Correction

Bac D-TI Cameroun 2021

PARTIE A : Évaluation des ressources (13,25 points)

Exercice 1 (4 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 36x^2 - 2x^3$.

1. Montrons que f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $36y'' + 6y' + y = 2592 - 2x^3$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme).

$$\begin{aligned} f(x) = 36x^2 - 2x^3 &\Longrightarrow f'(x) = 72x - 6x^2 \\ &\Longrightarrow f''(x) = 72 - 12x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } 36f''(x) + 6f'(x) + f(x) &= 36(72 - 12x) + 6(72x - 6x^2) + 36x^2 - 2x^3 \\ &= 2592 - 432x + 432x - 36x^2 + 36x^2 - 2x^3 \\ &= 2592 - 2x^3 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{\forall\ x \in \mathbb{R},\ 36f''(x) + 6f'(x) + f(x) = 2592 - 2x^3}$

Par conséquent, ***f* est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) :** $36y''+6y'+y = 2592-2x^3$.

2. Nous devons étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$.
Nous savons que f'(x) = 72x - 6x2̂ = 6x(12 - x).
Puisque x est positif dans l'intervalle $[0 : 18]$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $12 - x$.
D'où le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;18]$.

$$\begin{aligned} 12 - x < 0 &\Longleftrightarrow 12 < x \\ &\Longleftrightarrow x > 12 \end{aligned}$$

$$12 - x = 0 \Longleftrightarrow x = 12$$

$$12 - x > 0 \Longleftrightarrow x < 12$$

x	0		12		18
x	0	+	+	+	
$12 - x$		+	0	$-$	
$f'(x)$	0	+	0	$-$	

Nous en déduisons le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;18]$.

<u>Calculs préliminaires</u> : $f(0) = 36 \times 0^2 - 2 \times 0^3 = 0$
$f(12) = 36 \times 12^2 - 2 \times 12^3 = 1728$
$f(18) = 36 \times 18^2 - 2 \times 18^3 = 0$

x	0		12		18
$f'(x)$		+	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1728	$\searrow$	0

D'où, la fonction f est • strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,12[$
• strictement décroissante sur l'intervalle $]12\,;\,18]$.
La fonction f admet un maximum pour $x = 12$.

3. a) Démontrons que le nombre de tirages donnant une dose de chaque firme est $f(n)$.
Parmi les 36 doses de vaccins, n doses proviennent de la firme A,
n doses proviennent de la firme B,
36 - $2n$ doses proviennent de la firme C.

Dès lors, le nombre de tirages possibles donnant une dose de la firme A est n.
A chacun de ces tirages, nous avons n tirages possibles pour obtenir une dose de la firme B.
A chacun de ces derniers tirages, nous avons 36 - $2n$ tirages possibles pour obtenir une dose de la firme C.
Par conséquent, le nombre de tirages donnant une dose de chaque firme est $n \times n \times (36-2n) = n^2(36-2n) = 36n^2 - 2n^3 = f$

3. b) Les tirages de doses de vaccins sont équiprobables.
Donc la probabilité $P(n)$ de tirer une dose de chaque firme est donnée par la formule :

$$P(n) = \frac{\text{nombre de tirages donnant une dose de chaque firme}}{\text{nombre de tirages possibles de 3 doses parmi 36}}$$

Nous savons par la question 3. a) que le nombre de tirages donnant une dose de chaque firme est égal à $f(n)$.
De plus, le nombre de tirages possibles de 3 doses parmi 36 est égal à $C_{36}^3 = \binom{36}{3} = \frac{36 \times 35 \times 34}{3!} = \frac{36 \times 35 \times 34}{6} = 6 \times 35 \times 3$

D'où $\boxed{P(n) = \frac{f(n)}{7140}}$
Nous en déduisons que $P(n)$ est maximal lorsque $f(n)$ est maximal, soit pour $\boldsymbol{n = 12}$ (voir question 2.).

Exercice 2 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^3 - (6 + \mathrm{i}\sqrt{3})z^2 + (11 + 4\mathrm{i}\sqrt{3})z - 6 - 3\mathrm{i}\sqrt{3} = 0$.

