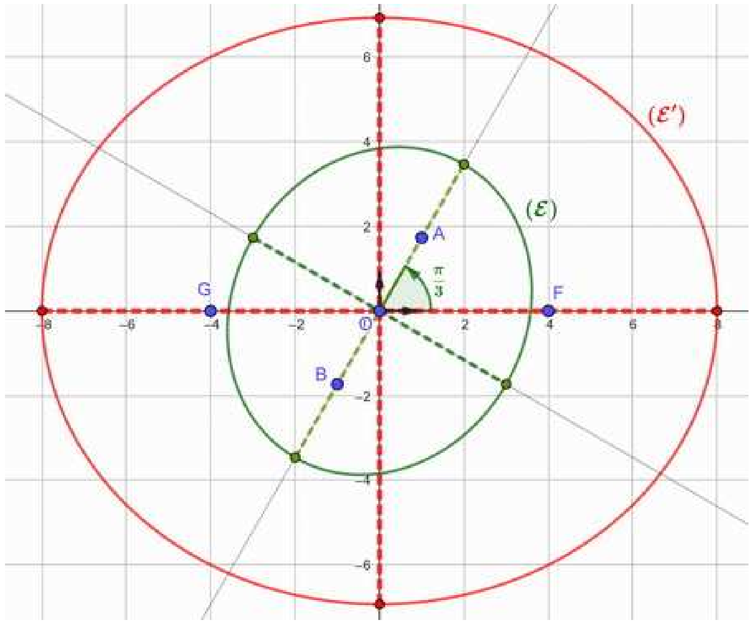
Or $\begin{cases} c = OF = 4 \\ e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ \dfrac{4}{a} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{a = 8} \Longrightarrow \boxed{a^2 = 64}$

$c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow 16 = 64 - b^2 \Longrightarrow \boxed{b^2 = 48} \Longrightarrow \boxed{b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}}$

Par conséquent, **une équation de** $(\mathcal{E}')$ **est :** $\boxed{\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1}$.

3. b) Construisons $(\mathcal{E}')$ puis $(\mathcal{E})$ dans le même repère.

Après avoir construit $(\mathcal{E}')$, la construction de $(\mathcal{E})$ s'effectue aisément en sachant que $(\mathcal{E})$ est l'image de $(\mathcal{E}')$ par la similitude s^{-1} dont le centre est O , le rapport est $\dfrac{1}{2}$ et l'angle est $\dfrac{\pi}{3}$.



4. Aicha a choisi au hasard l'un après l'autre, deux points distincts parmi les points O, A, B, F et G comme ceux par lesquels passe l'axe focal de l'ellipse $(\mathcal{E}')$.
Quelle est la probabilité qu'elle ait choisi deux points de l'axe focal de $(\mathcal{E}')$?

Parmi les cinq points O, A, B, F et G, l'axe focal de $(\mathcal{E}')$ comprend les trois points O, F et G .

Il y a $A_3^2 = 3 \times 2 = 6$ façons différentes de choisir successivement deux points parmi les trois points de l'axe focal.
Il y a $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$ façons différentes de choisir successivement deux points parmi les cinq points O, A, B, F et G .
Les choix de chaque point sont équiprobables.
Donc **la probabilité que Aicha ait choisi deux points de l'axe focal de $(\mathcal{E}')$ est égale à $\frac{6}{20}$, soit à $\boxed{\frac{3}{10}}$**.

Exercice 2 (5 points)
Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base d'un espace vectoriel E .
Soit f un endomorphisme de E .

1. Pour k appartenant à $\mathbb{R}$, on considère l'ensemble E_k des vecteurs $\vec{u}$ de E tels que $f(\vec{u}) = k\vec{u}$.

1. a) Démontrons que E_k est un sous-espace vectoriel de E .

