Correction

Bac Cameroun 2023 série C

Partie A : Évaluation des ressources (13,25 points)

Exercice 1 (4,5 points)

On considère les fonctions numériques f et h de la variable réelle x définies sur $\mathscr{D} =]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x - 2 - \ln\sqrt{x-1}$ et $h(x) = \dfrac{2x - 2 - \ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0\,;\,\vec{i}, \vec{j})$.

1. Nous devons dresser le tableau de variations de f sur $\mathscr{D}$.

Déterminons d'abord les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.

- • $\lim\limits_{x\to1^+} (x-2) = 1 - 2 = -1$.
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^+} \sqrt{x-1} = 0^+ \\ \lim\limits_{X\to0^+} \ln X = -\infty \end{cases} \underset{(X=\sqrt{x-1})}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to1^+} \ln\sqrt{x-1} = -\infty$

$\Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to1^+} (x - 2 - \ln\sqrt{x-1}) = -\infty$

$\Longrightarrow \quad \boxed{\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty}$

- $$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} (x - 2 - \ln\sqrt{x-1}) &= \lim_{x\to+\infty} (x - 1 - 1 - \ln\sqrt{x-1}) \\ &\underset{(X=x-1)}{=} \lim_{X\to+\infty} (X - 1 - \ln\sqrt{X}) \\ &= \lim_{X\to+\infty} (X - \ln\sqrt{X} - 1) \\ &= \lim_{X\to+\infty} (\ln e^X - \ln\sqrt{X} - 1) \\ &= \lim_{X\to+\infty} \ln\left(\frac{e^X}{\sqrt{X}}\right) - 1 \\ &= +\infty\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

Déterminons ensuite le signe de la dérivée $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathscr{D}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x-2)' + (\ln\sqrt{x-1})' \\ &= 1 + \frac{(\sqrt{x-1})'}{\sqrt{x-1}} \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{2(x-1)}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{f'(x) = 1 + \frac{1}{2(x-1)}}$$

Or $x \in \mathscr{D} \quad \Longrightarrow \quad x > 1$

$\Longrightarrow \quad x - 1 > 0$

$\Longrightarrow \quad 1 + \dfrac{1}{2(x-1)} > 0$

$$\Longrightarrow \boxed{f'(x) > 0}$$

Nous en déduisons que la fonction f est strictement croissante sur $\mathscr{D}$.

D'où le tableau de variations de f sur $\mathscr{D}$.

x	1				$+\infty$
$f'(x)$	$\vert\vert$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$\vert\vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Montrons que le réel 2 est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]1\,;\,+\infty[$.
Il s'ensuit que f réalise une bijection de $]1\,;\,+\infty[$ sur $f(]1\,;\,+\infty[) = \mathbb{R}$.

Or $f(2) = 2 - 2 + \ln\sqrt{2-1} = \ln 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f(2) = 0}$

Dès lors, **le réel 2 est l'unique solution de l'équation** $f(x) = 0$.

3. Nous devons en déduire suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$.

Complétons le tableau de variation de f :

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\vert\vert$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$\vert\vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Nous en déduisons que

- si $x \in]1\,;\,2[$, alors $f(x) < 0$,
- si $x \in]2\,;\,+\infty[$, alors $f(x) > 0$.

4. Nous devons montrer que pour tout $x \in]1\,;\,+\infty[$, $h'(x) = \dfrac{f(x)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$.

La fonction h est dérivable sur $]1\,;\,+\infty[$.

$$h'(x) = \left(\frac{2x - 2 - \ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}\right)'$$

$$= \frac{(2x-2-\ln(x-1))' \times 2\sqrt{x-1} - (2x-2-\ln(x-1)) \times (2\sqrt{x-1})'}{4(x-1)}$$

$$= \frac{(2 - \dfrac{1}{x-1}) \times 2\sqrt{x-1} - (2x-2-\ln(x-1)) \times \dfrac{2}{2\sqrt{x-1}}}{4(x-1)}$$

$$= \frac{(\dfrac{2x-2-1}{x-1}) \times 2\sqrt{x-1} - (2x-2-\ln(x-1)) \times \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}}{4(x-1)}$$

$$= \frac{\dfrac{2(2x-3)}{\sqrt{x-1}} - \dfrac{2x-2-\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}}{4(x-1)}$$

$$= \frac{\dfrac{4x-6-2x+2+\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}}{4(x-1)}$$

$$= \frac{2x-4+\ln(x-1)}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{2x-4+2\times\frac{1}{2}\ln(x-1)}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{2x-4+2\times\ln\sqrt{x-1}}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{2(x-2+\ln\sqrt{x-1})}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{x-2+\ln\sqrt{x-1}}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$= \frac{f(x)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{h'(x) = \frac{f(x)}{2\sqrt{x-1}(x-1)}}$$

Nous devons en déduire les variations de la fonction h .

$$\begin{aligned} x \in \,]1\,;\,+\infty[\quad &\Longrightarrow \quad x > 1 \\ &\Longrightarrow \quad x-1 > 0 \\ &\Longrightarrow \quad 2\sqrt{x-1}(x-1) > 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le signe de $h'(x)$ est le signe de $f(x)$.
Or ce signe a été étudié à la question 3).
Nous obtenons ainsi le tableau de signes de $h'(x)$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

x	1		2		$+\infty$
$h'(x)$	||	$-$	0	$+$	

Par conséquent, h est

- strictement décroissante sur $]1\,;\,2[$
- strictement croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

5. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n} h\left(2 + \frac{j}{n}\right)$ et on pose $I = \int_2^3 h(x)\,\mathrm{d}x$.

5. a) Nous devons calculer $\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire la valeur de I.

Formule de l'intégrale par parties : $\int_2^3 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_2^3 - \int_2^3 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x-1) & \Longrightarrow \quad u'(x) = \dfrac{1}{x-1} \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \Longrightarrow \quad v(x) = \sqrt{x-1} \end{cases}$$

Dès lors,
$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x &= \Big[\sqrt{x-1}\,\ln(x-1)\Big]_2^3 - \int_2^3 \frac{1}{x-1}\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[\sqrt{x-1}\,\ln(x-1)\Big]_2^3 - \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[\sqrt{x-1}\,\ln(x-1)\Big]_2^3 - \Big[2\sqrt{x-1}\Big]_2^3 \\
&= \left[\Big(\ln(x-1) - 2\Big)\sqrt{x-1}\right]_2^3 \\
&= \Big[(\ln 2 - 2)\sqrt{2}\Big] - \Big[(\ln 1 - 2)\sqrt{1}\Big] \\
&= (\ln 2 - 2)\sqrt{2} + 2
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = (\ln 2 - 2)\sqrt{2} + 2}$$

Déduisons en la valeur de I.