1. $$\begin{aligned}(z^2 - 4z + 3)(z - 2 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = 0 &\iff z^2(z - 2 - \mathrm{i}\sqrt{3}) - 4z(z - 2 - \mathrm{i}\sqrt{3}) + 3(z - 2 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = 0\\ &\iff z^3 - 2z^2 - \mathrm{i}z^2\sqrt{3} - 4z^2 + 8z + 4\mathrm{i}z\sqrt{3} + 3z - 6 - 3\mathrm{i}\sqrt{3} = 0\\ &\iff z^3 - 6z^2 - \mathrm{i}z^2\sqrt{3} + 11z + 4\mathrm{i}z\sqrt{3} - 6 - 3\mathrm{i}\sqrt{3} = 0\\ &\iff z^3 - (6 + \mathrm{i}\sqrt{3})z^2 + (11 + 4\mathrm{i}\sqrt{3})z - 6 - 3\mathrm{i}\sqrt{3} = 0\\ &\iff (E)\end{aligned}$$

D'où $\boxed{(E) \iff (z^2 - 4z + 3)(z - 2 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = 0}$

2. Résolvons l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}(E) &\iff (z^2 - 4z + 3)(z - 2 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = 0\\ &\iff z^2 - 4z + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad z - 2 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 0\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}z^2 - 4z + 3 = 0 &\iff (z-1)(z-3) = 0\\ &\iff z - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad z - 3 = 0\\ &\iff \boxed{z = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{z = 3}\end{aligned}$$

- $z - 2 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 0 \iff \boxed{z = 2 + \mathrm{i}\sqrt{3}}$

Par conséquent, **l'ensemble des solutions de l'équation (E) est** $\mathscr{S} = \left\{1\,;\,3\,;\,2 + \mathbf{i}\sqrt{3}\right\}$.

3. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 3$, $z_B = 2 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_C = 7$ et $z_D = 11 + 4\,\mathrm{i}\sqrt{3}$.

3. a) Nous devons montrer que le triangle IAB est équilatéral.

$IA = |z_A - z_I| = |3 - 1| = 2$
$IB = |z_B - z_I| = |2 + \mathrm{i}\sqrt{3} - 1| = |1 + \mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
$AB = |z_B - z_A| = |2 + \mathrm{i}\sqrt{3} - 3| = |-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\Longrightarrow \boxed{IA = IB = AB = 2}$
Les trois côtés du triangle IAB ont donc la même longueur.
Par conséquent, **le triangle IAB est équilatéral.**

3. b) Soit r la rotation de centre le point F et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, d'écriture complexe :
$z' = \left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \dfrac{3}{2} + 2\sqrt{3} + \left(2 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i}$.

Nous devons déterminer l'affixe $z_{\text{ F}}$ du point F.
Le point F est le centre de la rotation r .
Dès lors,

$$
\begin{aligned}
r(F) = F &\Longleftrightarrow z_F = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_F + \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} + \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i} \\
&\Longleftrightarrow 2z_F = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z_F + 3 + 4\sqrt{3} + (4 - 3\sqrt{3})\mathrm{i} \\
&\Longleftrightarrow 2z_F = z_F + \mathrm{i}\sqrt{3}z_F + 3 + 4\sqrt{3} + (4 - 3\sqrt{3})\mathrm{i} \\
&\Longleftrightarrow z_F - \mathrm{i}\sqrt{3}\, z_F = 3 + 4\sqrt{3} + (4 - 3\sqrt{3})\mathrm{i} \\
&\Longleftrightarrow (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\, z_F = 3 + 4\sqrt{3} + (4 - 3\sqrt{3})\mathrm{i} \\
&\Longleftrightarrow z_F = \frac{3 + 4\sqrt{3} + (4 - 3\sqrt{3})\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}} \\
&\Longleftrightarrow z_F = \frac{\left(3 + 4\sqrt{3} + (4 - 3\sqrt{3})\mathrm{i}\right)(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})}{(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})} \\
&\Longleftrightarrow z_F = \frac{3 + 4\sqrt{3} + (4 - 3\sqrt{3})\mathrm{i} + 3\mathrm{i}\sqrt{3} + 12\mathrm{i} - (4 - 3\sqrt{3})\sqrt{3}}{1+3} \\
&\Longleftrightarrow z_F = \frac{3 + 4\sqrt{3} + 4\mathrm{i} - 3\mathrm{i}\sqrt{3} + 3\mathrm{i}\sqrt{3} + 12\mathrm{i} - 4\sqrt{3} + 9}{4} \\
&\Longleftrightarrow z_F = \frac{12 + 16\mathrm{i}}{4} \\
&\Longleftrightarrow z_F = \frac{4(3 + 4\mathrm{i})}{4} \\
&\Longleftrightarrow \boxed{z_F = 3 + 4\mathrm{i}}
\end{aligned}
$$