Pour démontrer que E_k est un sous-espace vectoriel de E , nous vérifierons que $\vec{0} \in E_k$ et que, pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v}) \in E_k^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons : $\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} \in E_k \\ \lambda\vec{u} \in E_k \end{cases}$

- Puisque f est un endomorphisme de E , nous savons que $f(\vec{0}) = \vec{0}$.
Or $\vec{0} = k\,\vec{0}$.
D'où $f(\vec{0}) = k\vec{0}$.
Par conséquent, $\boxed{\vec{0} \in E_k}$.

- Pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v}) \in E_k^2$,

$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ car f est une fonction linéaire

$= k\vec{u} + k\vec{v}$ par définition de f

$= k(\vec{u} + \vec{v})$

$\Longrightarrow \quad f(\vec{u} + \vec{v}) = k(\vec{u} + \vec{v})$

Par conséquent, $\boxed{\vec{u} + \vec{v} \in E_k}$.

- Pour tout vecteur $\vec{u} \in E_k$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$ car $f$est une fonction linéaire

$= \lambda(k\vec{u})$ par définition de f

$= k(\lambda\vec{u})$

$\Longrightarrow \quad \boxed{f(\lambda\vec{u}) = k(\lambda\vec{u})}$

Par conséquent, $\boxed{\lambda\vec{u} \in E_k}$.

Nous en déduisons que $\boldsymbol{E_k}$ **est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$.**

1. b) On suppose que f vérifie l'égalité $f \circ f = 2f$.
Démontrons que $\vec{u} \in \mathrm{Im}f$ si et seulement si $\vec{u} \in E_2$.

- Démontrons d'abord que si $\vec{u} \in E_2$, alors $\vec{u} \in \mathrm{Im}f$.

$\vec{u} \in E_2 \quad \Longrightarrow \quad f(\vec{u}) = 2\vec{u}$

$\Longrightarrow \quad \vec{u} = \frac{1}{2} f(\vec{u})$

$\Longrightarrow \quad \vec{u} = f(\frac{1}{2}\vec{u})$ car $f$est une fonction linéaire

$\Longrightarrow \quad \vec{u} \in \mathrm{Im}f$

D'où **si** $\vec{u} \in E_2$, **alors** $\vec{u} \in \mathbf{Im}f$.

- Démontrons ensuite que si $\vec{u} \in \mathrm{Im}f$. alors $\vec{u} \in E_2$.

$\vec{u} \in \mathrm{Im}f \quad \Longrightarrow \quad \exists \vec{v} \in E : \vec{u} = f(\vec{v})$

Nous en déduisons que :

$f(\vec{u}) = f(f(\vec{v}))$

$= (f \circ f)(\vec{v})$

$= (2f)(\vec{v})$

$= 2f(\vec{v})$

$= 2\vec{u}$

$\Longrightarrow \quad \boxed{\vec{u} \in E_2}$

D'où **si** $\vec{u} \in \mathbf{Im}f$, **alors** $\vec{u} \in E_2$.

Par conséquent, $\vec{u} \in \mathbf{Im}f$ **si et seulement si** $\vec{u} \in E_2$.

2. On suppose ici qu'on a :

$f(\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 2\vec{j} \quad (1)$

$f(\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i} - 2\vec{j} \quad (2)$

$f(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = \vec{0} \quad (3)$

2. a) Nous devons démontrer que $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$, $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$ et $f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j}$.

- Additionnons membre à membre les égalités (1) et (2).

$$\begin{aligned} f(\vec{i}+\vec{j})+f(\vec{i}-\vec{j}) &= 2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{i}-2\vec{j} \\ &= 4\vec{i} \end{aligned}$$

Or $f(\vec{i}+\vec{j})+f(\vec{i}-\vec{j}) = f(\vec{i})+f(\vec{j})+f(\vec{i})-f(\vec{j})$
car f est une fonction linéaire
$= 2\,f(\vec{i})$

D'où $2\,f(\vec{i}) = 4\vec{i}$.

