Correction

Exercice 1

Les mots manquants sont :

1) **Une bijection**

2) **La droite de regression**

3) **Des primitives**

4) **Fonction dérivable**

Exercice 2

1) La bonne réponse est **C**

> En effet :
>
> $\forall x \in \mathbb{R} : \left(-\dfrac{1}{2}e^{-2x+5}\right)' = -\dfrac{1}{2}(-2x+5)'e^{-2x+5} = -\dfrac{1}{2} \times (-2)e^{-2x+5} = e^{-2x+5}$

2) La bonne réponse est **A**

> L'équation caractéristique s'écrit : $r^2 - 4 = 0$
>
> Sans calculer le discriminent de cette dernière, on remarque que $r^2 - 4 = 0 \iff (r-2)(r+2) = 0 \iff r_1 = 2$ ou $r_2 = -2$
>
> L'équation caractéristique associée admet deux racines réelles distincts, donc les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y = 0$ sont les fonctions de la forme :
>
> $x \mapsto ke^{r_1 x} + k'e^{r_2 x} \ / \ k; k' \in \mathbb{R}$, donc $x \mapsto ke^{2x} + k'e^{-2x} \ / \ k; k' \in \mathbb{R}$

3) La bonne réponse est **A**

> $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - e^x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \dfrac{e^x}{x}\right) = (+\infty)(1-(+\infty)) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

4) La bonne réponse est **B**

On a $|-1+i| = \sqrt{2}$

Donc : $-1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Exercice 3

1) On a :

- $AB = |z_B - z_A| = |1+i-(-\sqrt{2})| = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{1+2\sqrt{2}+2+1} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$
- $AC = |z_C - z_A| = |1-i-(-\sqrt{2})| = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+2\sqrt{2}+2+1} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$

On obtient donc $AB = AC$, d'où :

$$\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est isocèle en } A}$$

2-a) S est la similitude directe du plan d'écriture complexe : $z' = (1+i)z + 1 - 3i$

On a :

$$(1+i)z_D + 1 - 3i = (1+i)(3+i) + 1 - 3i = 3 + i + 3i - 1 + 1 - 3i = 3 + i = z_D$$

Et :

$$(1+i)z_B + 1 - 3i = (1+i)^2 + 1 - 3i = 1 + 2i - 1 + 1 - 3i = 1 - i = z_C$$

On en tire que :

$$\boxed{S(D) = D \text{ et } S(B) = C}$$

b) Cherchons les éléments caractérisitiques de S :

- **Centre :** Puisque $S(D) = D$, alors D est le centre de la similitude S.
- **Rapport :** C'est le module du coefficient de z : $r = |1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- **Angle :** C'est un argument du coefficient de z :

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La similitude } S \text{ est de centre le point } D \text{ , d'angle de mesure } \frac{\pi}{4} \text{ et de rapport } \sqrt{2}}$$