Déterminons l'affixe $z_{\text{ R(C)}}$ de l'image par la rotation r du point C.

$$
\begin{aligned}
z_{r(C)} &= \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_C + \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} + \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 7 + \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} + \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i} \\
&= \frac{7}{2} + \mathrm{i}\frac{7\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} + \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i} \\
&= \frac{7}{2} + \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} + \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i} \\
&= 5 + 2\sqrt{3} + \left(2 + 2\sqrt{3}\right)\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Or $z_D = 11 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$

$\Longrightarrow \boxed{z_{r(C)} \neq z_D}$

Par conséquent, nous observons que $\boxed{r(C) \neq D}$.

3. c) Nous devons déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h qui transforme I en D et B en C.

L'expression complexe de l'homothétie h est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} h(I) = D \\ h(B) = C \end{cases} \iff \begin{cases} z_D = az_I + b \\ z_C = az_B + b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 11 + 4i\sqrt{3} = a \times 1 + b \\ 7 = a(2 + i\sqrt{3}) + b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + b = 11 + 4i\sqrt{3} & (1) \\ 2a + \mathrm{i}\, a\sqrt{3} + b = 7 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) - (1) &\Longrightarrow 2a + \mathrm{i}\, a\sqrt{3} - a = 7 - 11 - 4\mathrm{i}\sqrt{3} \\ &\Longrightarrow a + \mathrm{i}\, a\sqrt{3} = -4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3} \\ &\Longrightarrow (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})a = -4(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) \\ &\Longrightarrow a = \frac{-4(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})}{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}} \\ &\Longrightarrow \boxed{a = -4} \end{aligned}$$

D'où $\begin{cases} a + b = 11 + 4i\sqrt{3} \\ a = -4 \end{cases} \Longrightarrow -4 + b = 11 + 4i\sqrt{3}$

$$\Longrightarrow \boxed{b = 15 + 4i\sqrt{3}}$$

Par conséquent, **l'écriture complexe de l'homothétie h est :** $\boxed{z' = -4z + 15 + 4i\sqrt{3}}$

3. d) Nous devons déterminer l'écriture complexe de la transformation $s = h \circ r$.

Pour tout point P d'affixe $z_{\,\mathrm{P}}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} s(P) = h(r(P)) &\iff z' = -4z_{r(P)} + 15 + 4i\sqrt{3} \\ &\iff z' = -4\left[\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_P + \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} + \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i}\right] + 15 + 4i\sqrt{3} \\ &\iff z' = (-2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3})z_P - 6 - 8\sqrt{3} + \left(-8 + 6\sqrt{3}\right)\mathrm{i} + 15 + 4i\sqrt{3} \\ &\iff z' = (-2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3})z_P + 9 - 8\sqrt{3} + \left(-8 + 10\sqrt{3}\right)\mathrm{i} \end{aligned}$$

D'où, **l'écriture complexe de la transformation s est** $\boxed{z' = (-2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3})z + 9 - 8\sqrt{3} + \left(-8 + 10\sqrt{3}\right)\mathbf{i}}$

Exercice 3 (4,25 points)

On définit les fonctions h et k sur $]0\,;+\infty[$ par : $h(x) = \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}}$ et $k(x) = -x + x\ln x$.

1. Nous devons démontrer que l'équation $k(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[3\,;4]$.

La fonction k est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

$$\begin{aligned} k'(x) &= (-x)' + (x\ln x)' \\ &= -1 + x' \times \ln x + x \times (lnx)' \\ &= -1 + 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} \\ &= -1 + \ln x + 1 \\ &= \ln x \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{k'(x) = \ln x}$

Nous en déduisons le signe de $k'(x)$ et les variations de k sur $]0\,;+\infty[$.

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$k'(x) = \ln(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
k	$\searrow$ $\quad$ $\nearrow$

Dès lors,

- La fonction k est continue sur $[3\,;\,4]$ (car dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$)
- La fonction k est strictement croissante sur $[3\,;\,4]$ (voir tableau de variations de k)
- $\begin{cases} k(3) = -3+3\ln 3 \approx 0,30 \\ k(4) = -4+4\ln 4 \approx 1,55 \end{cases} \Longrightarrow \quad 1 \in [k(3)\,;\,k(4)] \quad \Longrightarrow \quad 1 \in k([3\,;\,4])$.