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^3 \frac{2x - 2 - \ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_2^3 \frac{2x-2}{2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x - \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x - \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_2^3 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x - \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x - \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_2^3 (x-1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x - \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\left[(x-1)\sqrt{x-1}\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\left[2\sqrt{2} - 1\sqrt{1}\right] - \left[(\ln 2 - 2)\sqrt{2} + 2\right] \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} - \sqrt{2}\ln 2 + 2\sqrt{2} - 2
\end{aligned}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} - \frac{6}{3} - \sqrt{2}\ln 2$$

$$= \frac{10\sqrt{2}-8}{3} - \sqrt{2}\ln 2$$

$$\Longrightarrow \boxed{I = \frac{10\sqrt{2}-8}{3} - \sqrt{2}\ln 2}$$

5. b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et j un entier naturel tel que $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

Démontrons que pour tout $x \in [2\ ;\ +\infty[$, $\frac{1}{n}\, h\left(2+\frac{j}{n}\right) \leqslant \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}} h(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\, h\left(2+\frac{j+1}{n}\right)$.

Soit x dans l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$ vérifiant la relation : $2+\frac{j}{n} \leqslant x \leqslant 2+\frac{j+1}{n}$.

Nous avons montré que la fonction h est strictement croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.
Dès lors,

$$2+\frac{j}{n} \leqslant x \leqslant 2+\frac{j+1}{n} \quad \Longrightarrow \quad h\left(2+\frac{j}{n}\right) \leqslant h(x) \leqslant h\left(2+\frac{j+1}{n}\right)$$

$$\Longrightarrow \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}} h\left(2+\frac{j}{n}\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}} h(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}} h\left(2+\frac{j+1}{n}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow h\left(2+\frac{j}{n}\right)\,\Big[x\Big]_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}} \leqslant \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}} h(x)\,\mathrm{d}x \leqslant h\left(2+\frac{j+1}{n}\right)\,\Big[x\Big]_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}}$$

$$\Longrightarrow h\left(2+\frac{j}{n}\right)\left[(2+\frac{j+1}{n}) - (2+\frac{j}{n})\right] \leqslant \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}} h(x)\,\mathrm{d}x \leqslant h\left(2+\frac{j+1}{n}\right)\left[(2+\frac{j+1}{n}) - (2+\right.$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{n}\, h\left(2+\frac{j}{n}\right) \leqslant \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}} h(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\, h\left(2+\frac{j+1}{n}\right)}$$

5. c) Nous devons en déduire que : $u_n - \frac{h(3)}{n} \leqslant I \leqslant u_n - \frac{h(2)}{n}$.

En utilisant la question précédente, nous obtenons :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n}\, h\left(2+\frac{j}{n}\right) \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}} h(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n}\, h\left(2+\frac{j+1}{n}\right)$$

Or • $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n}\, h\left(2+\frac{j}{n}\right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n}\, h\left(2+\frac{j}{n}\right) - \frac{1}{n}\, h\left(2+\frac{n}{n}\right)$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n}\, h\left(2+\frac{j}{n}\right) - \frac{1}{n}\, h\,(3)$$

• $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{3} h(x)\,\mathrm{d}x = I$

• $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n}\, h\left(2+\frac{j+1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\, h\left(2+\frac{k}{n}\right)$ avec $k = j+1$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n}\, h\left(2+\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} h\left(2+\frac{0}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n}\, h\left(2+\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} h\,(2)$$

D'où $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n} h\left(2+\frac{j}{n}\right) - \frac{1}{n} h(3) \leqslant I \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} h\left(2+\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n} h(2)$

soit $\boxed{u_n - \dfrac{h(3)}{n} \leqslant I \leqslant u_n - \dfrac{h(2)}{n}}$

5.d) Nous devons calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En utilisant la question précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_n - \frac{h(3)}{n} \leqslant I \leqslant u_n - \frac{h(2)}{n} \quad & \Longrightarrow \quad -\left(u_n - \frac{h(3)}{n}\right) \geqslant -I \geqslant -\left(u_n - \frac{h(2)}{n}\right) \\ & \Longrightarrow \quad \frac{h(2)}{n} - u_n \leqslant -I \leqslant \frac{h(3)}{n} - u_n \\ & \Longrightarrow \quad \frac{h(2)}{n} \leqslant u_n - I \leqslant \frac{h(3)}{n} \end{aligned}$$

Or $\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{h(2)}{n} = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{h(3)}{n} = 0 \end{cases}$

Donc selon le théorème d'encadrement (théorème des gendarmes), nous obtenons : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = I$.

Par conséquent, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = I = \frac{10\sqrt{2}-8}{3} - \sqrt{2}\ln 2}$

Exercice 2 (4,25 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'équation $(E) : z^2 + \Big(-3\cos\alpha - 1 + \mathrm{i}(3 - 5\sin\alpha)\Big)z + 5\sin\alpha - 2 + \mathrm{i}(-3\cos\alpha - 1) = 0$ d'inconnue complexe z où α est un nombre réel.

1. Montrons que $-\mathrm{i}$ est une solution de (E).

En remplaçant z par $-\mathrm{i}$ dans le membre de gauche de l'équation (E), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &(-\mathrm{i})^2 + \Big(-3\cos\alpha - 1 + \mathrm{i}(3 - 5\sin\alpha)\Big) \times (-\mathrm{i}) + 5\sin\alpha - 2 + \mathrm{i}(-3\cos\alpha - 1) \\ &\quad = -1 + 3\mathrm{i}\cos\alpha + \mathrm{i} + (3 - 5\sin\alpha) + 5\sin\alpha - 2 - 3\mathrm{i}\cos\alpha - \mathrm{i} \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

Puisque $-\mathrm{i}$ vérifie l'équation (E), nous en déduisons que **$-\mathrm{i}$ est une solution de** (E).