c) Puisque $S(D) = D$ et $S(B) = C$

Alors l'image de $[BD]$ est : $S([BD]) = [S(B)S(D)] = [CD]$

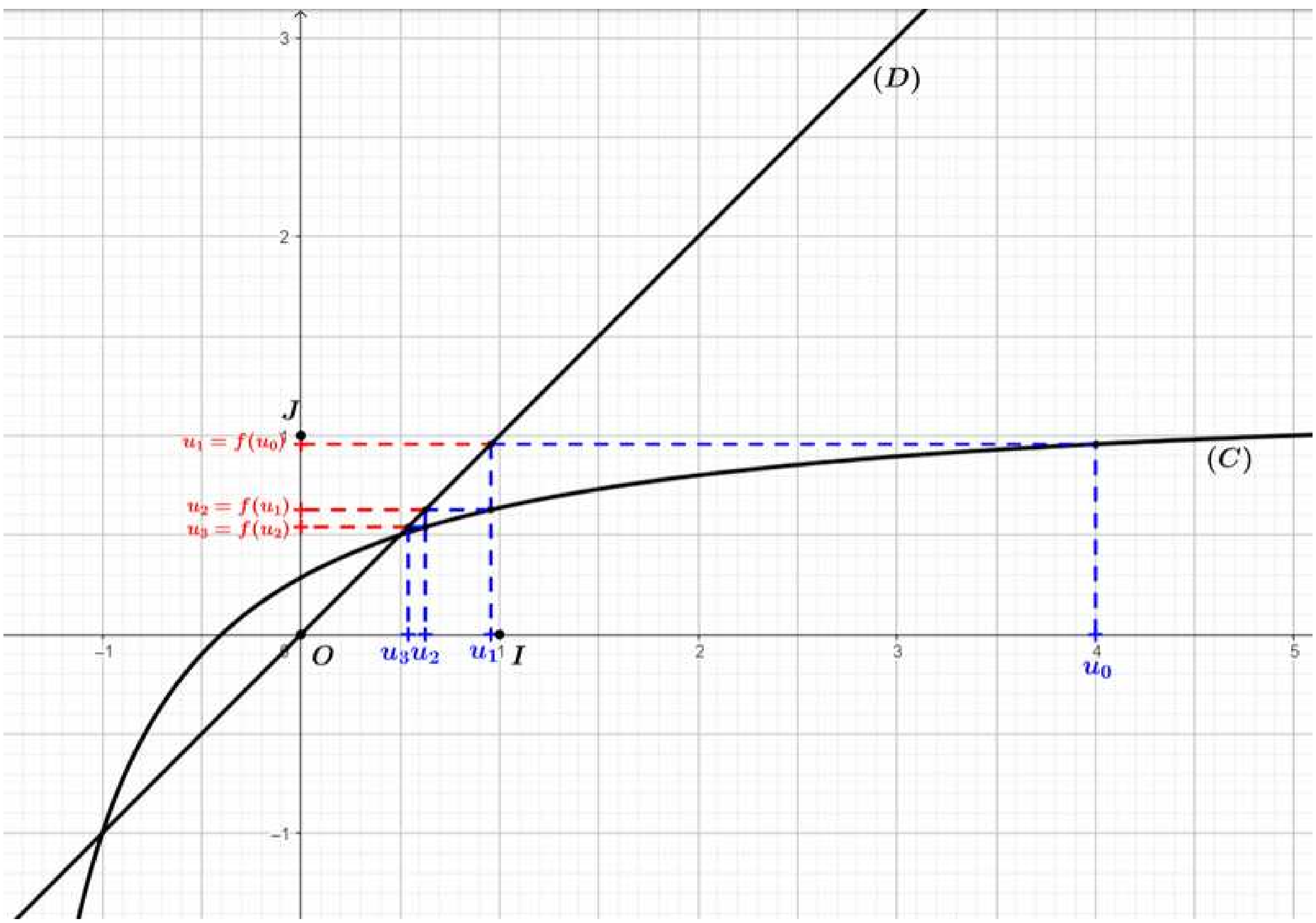
D'où :

$$\boxed{\text{L'image du cercle } (C) \text{ de diamètre } [BD] \text{ par } S \text{ est le cercle } (C') \text{ de diamètre } [CD]}$$

Exercice 4

1) **Méthode :** On commence par construire $u_0 = 4$ sur l'axe des abscisses, puis, en sachant que u_1 est l'image de u_0 par la fonction f, on utilise la courbe (C) pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées, enfin, on utilise la droite $(D) : y = x$ pour "projeter" u_1 sur l'axe des abscisses.

On construit de la même manière $u_2 = f(u_1)$ et $u_3 = f(u_2)$.



2-a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > \dfrac{1}{2}$.

• **Initialisation :** pour $n = 0$: $u_0 = 4 > \dfrac{1}{2}$
La proposition est vérifiée pour $n = 0$.

