BACCALAURÉAT
SESSION 2020

Coefficient : 4
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques, logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées.

EXERCICE 1

Une entreprise achète, utilise et revend des machines à coudre après un certain nombre d'années. Le tableau suivant donne l'évolution du prix Y de vente d'une machine en fonction du nombre d'années X d'utilisation.

Nombre x_i d'années	1	2	3	4	5	6
Prix y_i (en milliers de francs CFA)	150	125	90	75	50	45

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Unités graphiques : en abscisse, 1 cm pour une année ; en ordonnée, 1 cm pour 20 000 F.

1. Représente le nuage de points associés à la série statistique (X, Y).

2. *a*) Détermine les coordonnées du point moyen G du nuage de points de cette série statistique.
   On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
   b) On note V(X) la variance de X et Cov(X, Y) la covariance de (X, Y).
   Démontre que : $V(X) = \frac{35}{12}$ et $Cov(X, Y) = -\frac{255}{4}$.

3. On admet que la variance V(Y) de Y est égale à 1445.
   a) Justifie que le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (X, Y) est $\frac{-3\sqrt{21}}{14}$.
   b) Justifie qu'il existe une forte corrélation linéaire entre les variables X et Y.

4. Soit (D) la droite de régression de Y en X.
   Démontre, par la méthode des moindres carrés, qu'une équation de (D) est : $y = -\frac{153}{7}x + \frac{497}{3}$.

5. Détermine le prix de vente d'une machine à coudre à la fin de la 7^{e} année.
   On arrondira le résultat au multiple le plus proche de 5.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 2

1. On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}, z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = 0$.

   a) Justifie que $2i$ est une solution de (E).
   b) Justifie que : $\forall\ z \in \mathbb{C}, z^3 + (1+i)z^2 + (2-2i)z + 8i = (z-2i)[z^2 + (1+3i)z - 4]$.
   c) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2 + (1+3i)z - 4 = 0$.
   d) Déduis des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.
   On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-3i$; $1-i$; $2i$ et $-2-2i$.
   a) Place les points A, B, C et D sur votre feuille de copie.
   b) Démontre que le triangle BAD est rectangle et isocèle en A.

3. Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme A en B.
   a) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z - 2 + 2i$.
   b) Démontre que S(B) = C.
   c) Détermine l'image du triangle BAD par la similitude S.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x - e^{-x}$.

1. Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2. Démontre que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, puis dresse son tableau de variation.

3. *a*) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. On la note α.
   b) Justifie que : $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$.

4. Justifie que : $\forall\ x \in]-\infty, \alpha[, g(x) < 0$;
   $\forall\ x \in]\alpha, +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)(2e^x - 1)$.
On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 2 cm.

1. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
   Donne une interprétation graphique des résultats obtenus.

2. *a*) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   b) Justifie que : $\forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - x + 2(x-1)e^x$.
   c) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 1 - x$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.
   d) Étudie la position relative de (C_f) et (D).

3. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x g(x)$.
   b) Étudie le sens de variation de f.
   c) Dresse le tableau de variation de f.

4. *a)* Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.
   b) Déduis-en les coordonnées des points d'intersection A et B de (C_f) et de l'axe des abscisses.
   On choisira : $x_A < x_B$ (x_A et x_B étant les abscisses respectives de A et B).

5. Détermine une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

6. Trace les droites (D) et (T), puis construis (C_f).
   On prendra : $\alpha = 0{,}35$ et $f(\alpha) = -1{,}2$.

7. À l'aide d'une intégration par parties, calcule l'aire en cm², de la partie du plan délimitée par (C_f), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.