2. Nous devons en déduire l'autre solution.

Nous rappelons que si l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ admet deux solutions z_1 et z_2, alors $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Par la question 1, nous savons que $-\mathrm{i}$ est solution de (E).
Notons $z_1 = -\mathrm{i}$ et z_2 l'autre solution de (E).
Alors :

$$\begin{aligned} -\mathrm{i} + z_2 = -\frac{-3\cos\alpha - 1 + \mathrm{i}(3 - 5\sin\alpha)}{1} \quad & \Longleftrightarrow \quad -\mathrm{i} + z_2 = 3\cos\alpha + 1 - \mathrm{i}(3 - 5\sin\alpha) \\ & \Longleftrightarrow \quad -\mathrm{i} + z_2 = 3\cos\alpha + 1 - 3\mathrm{i} + 5\mathrm{i}\sin\alpha \\ & \Longleftrightarrow \quad z_2 = 3\cos\alpha + 1 - 2\mathrm{i} + 5\mathrm{i}\sin\alpha \end{aligned}$$

$$\iff \quad \boxed{z_2 = 3\cos\alpha + 1 + \mathrm{i}(-2 + 5\sin\alpha)}$$

3. Déterminons l'ensemble des points A_α d'affixe $z_\alpha = 3\cos\alpha + 1 + \mathrm{i}(-2+5\sin\alpha)$ lorsque α décrit $\mathbb{R}$.

Posons $z_\alpha = x + \mathrm{i}y \quad (x, y \in \mathbb{R})$.
Dans ce cas, nous obtenons :

$$\begin{cases} z_\alpha = x + \mathrm{i}y \\ z_\alpha = 3\cos\alpha + 1 + \mathrm{i}(-2+5\sin\alpha) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3\cos\alpha + 1 \\ y = -2 + 5\sin\alpha \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x-1}{3} \\ \sin\alpha = \dfrac{y+2}{5} \end{cases}$$

Appliquons la formule fondamentale de trigonométrie.

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \implies \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{5}\right)^2 = 1$$
$$\implies \frac{x^2-2x+1}{9} + \frac{y^2+4y+4}{25} = 1$$
$$\implies \frac{25(x^2-2x+1) + 9(y^2+4y+4)}{225} = 1$$
$$\implies \frac{25x^2 - 50x + 25 + 9y^2 + 36y + 36}{225} = 1$$
$$\implies \frac{25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y + 61}{225} = 1$$
$$\implies 25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y + 61 = 225$$
$$\implies \boxed{25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0}$$

Par conséquent, **l'ensemble des points A_α est la conique (ϵ) d'équation :** $\boxed{25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0}$.

4. Soit $\Omega(1\ ;\ -2)$ un point du plan.

4. a) Nous devons déterminer une équation de (ϵ) dans le repère $(\Omega\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.

Soit M un point du plan appartenant à la conique (ϵ),
$(x\ ;\ y)$ les coordonnées du point M dans le repère $(0\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$
$(X\ ;\ Y)$ les coordonnées du point M dans le repère $(\Omega\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$

Les formules du changement de repère sont alors : $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 2 \end{cases}$, soit $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 2 \end{cases}$.

Or nous avons montré dans la question 3) que :

$$M(x\ ;\ y) \in (\epsilon) \iff 25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$$
$$\iff \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{5}\right)^2 = 1$$
$$\iff \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

Par conséquent, **une équation de (ϵ) dans le repère $(\Omega\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ est** $\boxed{\dfrac{X^2}{9} + \dfrac{Y^2}{25} = 1}$.

4. b) Nous devons en déduire la nature exacte de (ϵ), préciser son excentricité et les coordonnées de ses sommets dans le repère $(\Omega\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.

Rappelons qu'une ellipse centrée à l'origine du repère, dont les sommets sont $A(0\,;\,a)$ et $A'(0\,;\,-a)$ sur l'axe des ordonnées, $C(b\,;\,0)$ et $C'(-b\,;\,0)$ sur l'axe des abscisses, admet une équation de la forme $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$.

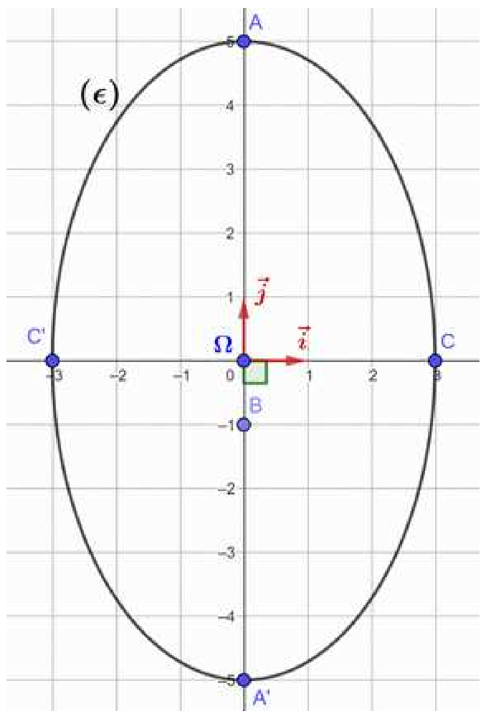
Nous avons montré qu'une équation de (ϵ) dans le repère $(\Omega\,;\,\vec{i},\vec{j})$ est $\boxed{\dfrac{Y^2}{25}+\dfrac{X^2}{9}=1}$.

Dès lors (ϵ) est une ellipse centrée en $\Omega(1\,;\,-2)$.

Son excentricité est $\mathrm{e}=\dfrac{c}{a}$ où $c=\sqrt{a^2-b^2}$, soit $\mathrm{e}=\dfrac{\sqrt{25-9}}{5}=\dfrac{\sqrt{16}}{5}=\dfrac{4}{5}$.

Les coordonnées de ses sommets dans le repère $(\Omega\,;\,\vec{i},\vec{j})$ sont $\boxed{A(0\,;\,5)\ ,\ A'(0\,;\,-5)\ ,\ C(3\,;\,0)\ ,\ C'(-3\,;\,0)}$

4. c) Construisons (ϵ) dans le repère $(\Omega\,;\,\vec{i},\vec{j})$.