• **Hérédité :** Supposons qu'on a, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \dfrac{1}{2}$, montrons alors que dans ce cas , on a aussi $u_{n+1} > \dfrac{1}{2}$

Puisque que f est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc $u_n > \frac{1}{2} \Longrightarrow f(u_n) > f\left(\frac{1}{2}\right)$

Or, on sait que : $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{5 \times \frac{1}{2} + 2}{4 \times \frac{1}{2} + 7} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

On en déduit que : $u_{n+1} > \frac{1}{2}$

- **Conclusion :** On conclut par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : u_n > \frac{1}{2}}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n &&= \frac{5u_n + 2}{4u_n + 7} - u_n \\
&= \frac{(5u_n + 2) - u_n(4u_n + 7)}{4u_n + 7} &&= \frac{5u_n + 2 - 4u_n^2 + 7u_n}{4u_n + 7} \\
&= \frac{-4u_n^2 - 2u_n + 2}{4u_n + 7} &&= \frac{2(-2u_n^2 - u_n + 1)}{4u_n + 7}
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2(u_n + 1)(-2u_n + 1) = 2(-2u_n^2 + u_n - 2u_n + 1) = 2(-2u_n^2 - u_n + 1)$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } u_{n+1} - u_n = \frac{2(u_n + 1)(-2u_n + 1)}{4u_n + 7}}$$

c) Puisque $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > \frac{1}{2}$, alors il est évident que $u_n + 1 > 0$ et $4u_n + 7 > 0$

Donc le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $(-2u_n + 1)$.

De plus $u_n > \frac{1}{2} \Rightarrow -2u_n < -1 \Rightarrow -2u_n + 1 < 0$

On en tire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante.}}$$

3-a) On a vu que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante .

Et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > \frac{1}{2}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{1}{2}$

D'où :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite convergente.}}$$

b) On sait que :

- f est continue sur $]0;+\infty[$, donc aussi sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.
- $u_0 = 4 \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$
- $f\left(\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right) = \left]\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right[\Longrightarrow f\left(\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right) \subset \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

En effet $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x+2}{4x+7} = \frac{5}{4}$ et f est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

- (u_n) est convergente

Donc la limite ℓ de (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{array}{lclcl}
f(\ell) = \ell & \iff & \dfrac{5\ell+2}{4\ell+7} = \ell & \iff & 5\ell + 2 = \ell(4\ell+7) \\
 & \iff & 5\ell + 2 = 4\ell^2 + 7\ell & \iff & 4\ell^2 + 2\ell - 2 = 0 \\
 & \iff & 2\ell^2 + \ell - 1 = 0 & \iff & (\ell+1)(2\ell-1) = 0 \quad \text{(On a factorisé ce même trinôme en } 2-b)) \\
 & \iff & \ell + 1 = 0 \text{ ou } 2\ell - 1 = 0 & \iff & \ell = -1 \text{ ou } \ell = \dfrac{1}{2}
\end{array}$$

Or, $-1 \notin \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et donc, seul $\ell = \frac{1}{2}$ convient.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = \frac{1}{2}}$$

Exercice 5

1-a) Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, alors :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x - 2x = 0 - 0 = 0$

De plus $f(0) = 0$, on obtient donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

D'où :

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0}$$

b) Calcul :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x - 2x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(\ln x - 2)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln x - 2 = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty}$$

c) On déduit de $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$ que f n'est pas dérivable à droite en 0 .

Interprétation graphique :

$$\boxed{(C_f) \text{ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse } 0 \text{ , donc au point } O(0;0)}$$

2) On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Interprétation graphique :

$$\boxed{\text{La courbe } (C_f) \text{ admet une branche parabolique de la direction celle de l'axe des abscisses au voisinage de } +\infty}$$

3-a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} \forall x \in]0;+\infty[\ : f'(x) &= (x\ln x - 2x)' &= x'\ln x + x(\ln x)' - 2 \\ &= \ln x + x \times \frac{1}{x} - 2 &= \ln x - 1 \end{aligned}$$

Ou encore :

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\ , \ f'(x) = -1 + \ln x}$$

b) On résoud l'équation $f'(x) = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$

Or, on sait que la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$, alors :

- $\forall x \in]0;e] : 0 < x \leqslant e \iff \ln x \leqslant 1 \iff -1 + \ln x \leqslant 0 \iff f'(x) \leqslant 0$
- $\forall x \in [e;+\infty[\ : x \geqslant e \iff \ln x \geqslant 1 \iff -1 + \ln x \geqslant 0 \iff f'(x) \geqslant 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ est décroissante sur }]0;e] \\ f \text{ est croissante sur } [e;+\infty[\end{array}}$$

c) A partir de ce qui précède, on dresse le tableau de variations de f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| 0	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$+\infty$