Par conséquent, $\boxed{f(\vec{i}) = 2\vec{i}}$

- Soustrayons membre à membre les égalités (1) et (2).

$$\begin{aligned} f(\vec{i}+\vec{j})-f(\vec{i}-\vec{j}) &= 2\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{i}+2\vec{j} \\ &= 4\vec{j} \end{aligned}$$

Or $f(\vec{i}+\vec{j})-f(\vec{i}-\vec{j}) = f(\vec{i})+f(\vec{j})-f(\vec{i})+f(\vec{j})$
car f est une fonction linéaire
$= 2\,f(\vec{j})$

D'où $2\,f(\vec{j}) = 4\vec{j}$.

Par conséquent, $\boxed{f(\vec{j}) = 2\vec{j}}$

- En utilisant la relation (3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}) = \vec{0} \quad &\Longrightarrow \quad f(\vec{i})-f(\vec{j})+f(\vec{k}) = \vec{0} \\ &\Longrightarrow \quad 2\,\vec{i}-2\,\vec{j}+f(\vec{k}) = \vec{0} \\ &\Longrightarrow \quad \boxed{f(\vec{k}) = -2\,\vec{i}+2\,\vec{j}} \end{aligned}$$

- Par conséquent, $\boxed{f(\vec{i}) = 2\vec{i} \quad , \quad f(\vec{j}) = 2\vec{j} \quad , \quad f(\vec{k}) = -2\vec{i}+2\vec{j}}$.

2. b) Nous devons donner la matrice M de f dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Nous savons par la question 2. a) que : $\begin{cases} f(\vec{i}) = 2\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k} \\ f(\vec{j}) = 0\vec{i}+2\vec{j}+0\vec{k} \\ f(\vec{k}) = -2\vec{i}+2\vec{j}+0\vec{k} \end{cases}$

Donc la matrice de la transformation linéaire f est $\boxed{M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

2. c) Démontrer que $f \circ f = 2\,f$ revient à démontrer que $M \times M = 2M$.

$$\begin{aligned} M \times M &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\times 2+0\times 0-2\times 0 & 2\times 0+0\times 2-2\times 0 & 2\times(-2)+0\times 2-2\times 0 \\ 0\times 2+2\times 0+2\times 0 & 0\times 0+2\times 2+2\times 0 & 0\times(-2)+2\times 2+2\times 0 \\ 0\times 2+0\times 0+0\times 0 & 0\times 0+0\times 2+0\times 0 & 0\times(-2)+0\times 2+0\times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$= 2M$

$\Longrightarrow \quad \boxed{M \times M = 2M}$

D'où $\boxed{f \circ f = 2\,f}$.

2. d) Nous devons déterminer par une de ses bases, le noyau $\mathrm{Ker}(f\ )$ de f .

Soit un vecteur $\vec{u}\,(x\,;\,y\,;\,z) \in E$.
Alors,

$$\begin{aligned}
\vec{u} \in \mathrm{Ker}(f) \quad &\Longrightarrow \quad f(\vec{u}) = \vec{0} \\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 2x = 2z \\ 2y = -2z \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $(z\ ,\ -z\,;\,z)$.
Autrement dit, $\vec{u} = z\vec{i} - z\vec{j} + z\vec{k}$, soit $\boxed{\vec{u} = z\,(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})}$.
Par conséquent, **Ker(f) est la droite vectorielle dont une base est** $(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$.

2. e) Nous devons déterminer l'image $\mathrm{Im}(f\ )$ de f .

- Par le théorème du rang, nous savons que : $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f\ )) + \dim(\mathrm{Ker}(f\ ))$.
Or $\dim(E) = 3$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f\ )) = 1$.
Donc : $\mathbf{dim(Im(}\boldsymbol{f}\ \mathbf{)) = 2.}$

- $(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ une base de l'espace vectoriel E .
Donc $f(\vec{i})\,,f(\vec{j})\,,f(\vec{k})$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f\ )$.
Mais nous savons que $\begin{cases} f(\vec{i}) = 2\vec{i} \\ f(\vec{j}) = 2\vec{j} \\ f(\vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j} = -f(\vec{i}) + f(\vec{j}) \end{cases}$
Dès lors, $f(\vec{i})\,,f(\vec{j})$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f\ )$.
Autrement dit, $2\vec{i}\,,2\vec{j}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f\ )$,
soit $\vec{i}\,,\vec{j}$ **est une famille génératrice de Im(f).**

- Par conséquent, **Im(f) est le plan vectoriel dont une base est** $(\vec{i}\,,\vec{j})$.

