Correction

Bac D Côte d'Ivoire 2021

Exercice 1 (2 points)

Affirmation n° 1 : affirmation fausse

La fonction **ln** n'est pas strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
Un contre-exemple le montre facilement.
Les nombres 1 et **e** appartiennent à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Nous savons que $1 < \mathbf{e}$ puisque $\mathbf{e} \approx 2{,}718$.
Si la fonction ln était strictement décroissante, nous aurions : $\ln(1) > \ln(e)$, ce qui n'est pas le cas puisque les égalités $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ impliquent que $\ln(1) < \ln(e)$.
Donc l'affirmation n°1 est fausse.
En fait, la fonction **ln** est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Affirmation n° 2 : affirmation vraie

Nous savons que la fonction **ln** est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ vérifiant :$\ln(1) = 0$ et pour tout réel strictement positif x : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
Dès lors, La fonction **ln** est la primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction : $x \to \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.
Donc l'affirmation n°2 est vraie.

Affirmation n° 3 : affirmation fausse

On considère la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$
Déterminons les trois premiers termes de cette suite.

$\boxed{u_0 = 2}$

$u_1 = 3u_0 = 3 \times 2 = 6 \Longrightarrow \boxed{u_1 = 6}$

$u_2 = 3u_1 = 3 \times 6 = 18 \Longrightarrow \boxed{u_2 = 18}$

$$\begin{cases} u_2 - u_1 = 6 - 2 = 4 \\ u_3 - u_2 = 18 - 6 = 12 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2}.$$

La suite u n'est dès lors pas arithmétique.
Donc l'affirmation n°3 est fausse.
En fait, la suite u est une suite géométrique.

Affirmation n° 4 : affirmation vraie

Il s'agit de l'**inégalité des accroissements finis**.

Exercice 2 (2 points)

Énoncé incomplet n° 1. Soit u la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}. \end{cases}$

La suite u a pour limite **2.** **(Réponse B)**

Justification

Nous observons que
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_1 = \sqrt{2 + u_0} = \sqrt{2 - 2} = 0 \\ u_2 = \sqrt{2 + u_1} = \sqrt{2 + 0} = \sqrt{2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_1 = 0 \\ u_2 = \sqrt{2} \end{cases}}$$

Montrons par récurrence que la suite u est croissante.

Initialisation : Montrons que la propriété est vraie pour $n = 0$, soit que : $u_0 < u_1$.
C'est évident puisque $-2 < 0 \Longleftrightarrow u_0 < u_1$.

Hérédité : Montrons que si pour un nombre naturel n fixé, la propriété est vraie au rang n, alors elle est encore vraie au rang $(n+1)$.
Montrons donc que si pour un nombre naturel n fixé, $u_n < u_{n+1}$, alors $u_{n+1} < u_{n+2}$.
En effet,

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} < \sqrt{2+u_{n+1}} = u_{n+2} \Longrightarrow \boxed{u_{n+1} < u_{n+2}}$$

Donc l'hérédité est vraie.

Puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraies, **nous avons montré par récurrence que la suite u est croissante.**

Montrons par récurrence que la suite u est majorée par 2.
Initialisation : Montrons que la propriété est vraie pour $n = 0$, soit que : $u_0 < 2$.
C'est évident puisque $-2 < 2 \Longleftrightarrow u_0 < 2$.

Hérédité : Montrons que si pour un nombre naturel n fixé, la propriété est vraie au rang n, alors elle est encore vraie au rang $(n+1)$.
Montrons donc que si pour un nombre naturel n fixé, $u_n < 2$, alors $u_{n+1} < 2$.
En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} &\Longrightarrow u_{n+1} < \sqrt{2+2} \qquad (\text{car } u_n < 2) \\ &\Longrightarrow u_{n+1} < \sqrt{4} \\ &\Longrightarrow \boxed{u_{n+1} < 2} \end{aligned}$$

Donc l'hérédité est vraie.

Puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraies, **nous avons montré par récurrence que la suite u est bornée par 2.**

Étant croissante et bornée par 2, la suite u admet une limite ℓ.