Selon le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, nous déduisons que **l'équation $k(x) = 1$ possède une et une seule solution notée α dans l'intervalle $[3\,;\,4]$.**

2. Nous devons démontrer que $k(x) = 1$ si et seulement si $h(x) = x$.

Pour tout x $\in$ $]0\,;\,+\infty[$,

$$\begin{aligned} k(x) = 1 &\Longleftrightarrow -x + x\ln x = 1 \\ &\Longleftrightarrow x\ln x = x+1 \\ &\Longleftrightarrow \ln x = \frac{x+1}{x} \\ &\Longleftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}} \\ &\Longleftrightarrow x = h(x) \end{aligned}$$

D'où $\boxed{k(x) = 1 \Longleftrightarrow h(x) = x}$

3. Nous devons démontrer que pour tout x élément de $[3\,;\,4]$, $h(x)$ est aussi élément de $[3\,;\,4]$.

Étudions la croissance de la fonction h sur l'intervalle $[3\,;\,4]$.

La fonction h est dérivable sur $[3\,;\,4]$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{x+1}{x}\right)' \times \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}} \\ &= \left(\frac{(x+1)' \times x - (x+1) \times x'}{x^2}\right) \times \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}} \\ &= \left(\frac{1 \times x - (x+1) \times 1}{x^2}\right) \times \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}} \\ &= \left(\frac{x-x-1}{x^2}\right) \times \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}} \\ &= \left(\frac{-1}{x^2}\right) \times \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{h'(x) = \left(\frac{-1}{x^2}\right) \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}}}$

Pour tout x élément de $[3\,;\,4]$, $\frac{-1}{x^2} < 0$ et $\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}} > 0$.

Il s'ensuit que pour tout x élément de $[3\,;\,4]$, $h'(x) < 0$.

Par conséquent, la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $[3\,;\,4]$.
D'où, par définition de décroissance, $3 \leqslant x \leqslant 4 \Longrightarrow h(4) \leqslant h(x) \leqslant h(3)$.

Or $\begin{cases} h(4) = \mathrm{e}^{\frac{5}{4}} \approx 3,49 \\ h(3) = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}} \approx 3,79 \end{cases}$

Dès lors, $3 \leqslant x \leqslant 4 \Longrightarrow 3 \leqslant 3,49 \leqslant h(x) \leqslant 3,79 \leqslant 4$
$\Longrightarrow 3 \leqslant h(x) \leqslant 4$

Nous avons ainsi démontré que **pour tout x élément de $[3\,;\,4]$, $h(x)$ est aussi élément de $[3\,;\,4]$.**

4. Nous devons démontrer que $|h'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout x élément de $[3\,;\,4]$.

Nous savons que $h'(x) = \left(\frac{-1}{x^2}\right) \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}}$, soit que $|h'(x)| = \left(\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x}}$.

Pour tout x élément de $[3\,;\,4]$,

$$3 \leqslant x \leqslant 4 \Longrightarrow \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3}$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{16} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{9}$$

Or $3 \leqslant x \leqslant 4 \Longrightarrow 3 \leqslant h(x) \leqslant 4$ (voir question 3.)

$$\text{D'où} \quad \begin{cases} \frac{1}{16} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{9} \\ 3 \leqslant h(x) \leqslant 4 \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{16} \times 3 \leqslant \frac{1}{x^2} \times h(x) \leqslant \frac{1}{9} \times 4$$
$$\Longrightarrow \frac{3}{16} \leqslant \frac{1}{x^2}\, h(x) \leqslant \frac{4}{9} \leqslant \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow \boxed{\frac{1}{x^2}\, h(x) \leqslant \frac{1}{2}}$$

Nous avons ainsi démontré que $|h'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout x élément de $[3\,;\,4]$.

5. Soit U la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = h(U_n), \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

5. a) Nous devons démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n \in [3\,;\,4]$.

Initialisation : Montrons que la propriété est vraie pour $n = 0$, soit que $U_0 \in [3\,;\,4]$.
La relation est évidente puisque $U_0 = 3 \in [3\,;\,4]$ et par conséquent, l'initialisation est vraie.