5. Soient B et C deux points d'affixes respectives **-i** et 3.

5. a) Nous devons déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S de centre Ω telle que $S(C)=B$

Nous savons que l'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z'=az+b$ avec $a\neq 0$.
Comme le point Ω est le centre de la similitude S , nous savons que $S(\Omega)=\Omega$.
Nous en déduisons que

$$\begin{cases}S(\Omega)=\Omega\\ S(C)=B\end{cases}\iff\begin{cases}z_\Omega=a\,z_\Omega+b\\ z_B=a\,z_C+b\end{cases}\iff\begin{cases}1-2\mathrm{i}=a\times(1-2\mathrm{i})+b\\ -\mathrm{i}=a\times 3+b\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}(1-2\mathrm{i})a+b=1-2\mathrm{i}\\ 3a+b=-\mathrm{i}\end{cases}\iff\begin{cases}(1-2\mathrm{i})a+b-3a-b=1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}\\ b=-3a-\mathrm{i}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}(1-2\mathrm{i})a-3a=1-\mathrm{i}\\ b=-3a-\mathrm{i}\end{cases}\iff\begin{cases}(1-2\mathrm{i}-3)a=1-\mathrm{i}\\ b=-3a-\mathrm{i}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}(-2-2\mathrm{i})a = 1-\mathrm{i}\\ b=-3a-\mathrm{i}\end{cases} \iff \begin{cases}-2(1+\mathrm{i})a = 1-\mathrm{i}\\ b=-3a-\mathrm{i}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}-2(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})a = (1-\mathrm{i})^2\\ b=-3a-\mathrm{i}\end{cases} \iff \begin{cases}-2(1+1)a = 1-2\mathrm{i}-1\\ b=-3a-\mathrm{i}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}-4a=-2\mathrm{i}\\ b=-3a-\mathrm{i}\end{cases} \iff \begin{cases}a=\dfrac{\mathrm{i}}{2}\\ b=-3a-\mathrm{i}\end{cases} \iff \begin{cases}a=\dfrac{\mathrm{i}}{2}\\ b=\dfrac{-3\mathrm{i}}{2}-\mathrm{i}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}a=\dfrac{\mathrm{i}}{2}\\ b=\dfrac{-5\mathrm{i}}{2}\end{cases}$$

D'où, **la similitude directe S a pour écriture complexe :** $\boxed{z'=\frac{\mathbf{i}}{2}z-\frac{5\mathbf{i}}{2}}$.

5. b) Déduisons en l'angle de S .

L'angle de S est égal à $\boxed{\arg(\frac{\mathrm{i}}{2})=\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 3 (4,5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(0\ ;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soient A (-1 ; -1 ; 0) ; B (0 ; 0 ; 2) et C (-1 ; 1 ; 2) trois points de l'espace.

1. Nous devons montrer que les points A , B et C définissent un plan.
Nous allons montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$$\begin{cases}A\,(-1\ ;\ -1\ ;\ 0)\\ B\,(0\ ;\ 0\ ;\ 2)\end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-(-1)\\0-(-1)\\2-0\end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}$$

$$\begin{cases}A\,(-1\ ;\ -1\ ;\ 0)\\ C\,(-1\ ;\ 1\ ;\ 2)\end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-(-1)\\1-(-1)\\2-0\end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}}$$

Manifestement, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires et par suite, les points A , B et C ne sont pas alignés.

Par conséquent, **les points A , B et C définissent un plan (ABC) .**

2. Déterminons une équation cartésienne de ce plan (ABC).

Nous savons que le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC).

Dès lors, si M $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est un point du plan (ABC), nous obtenons : $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AM}=0$.

Or nous connaissons les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\\z\end{pmatrix}$.

Nous en déduisons que :

$$\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AM}=0 \iff \begin{vmatrix}1&0&x+1\\1&2&y+1\\2&2&z\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad 1\times\Big(2z-2(y+1)\Big)-0+(x+1)\times(2-4)=0\\
&\Longleftrightarrow \quad 2z-2y-2-2(x+1)=0\\
&\Longleftrightarrow \quad 2z-2y-2-2x-2=0\\
&\Longleftrightarrow \quad -2x-2y+2z-4=0\\
&\Longleftrightarrow \quad -2(x+y-z+2)=0\\
&\Longleftrightarrow \quad \boxed{x+y-z+2=0}
\end{aligned}$$

Par conséquent, **une équation cartésienne du plan (ABC) est :** $\boxed{x+y-z+2=0}$.

3. Soit (P) le plan d'équation : $x+y-z+2=0$.

Nous devons déterminer l'expression analytique de la réflexion f de plan (P).

Soient $M(x\ ;y\ ;z)$ et $M'(x'\ ;y'\ ;z')$ deux points de l'espace.

$$f(M)=M' \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases}(MM')\perp(P)\\ I=\text{milieu}[MM']\in(P)\end{cases}$$

- $(MM')\perp(P) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{MM'}=\lambda\overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (P).

Or le plan (P) admet comme équation : $x+y-z+2=0$.

Donc un vecteur normal au plan (P) est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Dès lors,

$$\begin{aligned}
(MM')\perp(P) \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{MM'}=\lambda\overrightarrow{n}\\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\\z'-z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\\z'-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\-\lambda\end{pmatrix}\\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases}x'-x=\lambda\\y'-y=\lambda\\z'-z=-\lambda\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases}x'=x+\lambda\\y'=y+\lambda \quad (1)\\z'=z-\lambda\end{cases}}
\end{aligned}$$

- $I=\text{milieu}[MM']\in(P) \quad \Longleftrightarrow \quad I\begin{pmatrix}\dfrac{x+x'}{2}\\[2mm]\dfrac{y+y'}{2}\\[2mm]\dfrac{z+z'}{2}\end{pmatrix}\in(P)$

Donc les coordonnées du point I vérifient l'équation de (P).