ℓ est solution de l'équation $\ell = \sqrt{2+\ell}$.

$$\ell = \sqrt{2+\ell} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ell \geqslant 0 \\ \ell^2 = 2+\ell \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ell \geqslant 0 \\ \ell^2 - \ell - 2 = 0 \end{cases}$$

Résolvons l'équation du second degré : $\ell^2 - \ell - 2 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Discriminant : } \Delta &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) \\ &= 1 + 8 \\ &= 9 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Racines : } \ell_1 &= \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1 \\ \ell_2 &= \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2 \end{aligned}$$

La valeur $\ell = -1$ est à rejeter car $\ell \geqslant 0$.
D'où $\boxed{\ell = 2}$
Par conséquent **la suite u a pour limite 2.**

Énoncé incomplet n° 2. L'inéquation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $\ln(x) - 1 \leqslant 0$, a pour ensemble de solutions $]0\,;\, \mathrm{e}]$. **(Réponse B)**

<u>Justification</u>

$\ln(x)$ n'est défini que pour $\boldsymbol{x > 0}$.
Résolvons donc l'inéquation $\ln(x) - 1 \leqslant 0$ pour tout x dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

$\ln(x) - 1 \leqslant 0 \Longleftrightarrow \ln(x) \leqslant 1 \Longleftrightarrow x \leqslant \mathrm{e}^1 \Longleftrightarrow x \leqslant \mathrm{e}$

Or $x > 0$.

D'où $\boxed{0 < x \leqslant \mathrm{e}}$
Par conséquent, **l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]0\,;\,\mathrm{e}]$.**

Énoncé incomplet n° 3. On pose : $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$. On note r le module de z et θ l'argument principal de z .

r et θ vérifient : $r = 2$ et $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$.

Justification
$r = |-\sqrt{3} + \mathrm{i}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\Longrightarrow \boxed{r = 2}$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{-\sqrt{3}}{r} \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{r} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{\theta = \dfrac{5\pi}{6}}$$

Énoncé incomplet n° 4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u}, \vec{v})$.
Soient I et J les points d'affixes respectives 1 et **i**.
On note (Γ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant : $|z - 1| = |z - \mathrm{i}|$.
(Γ) est **la médiatrice du segment [IJ].** **(Réponse C)**

Justification

$|z-1| = |z-\mathrm{i}| \Longleftrightarrow MI = MJ$.
Les points M sont donc équidistants des points I et J.
Par conséquent, **l'ensemble des points M est la médiatrice du segment [IJ].**

Énoncé incomplet n° 5. Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle K telle que :
$\forall x \in \mathrm{K},\ f'(x) > 0$.
f est une bijection de K vers f (K).
$\forall a \in f(\mathrm{K}), (f^{-1})'(a)$ est égal à $\dfrac{1}{f'(f^{-1}(a))}$. **(Réponse D)**

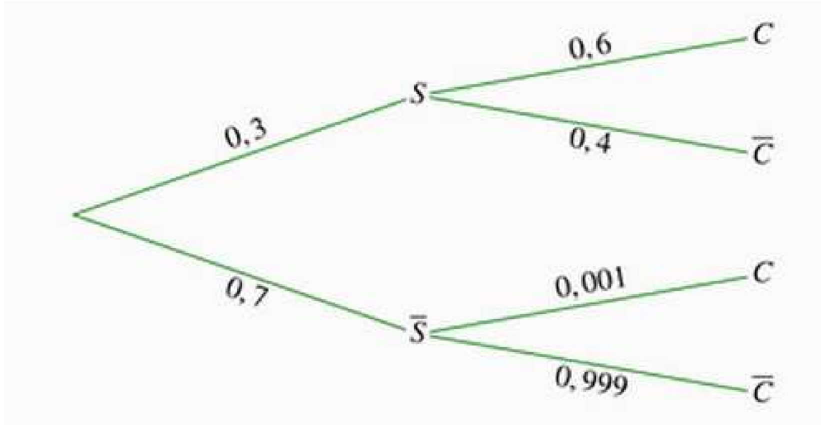
Justification
Par définition de fonction réciproque, nous avons : $\forall\ x \in f(K),\ f(f^{-1}(x)) = x$.
En dérivant les deux membres et en utilisant la formule de dérivation de la fonction composée, nous obtenons :

$$\forall x \in\ f(K),\ \Big(f(f^{-1}(x))\Big)' = x' \Longrightarrow f'(f^{-1}(x)) \times (f^{-1})'(x) = 1.$$

$$\Longrightarrow \boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}.$$

Exercice 3 (3 points)
Dans une ville, 30% de la population ont un âge supérieur ou égal à 65 ans.
60% des personnes ayant un âge supérieur ou égal à 65 ans sont atteints de la Covid-19.
0,1% des personnes de moins de 65 ans sont atteints de la Covid-19.