Exercice 3 (5 points)

f est une fonction définie sur $[0\,;\,2\pi]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\cos(x)$.
$(\mathcal{C}_f)$ est la courbe de f dans un repère orthogonal où en abscisse, on a 2 cm pour unité et en ordonnée 4 cm pour unité.

1. Démontrons que $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$.

- $\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\cos(x)}$

- $$\begin{aligned} f'(x) &= (\mathrm{e}^{-x})' \times \cos(x) + \mathrm{e}^{-x} \times (\cos(x))' \\ &= -\mathrm{e}^{-x} \times \cos(x) + \mathrm{e}^{-x} \times (-\sin(x)) \\ &= -\mathrm{e}^{-x} \times \cos(x) - \mathrm{e}^{-x} \times \sin(x) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos(x) - \mathrm{e}^{-x}\sin(x)}$

- $f''(x) = -\left(\mathrm{e}^{-x}\cos(x)\right)' - \left(\mathrm{e}^{-x}\sin(x)\right)'$

Or $\begin{cases} \left(\mathrm{e}^{-x}\cos(x)\right)' = -\mathrm{e}^{-x}\cos(x) - \mathrm{e}^{-x}\sin(x) \qquad \text{(voir ci-dessus)} \\ \left(\mathrm{e}^{-x}\sin(x)\right)' = (\mathrm{e}^{-x})' \times \sin(x) + \mathrm{e}^{-x} \times (\sin(x))' \\ \qquad = -\mathrm{e}^{-x} \times \sin(x) + \mathrm{e}^{-x} \times \cos(x) \\ \qquad = -\mathrm{e}^{-x}\sin(x) + \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \end{cases}$

D'où $f''(x) = -\left(-\mathrm{e}^{-x}\cos(x) - \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\right) - \left(-\mathrm{e}^{-x}\sin(x) + \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\right)$

$$= \mathrm{e}^{-x}\cos(x) + \mathrm{e}^{-x}\sin(x) + \mathrm{e}^{-x}\sin(x) - \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$$
$$= 2\mathrm{e}^{-x}\sin(x)$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{f''(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x}\sin(x)}$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) &= 2\,\mathrm{e}^{-x}\sin(x) + 2(-\mathrm{e}^{-x}\cos(x) - \mathrm{e}^{-x}\sin(x)) + 2\,\mathrm{e}^{-x}\cos(x) \\ &= 2\,\mathrm{e}^{-x}\sin(x) - 2\mathrm{e}^{-x}\cos(x) - 2\mathrm{e}^{-x}\sin(x) + 2\,\mathrm{e}^{-x}\cos(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0}$.

2. Nous devons étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\cos(x) - \mathrm{e}^{-x}\sin(x) \\ &= \mathrm{e}^{-x}\left(-\cos(x) - \sin(x)\right) \end{aligned}$$

Puisque l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, le signe de f'(x) est le signe de $\left(-\cos(x) - \sin(x)\right)$

Résolvons l'équation $-\cos(x) - \sin(x) = 0$ dans l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$.

$$\begin{aligned} -\cos(x) - \sin(x) = 0 &\iff \sin(x) = -\cos(x) \\ &\iff \tan(x) = -1 \\ &\iff x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{4} \end{aligned}$$

D'où, pour tout x dans $[0\,;\,2\pi]$, $-\cos(x) - \sin(x) = 0 \iff x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$.

La fonction $x \mapsto -\cos(x) - \sin(x)$ étant continue sur $[0\,;\,2\pi]$, le signe de $-\cos(x) - \sin(x)$ ne change pas pour x appartenant à $[0\,;\,\frac{3\pi}{4}]$.