Nous obtenons ainsi : $\boxed{\dfrac{x+x'}{2}+\dfrac{y+y'}{2}-\dfrac{z+z'}{2}+2=0 \quad (2).}$

A partir des relations (1) et (2), nous déduisons que :

$$\frac{x+x+\lambda}{2}+\frac{y+y+\lambda}{2}-\frac{z+z-\lambda}{2}+2=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2x+\lambda}{2}+\frac{2y+\lambda}{2}-\frac{2z-\lambda}{2}+2=0$$

$$\iff \quad 2x + \lambda + 2y + \lambda - 2z + \lambda + 4 = 0$$

$$\iff \quad 3\lambda + 2x + 2y - 2z + 4 = 0$$

$$\iff \quad 3\lambda = -2x - 2y + 2z - 4$$

$$\iff \quad \boxed{\lambda = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} \quad (3)}$$

A partir des relations (1) et (3), nous déduisons que :

$$\begin{cases} x' = x - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} \\ y' = y - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} \\ z' = z + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{4}{3} \end{cases},$$

soit $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} \\ y' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} \\ z' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{4}{3} \end{cases}$

Par conséquent, **l'expression analytique de la réflexion f de plan (P) est :**

$$\boxed{\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x - 2y + 2z - 4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z - 4) \\ z' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z + 4) \end{cases}}$$

4. Soit g la transformation de l'espace d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y - 2z + 4) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 2z + 4) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x - 2y - z + 8) \end{cases}$$

4. a) Nous devons montrer que l'ensemble $(\boldsymbol{D})$ des points invariants par g est la droite passant par B dont un vecteur directeur est $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $M\ (x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point de l'ensemble $(\boldsymbol{D})$.

Dans ce cas, $g(M) = M$.

Dès lors,

$$g(M) = M \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(-x+2y-2z+4) \\ y = \dfrac{1}{3}(2x-y-2z+4) \\ z = \dfrac{1}{3}(-2x-2y-z+8) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x = -x+2y-2z+4 \\ 3y = 2x-y-2z+4 \\ 3z = -2x-2y-z+8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x-2y+2z = 4 \\ -2x+4y+2z = 4 \\ 2x+2y+4z = 8 \end{cases}$$

Nous remarquons que la troisième équation est égale à la somme membre à membre des deux premières. Nous obtenons alors :

$$g(M) = M \iff \begin{cases} 4x-2y+2z = 4 \\ -2x+4y+2z = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x-y+z = 2 \\ -x+2y+z = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x-y = -z+2 & (4) \\ -x+2y = -z+2 & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4)+2\times(5) \\ 2\times(4)+(5) \end{cases} \iff \begin{cases} 3y = -3z+6 \\ 3x = -3z+6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -z+2 \\ x = -z+2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -k+2 \\ y = -k+2 \\ z = k \end{cases} \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}$$

D'où $M \in (D) \iff \begin{cases} x = 2+(-1)\times k \\ y = 2+(-1)\times k \\ z = 0+1\times k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$

De plus si $k = 2$, nous obtenons $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$.

Par conséquent, l'ensemble ($\boldsymbol{D}$) des points invariants par g est la droite passant par B (**0** ; **0** : **2**) dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. b) Soient M et M' deux points de l'espace tels que $g(M) = M'$.

4. b) (i) Nous devons montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal à la droite ($\boldsymbol{D}$).

Montrons que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{v}$ en observant que $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{v} = 0$.

Soient M de coordonnées (x ; y ; z) et M' de coordonnées (x' ; y' ; z') .

En utilisant l'expression analytique de g , nous déduisons que les coordonnées de $\overrightarrow{MM'}$ sont données par : .

$$\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3}(-x+2y-2z+4)-x \\ \dfrac{1}{3}(2x-y-2z+4)-y \\ \dfrac{1}{3}(-2x-2y-z+8)-z \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z + \frac{8}{3} \end{pmatrix}}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{v} &= \left(-\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}\right) \times (-1) + \left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}\right) \times (-1) + \left(-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z + \frac{8}{3}\right) \times 1 \\ &= \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z + \frac{8}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{MM'} \perp \vec{v}}$$

Par conséquent, $\overrightarrow{MM'}$ **est un vecteur normal à la droite ([b]$\boldsymbol{D}$**).[/b]

4\. b) (ii) Nous devons montrer que le milieu du segment $[MM']$ appartient à ($\boldsymbol{D}$).

Soient M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z\,)$ et M' de coordonnées $(x'\,;\,y'\,;\,z'\,)$ tels que $g(M) = M'$.

Alors le milieu du segment $[MM']$ admet comme coordonnées $\left(\dfrac{x+x'}{2}\,;\,\dfrac{y+y'}{2}\,;\,\dfrac{z+z'}{2}\right)$.

Or
$$\begin{aligned} \frac{x+x'}{2} &= \frac{x + \frac{1}{3}(-x+2y-2z+4)}{2} \\ &= \frac{\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}}{2} \\ &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}(x+y-z+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y+y'}{2} &= \frac{y + \frac{1}{3}(2x-y-2z+4)}{2} \\ &= \frac{\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}}{2} \\ &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}(x+y-z+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z+z'}{2} &= \frac{z + \frac{1}{3}(-2x-2y-z+8)}{2} \\ &= \frac{-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{8}{3}}{2} \\ &= -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{3}(-x-y+z+4) \end{aligned}$$

D'où les coordonnées du milieu du segment $[MM']$ sont : $\left(\frac{1}{3}(x+y-z+2)\,;\,\frac{1}{3}(x+y-z+2)\,;\,\frac{1}{3}(-x-y+z+4)\right)$.

Montrons que ces coordonnées vérifient le système $\begin{cases} 2x - y = -z + 2 & (4) \\ -x + 2y = -z + 2 & (5) \end{cases}$ caractérisant $(D\ )$.

- **Dans l'équation (4)**, remplaçons x , y et z par les coordonnées correspondantes du milieu du segment $[MM']$

Le membre de gauche de l'équation devient :

$$\begin{aligned} 2 \times \frac{1}{3}(x+y-z+2) - \frac{1}{3}(x+y-z+2) &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(-x-y+z+4)+2 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Le membre de droite de l'équation devient : $-\frac{1}{3}(-x-y+z+4)+2 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$

Donc les coordonnées du milieu du segment $[MM']$ vérifient l'équation (4).

- **Dans l'équation (5)**, remplaçons x , y et z par les coordonnées correspondantes du milieu du segment $[MM']$

Le membre de gauche de l'équation devient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}(x+y-z+2) + 2 \times \frac{1}{3}(x+y-z+2) &= -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Le membre de droite de l'équation devient : $-\frac{1}{3}(-x-y+z+4)+2 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$

Donc les coordonnées du milieu du segment $[MM']$ vérifient l'équation (5).