1. a) Arbre pondéré représentant la situation.



1. b) 60% des personnes ayant un âge supérieur ou égal à 65 ans sont atteints de la Covid-19.

D'où $\boxed{P_S(C) = 0,6}$

1. c) Nous devons déterminer $P(S \cap C)$.

$$\begin{aligned} P(S \cap C) &= P(S) \times P_S(C) \\ &= 0,3 \times 0,6 \\ &= 0,18 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{P(S \cap C) = 0,18}$

Par conséquent, **la probabilité que la personne ait au moins 65 ans et soit atteinte de la Covid-19 est égale à 0,18.**

2. Nous devons déterminer $\mathbf{P(C)}$.

Les événements S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers.
En utilisant la formule des probabilités totales, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(S \cap C) + P(\overline{S} \cap C) \\ &= 0,18 + P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(C) \\ &= 0,18 + 0,7 \times 0,001 \\ &= 0,1807 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{P(C) = 0,1807}$

3. On prend au hasard n personnes dans la ville et on note P_n la probabilité d'avoir au moins une personne atteinte de la Covid-19 $(n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\})$.

3. a) Nous avons montré dans la question 2. que si on choisit une personne au hasard, la probabilité qu'elle soit atteinte de la Covid est égale à 0,1807.
Donc la probabilité qu'elle ne soit pas atteinte de la Covid-19 est égale à 1 - 0,1807 = 0,8193.
Si on prend au hasard n personnes, la probabilité qu'aucune d'entre elles ne soit atteinte de la Covid-19 est

égale à **(0,8193)^n.**
Dès lors, la probabilité d'avoir au moins une personne atteinte de la Covid-19 est $\boldsymbol{P_n}$ **= 1 - (0,8193)^n.**

3. b) Nous devons déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant l'inégalité $P_n > 0,9999$.

$$\begin{aligned} P_n > 0,9999 &\Longleftrightarrow 1 - (0,8193)^n > 0,9999 \\ &\Longleftrightarrow -(0,8193)^n > 0,9999 - 1 \\ &\Longleftrightarrow -(0,8193)^n > -0,0001 \\ &\Longleftrightarrow (0,8193)^n < 0,0001 \end{aligned}$$

$$\iff \ln((0,8193)^n) < \ln(0,0001)$$
$$\iff n \times \ln(0,8193) < \ln(0,0001)$$
$$\iff n > \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,8193)} \text{ (changement de sens de l'inégalité car } \ln(0,8193) < 0)$$

Or $\dfrac{\ln(0,0001)}{\ln(0,8193)} \approx 46,2$

D'où la plus petite valeur de l'entier naturel n vérifiant l'inégalité est $\boldsymbol{n = 47}$.

Par conséquent, **il faudra au minimum 47 personnes pour que la probabilité d'avoir au moins une personne atteinte de la Covid-19 soit supérieure à 99,99 %.**

Exercice 4 (4 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{1-x} - x + 1$.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ signifie que la courbe (C) admet une branche infinie.

Si de plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

2. a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{1-x} = 0 \end{cases} \implies \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)\,\mathrm{e}^{1-x} = 0$ (croissances comparées)

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)\,\mathrm{e}^{1-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (-x+1) = -\infty \end{cases} \implies \lim\limits_{x\to+\infty} [(x+1)\,\mathrm{e}^{1-x} - x + 1] = -\infty$

$\implies \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

2. b) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)\,\mathrm{e}^{1-x} = 0$ (voir 2. a)

$\implies \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (-x+1)] = 0}$

Nous en déduisons que **la droite (D) d'équation $\boldsymbol{y = -x + 1}$ est une asymptote à $\boldsymbol{(C)}$ en $\boldsymbol{+\infty}$.**

3. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x\mathrm{e}^{1-x} + 1$.