Il en est de même pour x appartenant aux intervalles $[\frac{3\pi}{4}\,;\,\frac{7\pi}{4}]$ et $[\frac{7\pi}{4}\,;\,2\pi]$.

Dès lors,

$$x = 0 \in [0\,;\,\frac{3\pi}{4}] \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} -\cos(x) - \sin(x) &= -\cos(0) - \sin(0) \\ &= -1 - 0 \\ &= -1 < 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\forall\, x \in [0\,;\,\frac{3\pi}{4}],\ -\cos(x) - \sin(x) < 0}$

$$x = \pi \in [\frac{3\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}] \implies \begin{aligned} -\cos(x) - \sin(x) &= -\cos(\pi) - \sin(\pi) \\ &= -(-1) - 0 \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\forall\, x \in [\frac{3\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}],\ -\cos(x) - \sin(x) > 0}$$

$$x = 2\pi \in [\frac{7\pi}{4} ; 2\pi] \implies \begin{aligned} -\cos(x) - \sin(x) &= -\cos(2\pi) - \sin(2\pi) \\ &= -1 - 0 \\ &= -1 < 0 \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\forall\, x \in [\frac{7\pi}{4} ; 2\pi],\ -\cos(x) - \sin(x) < 0}$$

Nous pouvons dresser le tableau de signes de f' et de variations de f .

Calculs préliminaires :

$f(0) = \mathrm{e}^0 \cos(0) = 1 \times 1 = 1$
$f(\frac{3\pi}{4}) = \mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}} \cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}}$
$f(\frac{7\pi}{4}) = \mathrm{e}^{-\frac{7\pi}{4}} \cos(\frac{7\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{7\pi}{4}}$
$f(2\pi) = \mathrm{e}^{-2\pi} \cos(-2\pi) = \mathrm{e}^{-2\pi} \times 1 = \mathrm{e}^{-2\pi}$

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$-\cos(x) - \sin(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{4}}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{7\pi}{4}}$	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-2\pi}$

3. a) Démontrons que : $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

En effet, pour tout $x \in [0\ ,\ 2\pi]$,

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-x} > 0 \\ -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \end{cases} \implies -\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$$

Par conséquent, $\boxed{-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}}$.

3. b) Nous devons déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les courbes d'équations $y = \mathrm{e}^{-x}$ et $y = -\mathrm{e}^{-x}$.

- Déterminons les coordonnées des éventuels points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$.

Les abscisses de ces points d'intersection sont les solutions de l'équation : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \iff \mathrm{e}^{-x}\cos(x) = \mathrm{e}^{-x}$$
$$\iff \cos(x) = 1 \quad \text{en divisant les deux membres par } \mathrm{e}^{-x} \neq 0$$

$\iff \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2\pi$

D'où **les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$ sont :** $(0\,;\,1)$ **et** $(2\pi\,;\,\mathbf{e}^{-2\pi})$.

- Déterminons les coordonnées des éventuels points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec la courbe d'équation $y = -\mathrm{e}^{-x}$.