En effet, on a : $f(e) = e\ln e - 2e = e - 2e = -e$

4) Même si c'est non demandé, et afin de construire le graphique (C_f) d'une manière plus précise, on cherche le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses (OI) . Pour cela, on résoud l'équation $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \iff x\ln x - 2x = 0 \iff x\ln x = 2x \iff \ln x = 2 \iff x = e^2$

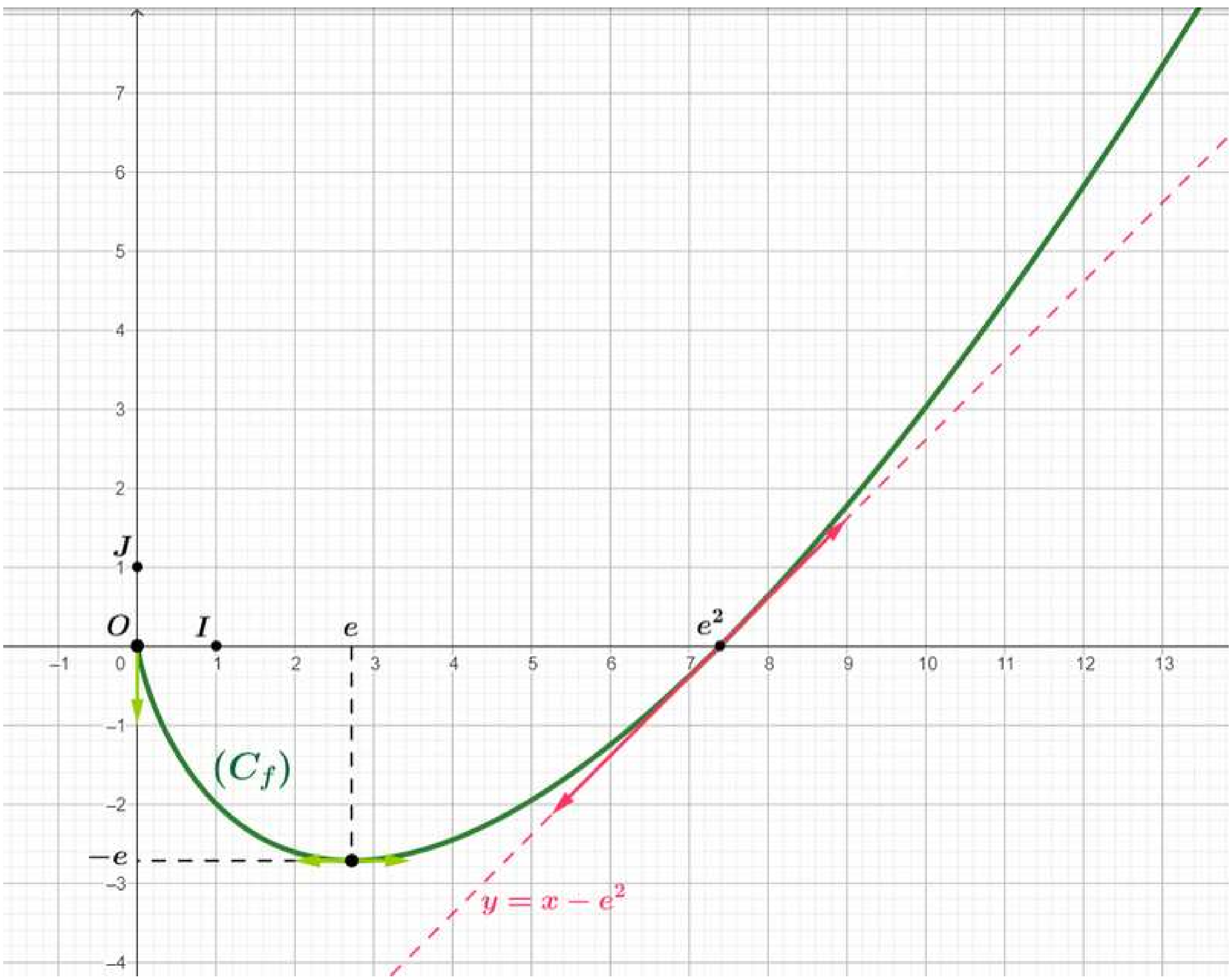
Donc (C_f) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse e^2 .