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. a) Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x+1)\,\mathrm{e}^{1-x} - x + 1]' \\ &= [(x+1)\,\mathrm{e}^{1-x}]' - 1 + 0 \\ &= [(x+1)\,\mathrm{e}^{1-x}]' - 1 \\ &= (x+1)' \times \mathrm{e}^{1-x} + (x+1) \times (\mathrm{e}^{1-x})' - 1 \\ &= 1 \times \mathrm{e}^{1-x} + (x+1) \times (1-x)'\mathrm{e}^{1-x} - 1 \\ &= \mathrm{e}^{1-x} + (x+1) \times (-1)\,\mathrm{e}^{1-x} - 1 \\ &= \mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^{1-x} - \mathrm{e}^{1-x} - 1 \\ &= -x\mathrm{e}^{1-x} - 1 \\ &= -(x\mathrm{e}^{1-x} + 1) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

$\implies \boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -g(x)}$

3. b) On admet qu'il existe un nombre réel α élément de l'intervalle [-0,4 ; -0,2] tel que $g(\alpha) = 0$ et

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;\,\alpha[,\ g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha\,;\,+\infty[,\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi le tableau de signes de la fonction g et par conséquent, le tableau de signes de $f'(x)$.

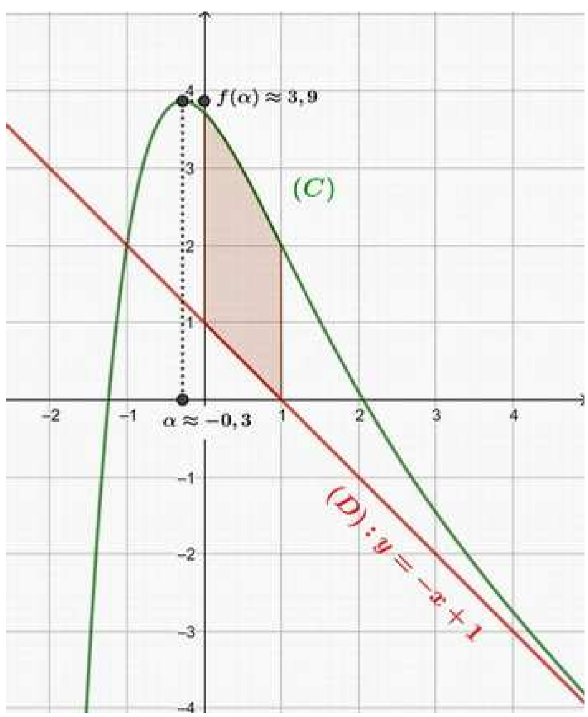
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x) = -g(x)$		$+$	0	$-$	

D'où, **la fonction f est** • **strictement croissante sur l'intervalle** $]-\infty\,;\alpha[$
• **strictement décroissante sur l'intervalle** $]\alpha\,;+\infty[$**..**

3. c) Sur base de la question 3. b), nous pouvons déduire le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		$\alpha \approx -0,3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha) \approx 3,9$	$\searrow$	$-\infty$

4. Représentation de la courbe (C).



5. a) a) $K = \displaystyle\int_0^1 (f(x) - (-x+1))\mathrm{d}x$. représente l'aire du domaine situé entre la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

5. b) Déterminons la valeur de $K = \displaystyle\int_0^1 (f(x) - (-x+1))\mathrm{d}x$..

$K = \int_0^1 (f(x) - (-x+1))\mathrm{d}x$

$\Longrightarrow K = \int_0^1 (x+1)\,\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x.$

Formule de l'intégrale par parties : $\int\limits_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_0^1 - \int\limits_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$

$\begin{cases} u(x) = x+1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{1-x} \end{cases} \quad \begin{matrix} \Longrightarrow & u'(x) = 1 \\ \Longrightarrow & v(x) = -\mathrm{e}^{1-x} \end{matrix}$

Dès lors, $K = \Big[(x+1)\times(-\mathrm{e}^{1-x})\Big]_0^1 - \int\limits_0^1 1\times(-\mathrm{e}^{1-x})\,\mathrm{d}x$

$= \Big[-(x+1)\,\mathrm{e}^{1-x}\Big]_0^1 - \int\limits_0^1 (-\mathrm{e}^{1-x})\,\mathrm{d}x$

$= \Big[-(x+1)\,\mathrm{e}^{1-x}\Big]_0^1 - \Big[\mathrm{e}^{1-x}\Big]_0^1$

$= \Big[(-x-1)\,\mathrm{e}^{1-x} - \mathrm{e}^{1-x}\Big]_0^1$

$= \Big[(-x-1-1)\,\mathrm{e}^{1-x}\Big]_0^1$

$= \Big[(-x-2)\,\mathrm{e}^{1-x}\Big]_0^1$

$= (-1-2)\,\mathrm{e}^{1-1} - (0-2)\,\mathrm{e}^{1-0} = -3 + 2\,\mathrm{e}.$

Par conséquent, $\boxed{K = 2\,\mathrm{e} - 3}$

Exercice 5 (4 points)

On note A et B les points d'affixes respectives 8 et 4 + 4i.