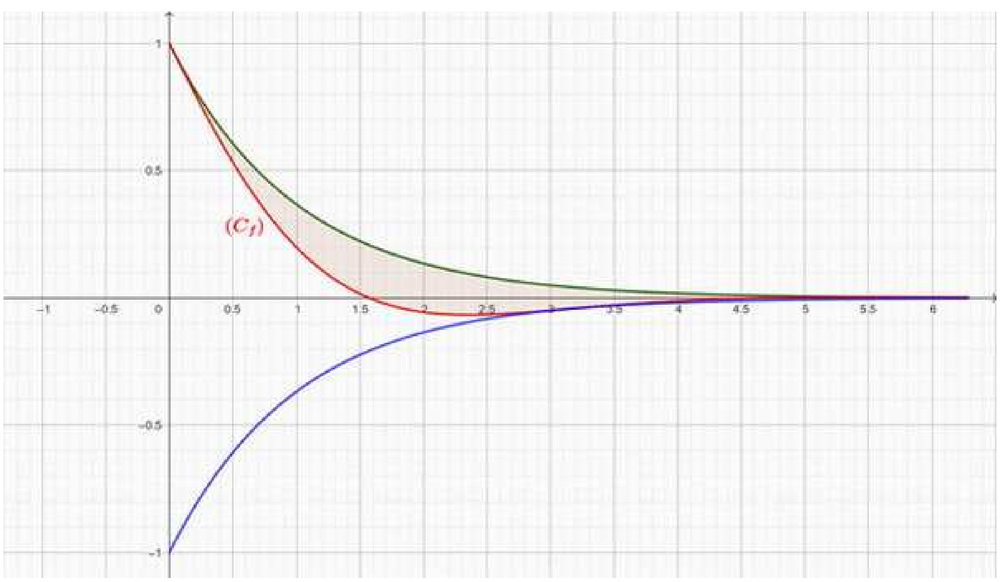
Les abscisses de ces points d'intersection sont les solutions de l'équation : $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.

$$\begin{aligned} f(x) = -\mathrm{e}^{-x} &\iff \mathrm{e}^{-x}\cos(x) = -\mathrm{e}^{-x} \\ &\iff \cos(x) = -1 \quad \text{en divisant les deux membres par } \mathrm{e}^{-x} \neq 0 \\ &\iff x = \pi \end{aligned}$$

D'où **les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec la courbe d'équation $y = -\mathrm{e}^{-x}$ sont :** $(\pi\,;\,-\mathbf{e}^{-\pi})$.

4. Sur $[0\,;\,2\pi]$, traçons dans le même repère, les courbes d'équations $y = \mathrm{e}^{-x}$ et $y = -\mathrm{e}^{-x}$ puis la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

La courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$ est représentée en vert.
La courbe d'équation $y = -\mathrm{e}^{-x}$ est représentée en bleu.
La courbe $(\mathcal{C}_f)$ est représentée en rouge.



5. Calculons l'aire de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C}_f)$ et la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0\,;\,2\pi]$.
On pourra utiliser la question 1 .

Puisque la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$ est située au-dessus de $(\mathcal{C}_f)$ sur $[0\,;\,2\pi]$, l'aire demandée se calcule par : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\mathrm{e}^{-x} - f(x)\right)\,dx$.

Or $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\mathrm{e}^{-x} - f(x)\right)\,dx = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x}\,dx - \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

- Calculons $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x}\,dx$.

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x}\,dx = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{2\pi} = (-\mathrm{e}^{-2\pi}) - (-\mathrm{e}^{0}) = -\mathrm{e}^{-2\pi} + 1$

$\Longrightarrow \boxed{\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x}\,dx = 1 - \mathrm{e}^{-2\pi}}$

- Calculons $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

En utilisant la question 1 , nous obtenons :

$$\begin{aligned} f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2f(x) = -f''(x) - 2f'(x) \\ &\Longleftrightarrow \quad f(x) = -\frac{1}{2}f''(x) - f'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \int_0^{2\pi} f(x)\,dx &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f''(x)\,dx - \int_0^{2\pi} f'(x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\Big[f'(x)\Big]_0^{2\pi} - \Big[f(x)\Big]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{1}{2}\Big[-\mathrm{e}^{-x}\cos(x) - \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\Big]_0^{2\pi} - \Big[\mathrm{e}^{-x}\cos(x)\Big]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{-x}\cos(x) + \mathrm{e}^{-x}\sin(x) - 2\,\mathrm{e}^{-x}\cos(x)\Big]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{-x}\sin(x) - \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\Big]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{-x}\Big(\sin(x) - \cos(x)\Big)\Big]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{-2\pi}\Big(\sin(2\pi) - \cos(2\pi)\Big) - \mathrm{e}^{0}\Big(\sin(0) - \cos(0)\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{-2\pi}\Big(0 - 1\Big) - 1 \times \Big(0 - 1\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big(-\mathrm{e}^{-2\pi} + 1\Big) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\Big(1 - \mathrm{e}^{-2\pi}\Big)}$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \Big(\mathrm{e}^{-x} - f(x)\Big)\,dx &= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x}\,dx - \int_0^{2\pi} f(x)\,dx \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-2\pi}) - \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2\pi}) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2\pi}) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{\displaystyle\int_0^{2\pi} \Big(\mathrm{e}^{-x} - f(x)\Big)\,dx = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})}$