On peut aussi déterminer l'équation de la tangente en ce point : $y = f'(e^2)(x - e^2) + f(e^2)$

On a : $f(e^2) = 0$ (évident), et $f'(e^2) = -1 + \ln e^2 = -1 + 2\ln e = -1 + 2 = 1$

L'équation de la tangente au point d'abscisse e^2 est donc : $y = x - e^2$

Graphique :



5-a) Intégration par parties :

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases}$ et donc $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Donc :

$$
\begin{aligned}
K &= \int_1^2 x \ln x \, \mathrm{d}x &&= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2^2}{2}\ln 2 - 0 - \frac{1}{2}\int_1^2 x \, \mathrm{d}x &&= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\
&= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1}{2}\right) &&= 2\ln 2 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \\
&= 2\ln 2 - \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{K = 2\ln 2 - \frac{3}{4}}$$

b) L'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) , la droite (OI) qui est l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ est en unité d'aire (UA) :

$$A = \int_1^2 |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

Et puisque la courbe (C_f) est en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1;2]$, alors $\forall x \in [1;2] : f(x) \leqslant 0$

$$A = \int_1^2 |f(x)| \, \mathrm{d}x = \int_1^2 -f(x) \, \mathrm{d}x = \int_1^2 2x - x\ln x \, \mathrm{d}x = \int_1^2 2x \, \mathrm{d}x - K$$

On en déduit que :

$A = \left[x^2\right]_1^2 - K = 4 - 1 - 2\ln 2 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{12+3}{4} - 2\ln 2 = \dfrac{15}{4} - 2\ln 2 \ \ (UA)$

Finalement, puisque l'unité graphique est 2cm , alors 1 UA = 2 cm × 2 cm = 4 cm^2

$$\boxed{A = 15 - 8\ln 2 \text{ cm}^2}$$

Exercice 6

Pour dire si l'affirmation de l'élève est vraie ou non, on utilise des notions de probabilité. Pour ce faire :

- On utilise la variable aléatoire X qui correspond au nombre d'épreuves réussies.
- On détermine la loi binomiale associée à X.
- On calcule $P(X \geqslant 2)$, car pour obtenir au moins **4 tickets** qui permetteront de gagner 2500 F CFA, un joueur doit réussir à loger au moins 2 boules dans le trou.
- On compare $P(X \geqslant 2)$ à $0,2$ car l'élève affirme qu'un joueur a moins de 20% de chance de gagner les 2500 F CFA.

Puisque le joueur reçoit 4 boules, alors les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 et 4.

De plus, le joueur a 25% de chance de loger une boule dans le trou, donc X suit la loi binomiale de paramètres

$n = 4$ et $p = 0,25$

Donc :

$$P(X = k) = \binom{4}{k} \times (0,25)^k \times (1 - 0,25)^{4-k} \text{ , avec } k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

On obtient :

$$P(X = k) = \binom{4}{k} \times (0,25)^k \times (0,75)^{4-k} \text{ , avec } k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

Calculons $P(X \geqslant 2)$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X \geqslant 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\
&= \binom{4}{2} \times (0,25)^2 \times (0,75)^{4-2} + \binom{4}{3} \times (0,25)^3 \times (0,75)^{4-3} + \binom{4}{4} \times (0,25)^4 \times (0,75)^{4-4} \\
&= 6 \times (0,25)^2 \times (0,75)^2 + 4 \times (0,25)^3 \times 0,75 + (0,25)^4 \\
&\approx \boxed{0,2617}
\end{aligned}$$

On en tire que :

$$\boxed{P(X \geqslant 2) > 0,2}$$

On conclut que :

$$\boxed{\text{L'affirmation de l'élève est fausse : Un joueur a environ 26\% de chance de gagner 2500 F CFA}}$$