1. On considère la similitude directe S de centre O telle que S(A)=B.

1. a) Nous savons que l'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ avec $a \neq 0$.
Comme le point O est le centre de la similitude S, nous savons que S(O) = O.
Nous en déduisons que

$$\begin{cases} S(O) = O \\ S(A) = B \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z_O = a\,z_O + b \\ z_B = a\,z_A + b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = a\times 0 + b \\ 4+4\mathrm{i} = a\times 8 + b \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 4+4\mathrm{i} = 8a + b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 8a = 4+4\mathrm{i} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{1}{8}(4+4\mathrm{i}) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \end{cases}$$

D'où, **la similitude directe S a pour écriture complexe :** $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) z.$

1. b) Rapport k de S.

$k = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

D'où **le rapport de la similitude S est égal à** $\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Angle θ de S.

Nous savons que $\theta = \arg\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$.

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$$

D'où **l'angle principal de la similitude S est** $\frac{\pi}{4}$.

2. On considère les points A_n tels que $\begin{cases} A_0 = A \\ \forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = S(A_n) \end{cases}$
On désigne par z_n l'affixe du point A_n.

2. a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}, z_n = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n$.

__Initialisation__ : Montrons que la propriété est vraie pour $n = 0$, soit que : $z_0 = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^0$.
z_0 est l'affixe du point A_0, soit 8.
De plus, $8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^0 = 8 \times 1 = 8$.

Donc $z_0 = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^0$ et par conséquent, l'initialisation est vraie.

__Hérédité__ : Montrons que si pour un nombre naturel n fixé, la propriété est vraie au rang n, alors elle est encore vraie au rang $(n+1)$.

Montrons donc que si pour un nombre naturel n fixé, $z_n = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n$, alors $z_{n+1} = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{n+1}$.
En effet,

$$\begin{aligned} A_{n+1} = S(A_n) &\Longrightarrow z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) z_n \\ &\Longrightarrow z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) \times 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n \\ &\Longrightarrow \boxed{z_{n+1} = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc l'hérédité est vraie.

Puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraies, **nous avons montré par récurrence que, pour tout entier naturel n ,** $z_n = 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n$.

2. b) Montrons que le triangle $\mathrm{OA}_n\,\mathrm{A}_{n+1}$ est isocèle en A_{n+1}.

$$\begin{aligned} OA_{n+1} = |z_{n+1}| &= \left|8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{n+1}\right| \\ &= 8\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|^{n+1} \\ &= 8\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\right)^{n+1} \\ &= 8\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

$$A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$$
$$= \left|8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{n+1} - 8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{n}\right|$$
$$= \left|8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-1\right)\right|$$
$$= \left|8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{n}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right|$$
$$= 8\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\right)^{n}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}$$
$$= 8\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{n}\sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$= 8\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{n+1}$$

D'où $\mathrm{OA}_{n+1} = \mathrm{A}_n \mathrm{A}_{n+1}$ et par suite, **le triangle $\mathbf{OA}_n \mathbf{A}_{n+1}$ est isocèle en $\mathbf{A}_{n+1}$.**

Montrons que le triangle $\mathrm{OA}_n \mathrm{A}_{n+1}$ est rectangle.

$$OA_{n+1} = A_nA_{n+1} = 8\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{n+1} \Longrightarrow (OA_{n+1})^2 + (A_nA_{n+1})^2 = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
$$\Longrightarrow (OA_{n+1})^2 + (A_nA_{n+1})^2 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
$$\Longrightarrow (OA_{n+1})^2 + (A_nA_{n+1})^2 = 128\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$
$$\Longrightarrow (OA_{n+1})^2 + (A_nA_{n+1})^2 = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$OA_n = |z_n| = \left|8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{n}\right| = 8\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\right)^{n} = 8\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{n} \Longrightarrow (OA_n)^2 = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

D'où $\boxed{(OA_n)^2 = (OA_{n+1})^2 + (A_nA_{n+1})^2}$
Par la réciproque du théorème de Pythagore, nous en déduisons que **le triangle $\mathbf{OA}_n \mathbf{A}_{n+1}$ est rectangle en $\mathbf{A}_{n+1}$.**
Par conséquent, **le triangle $\mathbf{OA}_n \mathbf{A}_{n+1}$ est isocèle rectangle en $\mathbf{A}_{n+1}$.**

3. a) Nous savons que $\forall n \in \mathbf{N}, z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) z_n$.