Or dans le repère, l'unité de longueur mesure 2 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée.
Donc l'unité d'aire est égale à 8 cm².

$8 \times \dfrac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2\pi}) = 4\,(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})$.

Par conséquent, **l'aire de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C}_f)$ et la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0\,;\,2\pi]$ est égale à** $\boxed{4\,(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})\ \mathrm{cm}^2}$.

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (15 POINTS)

1. Nous devons déterminer en combien d'années le gisement A s'épuisera.

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ telle que u_n représente, en m^3, la quantité de gaz extraite du gisement A au temps $t = n$.
Nous savons que $u_1 = 5,01$ et que la quantité de gaz extraite chaque année augmente de 0,75 milliards de m^3 par rapport à celle de l'année précédente.

Dès lors, avant que le gisement ne soit épuisé, nous obtenons : $u_{n+1} = u_n + 0,75$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est une suite arithmétique de raison $r = 0{,}75$ dont le premier terme est $u_1 = 5,01$.

La quantité totale S_n de gaz extraite au bout de n années (avant épuisement du gisement) est la somme de ces n termes.

$$S_n = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$\Longrightarrow S_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$$

Or $u_n = u_1 + (n-1) \times r$
$= 5,01 + (n-1) \times 0,75$
$= 5,01 + 0,75n - 0,75$
$= 4,26 + 0,75n$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{u_n = 4,26 + 0,75n}$$

Nous en déduisons que

$$S_n = n \times \frac{5,01 + 4,26 + 0,75n}{2}$$
$$= n \times \frac{9,27 + 0,75n}{2}$$
$$= n \times (4,635 + 0,375n)$$

$$\Longrightarrow \boxed{S_n = 0,375n^2 + 4,635n}$$

Donc la quantité totale S_n de gaz extraite au bout de n années (avant épuisement du gisement) s'exprime par $0,375n^2 + 4,635n$.
Nous devons déterminer en combien d'années le gisement A s'épuisera, ce qui revient à déterminer le plus petit nombre naturel n tel que $0,375n^2 + 4,635n \geqslant 100$, soit tel que $0,375n^2 + 4,635n - 100 \geqslant 0$

Résolvons l'inéquation $0,375n^2 + 4,635n - 100 \geqslant 0$

<u>Discriminant</u> :

$$\Delta = 4,635^2 - 4 \times 0,375 \times (-100)$$
$$= 21,483225 + 150$$
$$= 171,483225 > 0$$

<u>Racines</u> :

$$n_1 = \frac{-4,635 - \sqrt{171,483225}}{0,75} \approx -23,64$$
$$n_2 = \frac{-4,635 + \sqrt{171,483225}}{0,75} \approx 11,28$$

<u>Tableau de signe du trinôme $0,375n^2 + 4,635n - 100$ dans $\mathbb{R}$.</u> :

n	$\approx -23,64$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $\approx 11,28$
$0,375n^2+4,635n-100$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\;-$ $\;-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

Nous en déduisons que le plus petit nombre naturel n vérifiant l'inéquation $0,375n^2+4,635n-100 \geqslant 0$ est $\boldsymbol{n} = \mathbf{12}$.

Par conséquent, **le gisement A s'épuisera en 12 ans.**

2. Si $q(t)$ est la quantité totale (en milliards de m^3) de gaz extraite du gisement B à la date t, alors le taux d'extraction ou de consommation de gaz du gisement à cette date t est $q'(t) = \left(\dfrac{1}{2t+1}+0,02t\right)$ (milliards de m^3 par an).