Hérédité : Montrons que si pour un nombre naturel n fixé, la propriété est vraie au rang n, alors elle est encore vraie au rang $(n+1)$.
Montrons donc que si pour un nombre naturel n fixé, $U_n \in [3\,;\,4]$, alors $U_{n+1} \in [3\,;\,4]$
En effet, en utilisant la question 3, nous déduisons que si $U_n \in [3\,;\,4]$, alors $h(U_n) \in [3\,;\,4]$.
Cela signifie que si $U_n \in [3\,;\,4]$, alors $U_{n+1} \in [3\,;\,4]$.
Donc l'hérédité est vraie.

Puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraies, **nous avons montré par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n \in [3\,;\,4]$.**

5. b) Nous devons démontrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.
Démontrons-le par l'inégalité des accroissements finis.

Nous savons par la question 5. a) que pour tout entier naturel n, $U_n \in [3\,;\,4]$.
La fonction h est continue sur $[3\,;\,4]$ et dérivable sur $]3\,;\,4[$.

Nous savons également par la question 4. que si $U_n \in [3\,;\,4]$, alors $|h'(U_n)| \leqslant \frac{1}{2}$.
D'où par l'inégalité des accroissements finis, nous obtenons que pour tout entier naturel n, $|h(U_n) - h(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.
Or,

- $h(U_n) = U_{n+1}$
- $k(\alpha) = 1$ (voir question 1) et donc, par la question 2, nous déduisons que $h(\alpha) = \alpha$.

L'inégalité des accroissements finis devient alors : pour tout entier naturel n , $\boxed{\mid U_{n+1}-\alpha \mid \leqslant \frac{1}{2} \mid U_n - \alpha \mid}$.

5. c) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $\mid U_n - \alpha \mid \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Initialisation : Montrons que la propriété est vraie pour $n = 0$, soit que $\mid U_0 - \alpha \mid \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0$, ce qui revient à démontrer que $\mid 3-\alpha \mid \leqslant 1$.
En effet,

$$\begin{aligned}
\alpha \in [3\,;\,4] &\Longrightarrow 3 \leqslant \alpha \leqslant 4 \\
&\Longrightarrow -4 \leqslant -\alpha \leqslant -3 \\
&\Longrightarrow 3-4 \leqslant 3-\alpha \leqslant 3-3 \\
&\Longrightarrow -1 \leqslant 3-\alpha \leqslant 0 \\
&\Longrightarrow \mid 3-\alpha \mid \leqslant \mid -1 \mid \\
&\Longrightarrow \boxed{\mid 3-\alpha \mid \leqslant 1}
\end{aligned}$$

Donc l'initialisation est vraie.

Hérédité : Montrons que si pour un nombre naturel n fixé, la propriété est vraie au rang n , alors elle est encore vraie au rang $(n+1)$.

Montrons donc que si pour un nombre naturel n fixé, $\mid U_n - \alpha \mid \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$, alors $\mid U_{n+1} - \alpha \mid \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
En effet,

$$\begin{aligned}
\mid U_{n+1}-\alpha \mid &\leqslant \frac{1}{2} \mid U_n - \alpha \mid \qquad \text{(voir question 5. b)} \\
&\leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mid U_{n+1}-\alpha \mid \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

Donc l'hérédité est vraie.

Puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraies, **nous avons montré par récurrence que, pour tout entier naturel n ,** $\mid U_n - \alpha \mid \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

5. d) Pour un nombre naturel n ,

$$\mid U_n - \alpha \mid \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \Longleftrightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant U_n - \alpha \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{Or } \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 0 \\[2ex] \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \end{cases}$$

D'où, par la propriété d'encadrement, nous obtenons : $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - \alpha) = 0$, soit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha}$.

Partie B : Évaluation des compétences (6,75 points)

Tâche 1. Nous devons déterminer le nombre d'animaux de la réserve naturelle.
Les données de l'énoncé nous informent de la densité de la population de chaque site par km^2.
Nous sommes donc amenés à calculer l'aire de chaque site.

Une représentation graphique de la réserve naturelle est donnée par la courbe (C) d'équation $y = x^3 - 3x^2 + 4$,

la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = 2$.
Afin d'obtenir cette représentation graphique, nous allons étudier les variations de la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ sur l'intervalle [-1 ; 2].

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 + 4 \\ &= -1 - 3 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{f(-1) = 0}$

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 3 \times 2^2 + 4 \\ &= 8 - 12 + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{f(2) = 0}$

D'où, **les points de coordonnées (-1 ; 0) et (2 ; 0) appartiennent à la courbe (C).**

La fonction f est dérivable sur [-1 ; 2] (fonction polynôme).