D'où les coordonnées de ce milieu vérifient le système d'équations caractérisant la droite ($\boldsymbol{D}$).

Par conséquent, **le milieu du segment $[MM']$ appartient à ([b]$\boldsymbol{D}$**)[/b].

4. c) Nous devons en déduire que g est un demi-tour.

Soient M et M' deux points de l'espace tels que $g(M) = M'$.

Nous avons montré dans la question 4 a) que ($\boldsymbol{D}$) est l'ensemble des points invariants par g .
Nous avons également montré dans les questions 4. b) (i) et (ii) que ($\boldsymbol{D}$) est la médiatrice du segment $[MM'\ ]$.
Par conséquent, **g est un demi-tour d'axe ([b]$\boldsymbol{D}$**).[/b]

5. a) Nous devons montrer que $(P) \perp (D)$.

La droite ($\boldsymbol{D}$) est dirigée par le vecteur $\vec{v}$ normal au plan $(P\ )$.
Dès lors, $(P) \perp (D)$.

5. b) Nous devons en déduire que $f \circ g$ est une symétrie centrale.

Nous savons que $(P\ )$ est un plan passant par le point B et $(D\ )$ est la perpendiculaire à $(P\ )$ en B .
Soient $S_{(P)}$ la réflexion de plan $(P\ )$ et $S_{(D)}$ le demi-tour d'axe $(D\ )$.

Or la composée d'une réflexion de plan $(P\ )$ et d'un demi-tour d'axe $(D\ )$ perpendiculaire à $(P\ )$ est la symétrie centrale de centre B notée S_B ,

$$\begin{aligned} f \circ g &= S_{(P)} S_{(D)} \\ &= S_{(P)\cap(D)} \\ &= S_B \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{f \circ g = S_B}$

Par conséquent, $f \circ g$ **est la symétrie centrale de centre B.**

Partie B : Évaluation des compétences (6,75 points)

1. Nous devons déterminer la masse maximale que cette balance peut peser.

Remarque : L'énoncé comporte une double ambiguïté.
La première consiste en l'absence d'unité de l'élongation, ce qui peut fournir plusieurs réponses à la question posée.
La seconde concerne les deux données de l'énoncé.
Ces deux données prises isolément nous donne des réponses différentes.
De plus, suivant la méthode utilisée, certaines données sont inutiles.
Nous allons proposer deux résolutions possibles.

Comme le système d'unités n'est pas donné dans l'énoncé, nous choisirons le système international d'unités (masse en kilogramme, temps en seconde, longueur en mètre).

- **Première proposition de solution** (ne tenant pas compte de l'équation différentielle)

Nous savons que $mg = k\,\Delta l_0$ et que le ressort s'allonge de 2 cm, soit de 0,02 m lorsqu'on accroche une masse de 4 kg.
Donc nous obtenons :

$$4g = k \times 0,02 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{4g}{0,02}$$
$$\Longrightarrow \quad k = \frac{4 \times 9,5}{0,02}$$
$$\Longrightarrow \quad k = 1900$$

D'où la constante de raideur k est égale à $1900\ N.m^{-1}$.

Déterminons la masse maximale que cette balance peut peser.
Utilisons la relation $m = \dfrac{k \times \Delta l_0}{g}$.

$$m = \frac{k \times \Delta l_0}{g}$$
$$= \frac{1900 \times 0,07}{9,5}$$
$$= 14$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{m = 14}$$

Par conséquent, **la masse maximale que cette balance peut peser est de 14 kg.**
Cette valeur semble plausible.

- **Deuxième proposition de solution** (ne tenant pas compte du fait que le ressort s'allonge de 2 cm lorsqu'on accroche une masse de 4 kg)

La masse maximale est donnée par la relation : $m = \dfrac{k \times \Delta l_0}{g}$ où l_0 est l'allongement au repos.

Résolvons d'abord l'équation $(E) : x''(t) + \dfrac{k}{4}x(t) = 0.$
Rappelons que si ω est un nombre réel constant non nul, les solutions de l'équation différentielle du second ordre $y'' + \omega^2 y = 0$ sont de la forme : $\boxed{y = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)}$ où a et b sont des nombres réels constants.

Nous en déduisons que les solutions de l'équation (E) sont de la forme $\boxed{x(t) = a\cos\left(\dfrac{\sqrt{k}}{2}t\right) + b\sin\left(\dfrac{\sqrt{k}}{2}t\right)}$ où a et b sont des nombres réels constants.

Or le ressort est étiré de sa position d'équilibre et est ensuite relâché sans vitesse initiale, ce qui signifie que $x'(0) = 0$

Nous obtenons ainsi :

$$x(t) = a\cos\left(\frac{\sqrt{k}}{2}t\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{k}}{2}t\right) \implies x'(t) = a \times \frac{\sqrt{k}}{2}\left(-\sin\left(\frac{\sqrt{k}}{2}t\right)\right) + b \times \frac{\sqrt{k}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{k}}{2}t\right)$$

$$\implies x'(t) = -a\,\frac{\sqrt{k}}{2}\,\sin\left(\frac{\sqrt{k}}{2}t\right) + b\,\frac{\sqrt{k}}{2}\,\cos\left(\frac{\sqrt{k}}{2}t\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{D'où } x'(0) = 0 \quad &\iff \quad -a\,\frac{\sqrt{k}}{2}\,\sin(0) + b\,\frac{\sqrt{k}}{2}\,\cos(0) = 0\\
&\iff \quad 0 + b\,\frac{\sqrt{k}}{2} \times 1 = 0\\
&\iff \quad b\,\frac{\sqrt{k}}{2} = 0\\
&\iff \quad \boxed{b = 0} \quad (\text{car } k \neq 0)
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{x(t) = a\cos\left(\frac{\sqrt{k}}{2}t\right)}$ où a est un nombre réel constant.

Déterminons la valeur de $\boldsymbol{k}$ exprimée en newton par mètre $(N.m^{-1})$ ..