L'ensemble des primitives q de la fonction q' est défini par $q(t) = \dfrac{1}{2}\ln(2t+1) + 0,02\times\dfrac{t^2}{2}+k \quad (k\in\mathbb{R})$, soit par $q(t) = \dfrac{1}{2}\ln(2t+1)+0,01t^2+k \quad (k\in\mathbb{R})$

Or nous savons que $q(0)=0$.

$$q(0)=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}\ln(1)+0+k=0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{k=0}$$

Donc la quantité totale (en milliards de m^3) de gaz extraite du gisement B à la date t est donnée par $q(t)=\dfrac{1}{2}\ln(2t+1)+0,01t^2$.

Nous devons calculer le nombre d'années d'extraction qui suffiront à ce pays pour épuiser le contenu du gisement B.
Pour ce faire, déterminons un encadrement de la valeur t vérifiant l'équation $q(t)=100$.

- La fonction q est continue sur $]0\,;+\infty[$ (somme de deux fonctions continues sur $]0\,;+\infty[$)

- La fonction q est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
En effet,

$$\begin{aligned}
\forall\, t\in\,]0\,;+\infty[,\quad \begin{cases}2t+1>0\\ 0,02t>0\end{cases} \quad&\Longrightarrow\quad \frac{1}{2t+1}+0,02t>0\\
&\Longrightarrow\quad \boxed{g'(t)>0}\\
&\Longrightarrow\quad \boxed{\text{g est strictement croissante sur }]0\,;+\infty[}
\end{aligned}$$

- $\begin{cases}f(98)\approx 98,6816<100\\ f(99)\approx 100,6567>100\end{cases} \quad\Longrightarrow\quad f(98)<100<f(99)$

Selon le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $q(t)=100$ admet une seule solution dans l'intervalle $[98\,;99]$.

Par conséquent, **le gisement B sera épuisé à la 99$^{\text{ième}}$ année.**

3. Au niveau du gisement C, les taux d'extraction ou de consommation de gaz du gisement (aux dates t) sont proportionnels aux quantités de gaz extraites à ces dates.
A la date $t=1$, ce taux était 5,01 milliards de m^3 par an et la quantité totale du gaz extraite du gisement était également de 5,01 milliards de m^3.

Donc à tout temps t, $\dfrac{q'(t)}{q(t)}=\dfrac{q'(1)}{q(1)}=\dfrac{5,01}{5,01}=1 \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{q'(t)}{q(t)}=1 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{q'(t)=q(t)}$.

Les solutions de l'équation $q'(t)=q(t)$ sont les fonctions de la forme $q(t)=C\,\mathrm{e}^t$ où C est une constante.

Or $\begin{cases} q(t) = C\,\mathrm{e}^{t} \\ q(1) = 5,01 \end{cases} \implies C \times \mathrm{e}^{1} = 5,01$

$$\implies C \times \mathrm{e} = 5,01$$

$$\implies C = \frac{5,01}{\mathrm{e}}$$

$$\implies C = 5,01\,\mathrm{e}^{-1}$$

D'où $q(t) = 5,01\,\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e}^{t} \implies \boxed{q(t) = 5,01\,\mathrm{e}^{t-1}}$

Le gisement sera vidé au temps t tel que $q(t) = 100$.

$$\begin{aligned} q(t) = 100 &\iff 5,01\,\mathrm{e}^{t-1} = 100 \\ &\iff \mathrm{e}^{t-1} = \frac{100}{5,01} \\ &\iff t - 1 = \ln\left(\frac{100}{5,01}\right) \\ &\iff \boxed{t = 1 + \ln\left(\frac{100}{5,01}\right) \approx 3,99} \end{aligned}$$

Par conséquent, **après l'inauguration, il faudra 4 ans à ce pays pour vider le gisement C de son contenu.**