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \times 2x \\ &= 3x^2 - 6x \\ &= 3x(x-2) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{f'(x) = 3x(x-2)}$

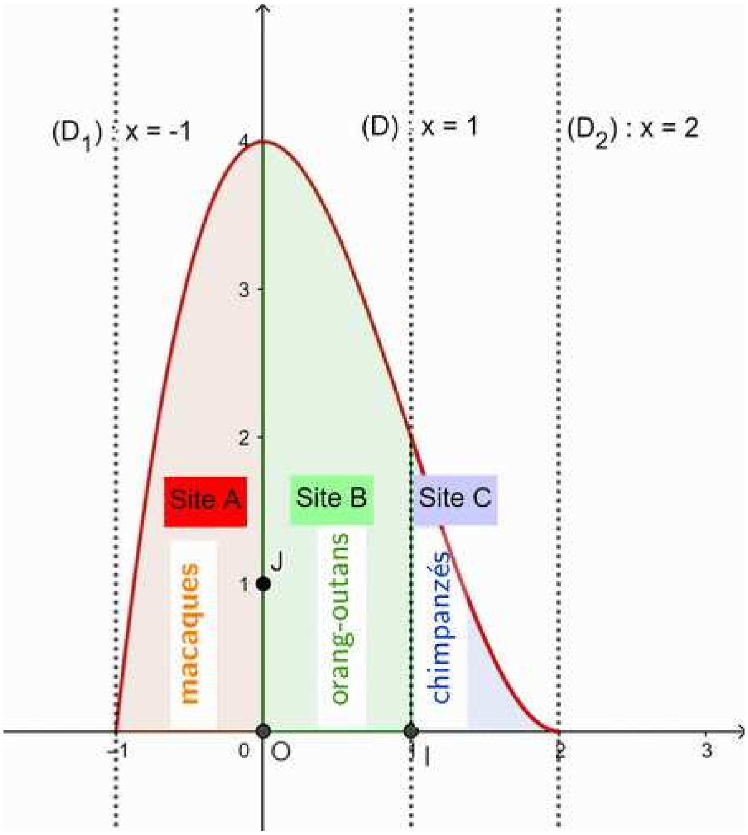
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Longleftrightarrow 3x(x-2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow 3x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2}$

Nous obtenons alors le tableau de signes de $f'(x)$ et les variations de f sur [-1 ; 2].

x	-1		0		2
$3x$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$	$-$	$-$	0
$f'(x) = 3x(x-2)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

Représentation graphique de la réserve naturelle.



Calculons d'abord les aires des trois sites en unités d'aires.

- L'aire $\mathscr{A}$ du site A se calcule par :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_{-1}^{0} (x^3 - 3x^2 + 4)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x\right]_{-1}^{0} \\
&= 0 - \left(\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^3 + 4 \times (-1)\right) \\
&= -\left(\frac{1}{4} + 1 - 4\right) = \frac{11}{4}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathscr{A} = \frac{11}{4} \text{ u.a.}}$$

- L'aire $\mathscr{B}$ du site B se calcule par :

$$\begin{aligned}
\mathscr{B} &= \int_{0}^{1} (x^3 - 3x^2 + 4)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x\right]_{0}^{1} \\
&= \left(\frac{1^4}{4} - 1^3 + 4 \times 1\right) - 0 \\
&= \frac{1}{4} - 1 + 4 = \frac{13}{4}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathscr{B} = \frac{13}{4} \text{ u.a.}}$$

- L'aire $\mathscr{C}$ du site C se calcule par :

$$\begin{aligned}\mathscr{C} &= \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 4)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x\right]_1^2 \\ &= \left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + 4\times 2\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 1^3 + 4\times 1\right) \\ &= (4 - 8 + 8) - (\frac{1}{4} - 1 + 4) = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{\mathscr{C} = \frac{3}{4} \text{ u.a.}}$

L'échelle du relevé topographique de la réserve est de 1 cm pour 4 km².
Donc l'unité d'aire du graphique correspond à $4 \times 4 = 16$ km².