$z_0 = z_A = 8$

$z_1 = z_B = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i})z_0 = 8(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}) = 4 + 4\mathrm{i}$

$z_2 = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i})z_1 = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i})(4+4\mathrm{i}) = 4\mathrm{i}$

$z_3 = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i})z_2 = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i})4\mathrm{i} = -2 + 2\mathrm{i}$

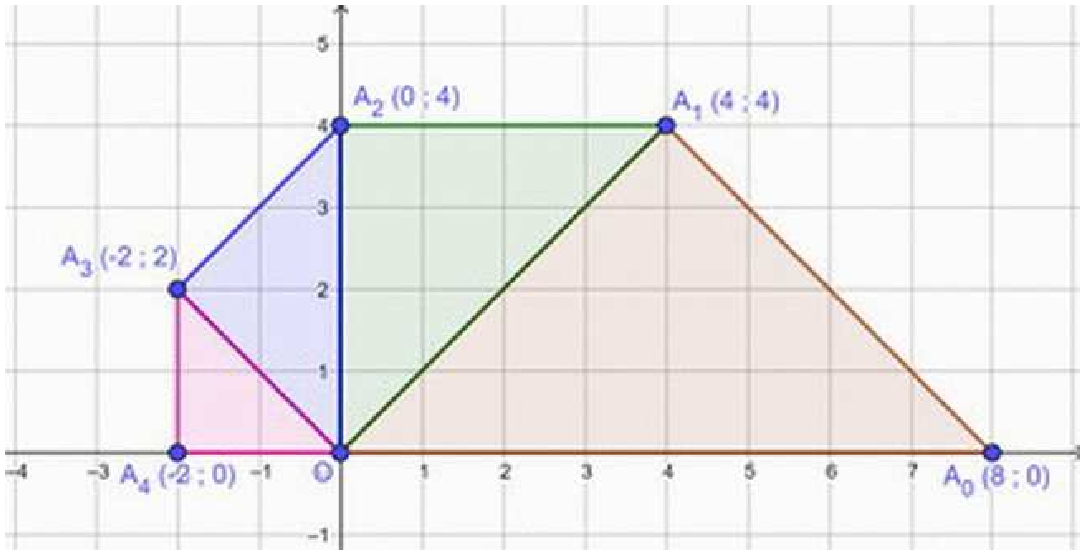
$z_4 = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i})z_3 = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i})(-2+2\mathrm{i}) = -2 \qquad \Longrightarrow \qquad A_0\,(8;0)$

$A_1\,(4\,;4)$

$A_2\,(0\,;4)$

$A_3\,(-2\,;2)$

$A_4\,(-2\,;0)$



3. b) Nous savons par la question 2. b) que le triangle $\mathrm{OA_0A_1}$ est rectangle et isocèle en $\mathrm{A_1}$.Nous avons également montré dans cette question que : $OA_{n+1} = A_nA_{n+1} = 8\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^{n+1}$.

Dès lors, $OA_1 = A_0A_1 = 8\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

Le triangle $\mathrm{OA_0A_1}$ admet pour base $\mathrm{OA_1}$ et pour hauteur $\mathrm{A_0A_1}$.
L'aire $\mathscr{A}_0$ du triangle $\mathrm{OA_0A_1}$ est donnée par la formule : $\mathscr{A}_0 = \dfrac{OA_1 \times A_0A_1}{2}$

$$\mathscr{A}_0 = \frac{8\sqrt{\frac{1}{2}} \times 8\sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{64 \times \frac{1}{2}}{2} \Longrightarrow \boxed{\mathscr{A}_0 = 16}$$

