BACCALAURÉAT
SESSION 2022

Durée : 4 H
Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1 sur 3, 2 sur 3 et 3 sur 3.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.

EXERCICE 1 **(2 points)**

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque proposition du tableau ci-dessous suivi de **Vrai** si la proposition est vraie ou de **Faux** si la proposition est fausse.

N°	Propositions
1.	Toute isométrie du plan qui laisse invariant deux points distincts A et B est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
2.	Soient f une fonction dérivable sur un intervalle K, a et b deux éléments de K tels que : $a < b$. S'il existe un nombre réel M tel que, $\forall x \in [a\,;b], \lvert f'(x)\rvert \leq M$, alors $-M(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
3.	Une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y'' = 3y$ est la fonction : $x \mapsto 2e^{3x} + 4e^{-3x}$.
4.	La dépendance linéaire entre deux caractères X et Y d'une série statistique à deux variables est forte si et seulement si le coefficient de corrélation linéaire r est tel que : $\lvert r\rvert \leq 0,4$.

EXERCICE 2 **(2 points)**

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des lignes A, B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la ligne qui donne l'affirmation vraie.

N°	Enoncés	Informations	
1.	Si E, F et G sont trois points distincts du plan, alors pour tout point M du plan, le vecteur $2\overrightarrow{ME} - 3\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG}$ est égal à …	A	$4\overrightarrow{MF}$.
		B	$-\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$.
		C	$5\overrightarrow{ME}$.
		D	$2\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$.
2.	Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), la directrice de la parabole d'équation réduite $x^2 = 8y$ est la droite d'équation …	A	$y = -1$.
		B	$y = 2$.
		C	$y = -2$.
		D	$y = 1$.

3.	Arg $[(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i})^5]$ est égal à …	A	$\frac{7\pi}{12}$.
		B	$\frac{-5\pi}{12}$.
		C	$\frac{-7\pi}{12}$.
		D	$\frac{5\pi}{12}$.
4.	Soit OPN un triangle rectangle isocèle en O, de sens direct et I le milieu du segment [NP]. Si une similitude directe S de centre O applique I sur P, alors l'angle et le rapport de S sont respectivement …	A	$\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
		B	$-\frac{\pi}{4}$ et $\sqrt{2}$.
		C	$-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
		D	$\frac{\pi}{4}$ et $\sqrt{2}$.

EXERCICE 3 **(3 points)**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points A(0 ; 4 ; 1) , B(1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2), E(7 ; −1 ; 4) et le vecteur $\vec{u}(2 ;\ -1 ;\ 3)$.

1. Démontre que les points A, B et C déterminent un plan.

2. *a*) Démontre que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Justifie qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 3z + 1 = 0$.

c) Vérifie que le point E n'appartient pas au plan (ABC).

3. Soit (Δ) la droite passant par le point E et orthogonale au plan (ABC).

On pose : $\{K\} = (\Delta) \cap (ABC)$.

a) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Justifie que le point K a pour coordonnées (3 ; 1 ; −2).

c) Calcule la distance EK.

EXERCICE 4 **(4 points)**

Un employé se rend à son travail en bus. S'il est à l'heure à l'arrêt, il prend le bus de ramassage gratuit mis à sa disposition par l'entreprise. S'il est en retard, il prend le bus de ville.

On suppose que l'employé n'est pas en retard le premier jour. A partir du deuxième jour :

- si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $\frac{1}{5}$.
- s'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $\frac{1}{20}$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : on appelle R_n, l'évènement : « l'employé est en retard le jour n ».

On note p_n la probabilité de R_n et q_n celle de $\overline{R_n}$, l'évènement contraire de R_n.

On suppose que : $p_1 = 0$ et $p_2 = \frac{1}{5}$. On a : $p_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{20}$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = \frac{1}{5}$.

Dans tout ce qui suit, on prend $n \geq 2$.

1. *a*) Justifie que : $p(R_n \cap R_{n+1}) = \frac{1}{20} p_n$ et $p(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) = \frac{1}{5} q_n$.

b) Détermine p_{n+1} en fonction de p_n et q_n .

c) Déduis-en que : $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n$.

2. On pose : $v_n = p_n - \frac{4}{23}$.

a) Démontre que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{20}$.

b) Détermine son premier terme v_2.

3. *a*) Calcule la limite de la suite (v_n).

b) Déduis-en la limite de la suite (p_n).

EXERCICE 5 (4 points)

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1+n\ln(x)}{x^2}$.
On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 3 cm.

1. *a*) Justifie que : $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = -\infty$;

b) Justifie que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.

c) Donne une interprétation graphique des résultats des questions 1.a) et 1.b).

2. *a*) On admet que f_n est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Justifie que $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[$, $f_n'(x) = \frac{n-2-2n\ln(x)}{x^3}$.

b) Détermine les variations de f_n sur $]0\,;+\infty[$.

c) Vérifie que : $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) = \frac{n}{2}e^{\frac{2}{n}-1}$.

d) Dresse le tableau de variation de f_n.

3. *a*) Justifie que : $\forall\, x \in\,]0\,;+\infty[$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

b) Déduis-en la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}).

4. Soit I l'intégrale telle que : $I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, justifie que : $I = 1 - \frac{2}{e}$.

b) Déduis-en l'aire en cm² de la partie du plan limitée par les courbe (C_n), (C_{n+1}) et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$.

EXERCICE 6 (5 points)

La salle du foyer des jeunes d'une commune est dans un état de dégradation avancée.
Le Maire, soucieux du bien-être de sa jeunesse, décide de la réhabiliter en commençant en priorité par le revêtement du sol qui est un rectangle de longueur 14,40 m et de largeur 8,70 m.
Pour ce faire, il instruit le chef du service technique de la Mairie qui prend attache avec un fournisseur en vue d'acheter des carreaux.
Ce dernier dispose de trois types de carreaux carrés, de côtés respectifs 18 cm ; 25 cm et 30 cm. Chaque type de carreaux est livré en paquets de 12 et de 20 carreaux.
Pour éviter le gaspillage et la surfacturation, le Maire exige :

- qu'il n'y ait pas de découpe de carreaux lors du carrelage ;
- qu'on lui communique le nombre exact de paquets de 12 et de paquets de 20 qu'il faut acheter.

Le chef du service technique pense que les carreaux de côté 30 cm conviennent si l'on veut éviter des découpes de carreaux. N'étant pas qualifié pour faire ces types de calculs, il te sollicite.

1. Vérifie si le chef du service technique a raison ou pas.

2. En supposant qu'il a raison, détermine le nombre de paquets de 20 et le nombre de paquets de 12 que le chef du service technique doit commander, sachant que le nombre de paquets de 20 est supérieur à 66.