Selon l'énoncé, après une minute (60 secondes), le centre de gravité du solide repasse pour la première fois au point initial, ce qui signifie qu'après 60 secondes, l'élongation est nulle.

Donc nous avons la relation $x(60) = 0$, soit $a\cos\left(\frac{\sqrt{k}}{2} \times 60\right) = 0$

Or $a \neq 0$ car $a = 0 \implies x(t) = 0$ et il n'a alors jamais aucune élongation, ce qui est impossible.

$$\begin{aligned}
\text{D'où} \quad x(60) = 0 \quad &\iff \quad \cos\left(30\sqrt{k}\right) = 0\\
&\iff \quad 30\sqrt{k} = \frac{\pi}{2} + r\,\pi \quad \text{avec } r \in \mathbb{Z}\\
&\iff \quad \sqrt{k} = \frac{\pi}{60} + \frac{r\pi}{30} \quad \text{avec } r \in \mathbb{Z}\\
&\iff \quad \boxed{k = \left(\frac{\pi}{60} + \frac{r\pi}{30}\right)^2 \quad \text{avec } r \in \mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

Déterminons la masse maximale que cette balance peut peser.

Nous savons que $m = \dfrac{k \times \Delta l_0}{g}$.

L'allongement maximal est de $\Delta l_0 = 0,07\,\text{m}$

Concernant la valeur de k , nous considérerons le cas où $r = 0$ et par suite, $k = \left(\frac{\pi}{60}\right)^2$.

D'où, la masse maximale est donnée par :

$$\begin{aligned}
m &= \frac{k \times \Delta l_0}{g}\\
&= \frac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^2 \times 0,07}{g}\\
&= \frac{3,14^2 \times 0,07}{3600 \times 9,5}\\
&\approx 2,02 \times 10^{-5}
\end{aligned}$$

$\implies$ $\boxed{m \approx 2,02 \times 10^{-5}}$ https://groupe-reussite.fr/cours-particuliers/maths/tous-niveaux/france/

Par conséquent, **la masse maximale que cette balance peut peser est de** $2,02\times10^{-5}$ **kg.**
Cette valeur ne semble pas être plausible ce qui remet en évidence l'ambiguïté de l'énoncé.

2 Nous devons estimer le chiffre d'affaires que KEMO pourra espérer des frais de publicités investis.

Le tableau ci-dessous montre ses dépenses en publicité exprimées en dizaine de milliers et son chiffre d'affaires pour la même période, sur les dix dernières années (exprimé en dizaine de millions).
On admettra que le chiffre d'affaires suit un ajustement linéaire par rapport aux frais de publicité.

Frais de publicité (x_i)	6	6,5	6,8	7	7,8	9	10,5	11	11,3	11
Chiffre d'affaires (y_i)	220	229	225	237	235	247	250	268	258	264

On subdivise cette série statistique en deux sous-séries (S_1) et (S_2) constituées respectivement par les cinq premiers et les cinq derniers points du nuage de points de la série $(x_i\ ;\ y_i)$.

Déterminons les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 respectivement des séries statistiques (S_1) et (S_2).

$$\begin{cases} \overline{x}_1 = \dfrac{6+6,5+6,8+7+7,8}{5} = \dfrac{31,4}{5} \\ \overline{y}_1 = \dfrac{220+229+225+237+235}{5} = \dfrac{1146}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{x}_1 = 6,82 \\ \overline{y}_1 = 229,2 \end{cases}$$

Les coordonnées du point moyen G_1 sont donc : $\boxed{G_1\,(6,82\,;\,229,2)}$

$$\begin{cases} \overline{x}_2 = \dfrac{9+10,5+11+11,3+11}{5} = \dfrac{52,8}{5} \\ \overline{y}_2 = \dfrac{247+250+268+258+264}{5} = \dfrac{1287}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{x}_2 = 10,56 \\ \overline{y}_2 = 257,4 \end{cases}$$

Les coordonnées du point moyen G_2 sont donc : $\boxed{G_2\,(10,56\,;\,257,4)}$

Vérifions qu'une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer est : $y = 7,5401x + 177,7765$.

La droite de Mayer admet une équation de la forme $y = ax + b$.
Cette droite passe par les deux points moyens $G_1\,(6,82\,;\,229,2)$ et $G_2\,(10,56\,;\,257,4)$.

Remplaçons y et x par les coordonnées des deux points.
Nous obtenons ainsi :
(1) : $229,2 = a\times 6,82 + b$
(2) : $257,4 = a\times 10,56 + b$

Pour déterminer la valeur de $''a''$, il suffit de soustraire (1) de (2).

$$\begin{aligned} 257,4-229,2 = 10,56a-6,82a+b-b &\iff 28,2 = 3,74a \\ &\iff a \approx 7,5401 \end{aligned}$$

Pour déterminer la valeur de $''b''$, il suffit de remplacer $''a''$ par 7,5401 dans l'équation (1).

$$\begin{aligned} 229,2 = 6,82\times 7,5401 + b &\iff 229,2 = 51,5235 + b \\ &\iff b = 177,7765 \end{aligned}$$

Par conséquent, **une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer est :** $y = 7,5401x + 177,7765$.

Nous devons estimer le chiffre d'affaires que KEMO pourra espérer des frais de publicités investis.

Dans l'équation de la droite de Mayer, remplaçons x par 15 et calculons la valeur de y.

$$7,5401 \times 15 + 177,7765 = 290,878.$$

Par conséquent, **selon ce modèle, le chiffre d'affaires que KEMO pourra espérer des frais de publicités investis après 15 semaines est estimé à 2 908 480 000 FCFA.**

3. Nous devons déterminer la date de la prochaine coïncidence des deux fournisseurs.

Le premier fournisseur rend visite à KEMO tous les 21 jours tandis que le second lui rend visite tous les 16 jours.
Le premier fournisseur était au marché le 20 décembre 2020 tandis que le second fournisseur était au marché le 27 décembre 2020, soit 7 jours plus tard.
Si x représente le nombre de visites du premier fournisseur et y le nombre de visites du second fournisseur pour atteindre la prochaine coïncidence, nous obtenons la relation : $21x - 16y = 7 \quad (x, y \in \mathbb{N})$.

Résolvons l'équation $(E) : 21x - 16y = 7 \quad (x, y \in \mathbb{Z})$.
Déterminons d'abord une solution de (E) à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu.