Nous en déduisons que :

- L'aire $\mathscr{A}$ du site A est $\mathscr{A} = \frac{11}{4}$ u.a. $= 16 \times \frac{11}{4}$ km^2 , soit à $\boxed{\mathscr{A} = 44 \text{ km}^2}$
- L'aire $\mathscr{B}$ du site B est $\mathscr{B} = \frac{13}{4}$ u.a. $= 16 \times \frac{13}{4}$ km^2 , soit à $\boxed{\mathscr{B} = 52 \text{ km}^2}$
- L'aire $\mathscr{C}$ du site C est $\mathscr{C} = \frac{3}{4}$ u.a. $= 16 \times \frac{3}{4}$ km^2 , soit à $\boxed{\mathscr{C} = 12 \text{ km}^2}$

Le site A contient des macaques à raison de 15 macaques par km².
Le site A contient donc 15 × 44 = 660 macaques.
Le site B contient des orangs-outans à raison de 10 orangs-outans par km².
Le site B contient donc 10 × 52 = 520 orangs-outans.
Le site C contient des chimpanzés à raison de 12 chimpanzés par km².
Le site C contient donc 12 × 12 = 144 chimpanzés.

Par conséquent, **au total, il y a 660 + 520 + 144 animaux dans la réserves, soit 1324 animaux.**

Tâche 2. Nous devons déterminer le volume de vaccin en litres nécessaires pour la 3ème vaccination.

Soit x le nombre de macaques à vacciner
y le nombre d'orangs-outans à vacciner
z le nombre de chimpanzés à vacciner
t le volume de vaccin en millilitres nécessaire pour la 3ème dose.

La première dose nécessite 1,136 litre de vaccin, soit 1136 ml.
Nous obtenons ainsi une première équation : $2x + y + 3z = 1136$.
La deuxième dose nécessite 1,54 litre de vaccin, soit 1540 ml.
Nous obtenons ainsi une deuxième équation : $2x + 3y + 4z = 1540$.
Nous obtenons également une troisième équation : $2x + 5y + 5z = t$.

Déterminons la valeur de t dans le système suivant : $\begin{cases} 2x + y + 3z = 1136 & (1) \\ 2x + 3y + 4z = 1540 & (2) \\ 2x + 5y + 5z = t & (3) \end{cases}$

$$\begin{cases} (3) - (2) \\ (2) - (1) \end{cases} \iff \begin{cases} 2y + z = t - 1540 \\ 2y + z = 404 \end{cases}$$

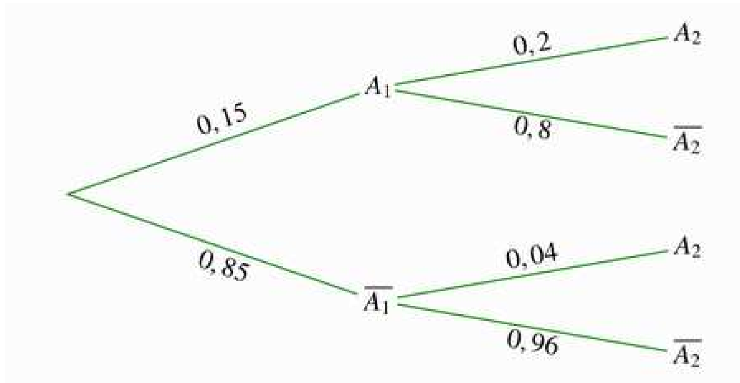
D'où $t - 1540 = 404$
$t = 1540 + 404$
$\boxed{t = 1944}$

Par conséquent, **le volume de vaccin nécessaire pour la 3ème vaccination est de 1944 ml, soit 1,944 litre.**

Tâche 3. Nous devons déterminer la probabilité pour que le chimpanzé choisi soit atteint de la maladie M_2.

Pour $i \in \{1\,,\,2\}$, soit A_i l'événement : le chimpanzé est atteint de la maladie M_i
$\overline{A_i}$ l'événement : le chimpanzé n'est pas atteint de la maladie M_i .

Etablissons un arbre de probabilité représentant la situation.



Nous devons déterminer $\mathbf{P(A_2)}$.
Les événements A_1 et $\overline{A_1}$ forment une partition de l'univers.
En utilisant la formule des probabilités totales, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(A_2) \\ &= 0,15 \times 0,2 + 0,85 \times 0,04 \\ &= 0,064 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{P(A_2) = 0,064}$

Par conséquent, **la probabilité pour que le chimpanzé choisi soit atteint de la maladie M_2 est égale à 0,064, soit 6,4 %.**