Par conséquent, **l'aire du triangle $\mathbf{OA_0A_1}$ est égale à 16 cm².**

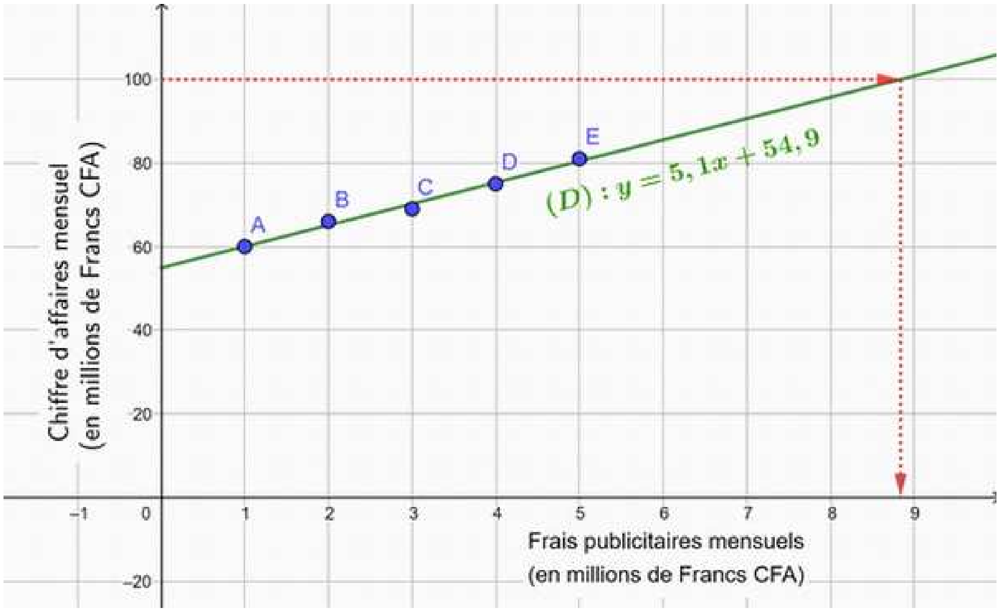
3. c) Le polygone $\mathrm{A_0A_1A_2A_3A_4}$ est la réunion des triangles $\mathrm{OA_0A_1}$, $\mathrm{OA_1A_2}$, $\mathrm{OA_2A_3}$, $\mathrm{OA_3A_4}$.
Le rapport de la similitude S est $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

D'où le rapport des aires est $k^2 = \dfrac{1}{2.}$
Nous en déduisons que les aires respectives des triangles $\mathrm{OA_0A_1}$, $\mathrm{OA_1A_2}$, $\mathrm{OA_2A_3}$ et $\mathrm{OA_3A_4}$ sont égales à 16, 8, 4 et 2.
Par conséquent, **l'aire du polygone $\mathbf{A_0A_1A_2A_3A_4}$ est égale à 16 + 8 + 4 + 2 = 30 cm².**

Exercice 6 (5 points)
Une société fabrique et commercialise des produits cosmétiques. Les relevés **X** , en millions de Francs CFA, des frais publicitaires mensuels de la société et de son chiffre d'affaires mensuel **Y** sont consignés dans le tableau suivant.

Frais publicitaires x_i	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires y_i	60	66	69	75	81

Représentons le nuage de points associé à la série statistique (X,Y). Les points concernés sont de couleur bleue.



Ce nuage de points permet d'envisager un ajustement affine car les points sont relativement bien alignés.
Déterminons à l'aide de la calculatrice l'équation réduite de la droite (D) d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
L'équation réduite de la droite de régression linéaire de y en x est de la forme $y = ax + b$.
A l'aide de la calculatrice, nous obtenons $a = 5{,}1$ et $b = 54{,}9$.
Donc l'équation réduite de la droite (D) de régression linéaire de y en x est $\boldsymbol{y = 5{,}1x + 54{,}9}$.

Le directeur commercial veut investir davantage dans la publicité pour que le chiffre d'affaires mensuel atteigne 100 millions de Francs CFA.
Déterminons le montant des frais publicitaires correspondant à un chiffre d'affaires de 100 millions de Francs CFA en remplaçant y par 100 dans l'équation de (D) et en calculant la valeur de x .

$$\begin{aligned}
100 = 5,1x + 54,9 &\iff 5,1x = 100 - 54,9 \\
&\iff 5,1x = 45,1 \\
&\iff x = \frac{45,1}{5,1} \\
&\implies \boxed{x \approx 8,843}
\end{aligned}$$

Par conséquent, **pour atteindre un chiffre d'affaires de 100 millions, le directeur devra investir environ 8 850 000 Francs CFA.**