Nous obtenons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} 21 &= (-1) \times (-16) + 5 \\ -16 &= (-4) \times 5 + 4 \\ 5 &= 1 \times 4 + 1 \\ 4 &= 4 \times 1 + 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{cases} 5 = 1 \times 4 + 1 \\ -16 = (-4) \times 5 + 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 = 5 - 1 \times 4 \\ 4 = -16 + 4 \times 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow 1 = 5 - 1 \times (-16 + 4 \times 5) \\ &\Longrightarrow 1 = 5 - 1 \times (-16) - 4 \times 5 \\ &\Longrightarrow 1 = -1 \times (-16) + 5 - 4 \times 5 \\ &\Longrightarrow 1 = -1 \times (-16) - 3 \times 5 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1 = -1 \times (-16) - 3 \times 5 \\ 21 = (-1) \times (-16) + 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 = -1 \times (-16) - 3 \times 5 \\ 5 = 21 + 1 \times (-16) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow 1 = -1 \times (-16) - 3 \times \Big(21 + 1 \times (-16)\Big) \\ &\Longrightarrow 1 = -1 \times (-16) - 3 \times 21 - 3 \times (-16) \\ &\Longrightarrow 1 = -3 \times 21 - 4 \times (-16) \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi la relation : $-3 \times 21 - 4 \times (-16) = 1$.

En multipliant les deux membres de cette relation par 7, nous obtenons :

$-21 \times 21 - 28 \times (-16) = 7$, soit $21 \times (-21) - 16 \times (-28) = 7$.

Par conséquent, **le couple (-21 ; -28) vérifie l'équation (E).**

Dès lors,

$$\begin{cases} 21x - 16y = 7 \\ 21 \times (-21) - 16 \times (-28) = 7. \end{cases} \underset{\text{par soustraction}}{\Longrightarrow} 21(x + 21) - 16(y + 28) = 0$$

$$\Longrightarrow 21(x + 21) = 16(y + 28)$$

Donc l'entier 16 divise le produit $21(x + 21)$.
Or 16 et 21 sont premiers entre eux.
Par le théorème de Gauss, nous en déduisons que 16 divise $(x + 21)$.
Dès lors, il existe un entier relatif k tel que $x + 21 = 16k$, soit $\boxed{x = -21 + 16k}$.

De plus,

$$\begin{cases} 21(x+21) = 16(y+28) \\ x = -21 + 16k \end{cases} \iff \begin{cases} 21(x+21) = 16(y+28) \\ x + 21 = 16k \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad 21 \times 16k = 16(y+28)$$

$$\Longrightarrow \quad 21k = y + 28$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y = -28 + 21k}$$

Donc, il existe un entier relatif k tel que $\begin{cases} x = -21 + 16k \\ y = -28 + 21k \end{cases}$.

Montrons que le couple ($-21 + 16k$; $-28 + 21k$) est solution de (E) **pour tout entier** relatif k.
En effet, $21(-21 + 16k) - 16(-28 + 21k) = -441 + 336k + 448 - 336k = 7$.

Par conséquent, **l'ensemble des solutions de l'équation (E) est** $\boxed{S = \{(-21 + 16k\,;\, -28 + 21k) \,/\, k \in \mathbb{Z}\}}$

ou encore, **après optimisation des paramétrages,** $\boxed{S = \{(11 + 16k\,;\, 14 + 21k) \,/\, k \in \mathbb{Z}\}}$

Or les inconnues x et y représentent des nombres de visites et sont donc des nombres entiers positifs.

Donc le couple dont les composantes sont les plus petits nombres entiers positifs est le couple (11 ; 14).

Donc le premier fournisseur effectuera 11 visites pour atteindre la prochaine coïncidence tandis que le second fournisseur en effectuera 14.

En conséquence, le nombre de jours s'écoulant entre les derniers passages au marché des fournisseurs et le jour de la prochaine coïncidence est de $21 \times 11 = 231$ pour le premier fournisseur et de $16 \times 14 = 224$ pour le second fournisseur.

Déterminons la date de la prochaine coïncidence des deux fournisseurs.

Nous allons baser notre calcul sur les données du premier fournisseur.
Nous savons que le premier fournisseur était au marché le 20 décembre 2020 et que la prochaine coïncidence aura lieu 231 jours après cette date.

Ci-dessous un tableau reprenant le nombre total de jours à partir du 20 décembre 2020, au fur et à mesure que le temps s'écoule.

Mois	Décembre (11 jours)	Janvier (31 jours)	Février (28 jours)	Mars (31 jours)	Avril (30 jours)	Mai (31 jours)	Juin (30 jours)	Juillet (31 jours)	(
Total du nombre de jours à partir du 20/10/2020	11	42	70	101	131	162	192	223 (< 231)	25

Nous remarquons que les 231 jours au-delà du 20 décembre 2020 seront écoulés durant le mois d'août.
Selon le tableau, à la fin du mois de juillet 2021, 223 jours se sont écoulés à partir du 20 décembre 2020.
Puisque 231-223 = 8, nous en déduisons que **la prochaine coïncidence des deux fournisseurs aura lieu de 8 août 2021.**

Nous aurions également pu déterminer cette date sur base des données du second fournisseur.

Nous savons que le second fournisseur était au marché le 27 décembre 2020 et que la prochaine coïncidence aura lieu 224 jours après cette date.

Ci-dessous un tableau reprenant le nombre total de jours à partir du 20 décembre 2020, au fur et à mesure que le temps s'écoule.

Mois	Décembre (4 jours)	Janvier (31 jours)	Février (28 jours)	Mars (31 jours)	Avril (30 jours)	Mai (31 jours)	Juin (30 jours)	Juillet (31 jours)	(
Total du nombre de jours à partir du 20/10/2020	4	35	63	94	124	155	185	216 (< 231)	2[illegible]

Nous remarquons que les 231 jours au-delà du 20 décembre 2020 seront écoulés durant le mois d'août.
Selon le tableau, à la fin du mois de juillet 2021, 216 jours se sont écoulés à partir du 20 décembre 2020.
Puisque 224-216 = 8, nous en déduisons que **la prochaine coïncidence des deux fournisseurs aura lieu de 8 août 2021.**