Mathématiques

Série D

Côte d'Ivoire 2021

Durée : 4 heures

Coefficient : 4

Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont autorisées.

Exercice 1 (2 points)

Pour chaque énoncé, écris **Vrai** si l'énoncé est vrai ou de **Faux** si l'énoncé est faux.
Aucune justification n'est demandée.

Affirmation n° 1 La fonction ln est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Affirmation n° 2 La fonction ln est la primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction : $x \to \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Affirmation n° 3 On considère la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$

La suite u est arithmétique.

Affirmation n° 4 Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle K.
a et b sont deux éléments de K tels que $a < b$.
S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout x élément de $[a\,;\,b]$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors : $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

Exercice 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés incomplets des cinq propositions ci-dessous, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé juste.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé incomplet suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

Énoncé incomplet n° 1. Soit u la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}. \end{cases}$

La suite u a pour limite ...

A : $-\infty$
B : 2
C : 0
D : $+\infty$.

Énoncé incomplet n° 2. L'inéquation (E) : $x \in \mathbf{R}$, $\ln(x) - 1 \leqslant 0$, a pour ensemble de solutions ...

A : $]-\infty\,;\,e]$
B : $]0\,;\,e]$
C : $[e\,;+\infty[$
D : $\varnothing$.

Énoncé incomplet n° 3. On pose : $z = -\sqrt{3} + i$. On note r le module de z et θ l'argument principal de z.
r et θ vérifient ...

A : $r = 2$ et $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

B : $r = 2$ et $\theta = \dfrac{-5\pi}{6}$

C : $r = 2$ et $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

D : $r = 1$ et $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$.

Énoncé incomplet n° 4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\ \vec{u},\ \vec{v})$. Soient I et J les points d'affixes respectives 1 et i. On note (Γ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant : $|z-1| = |z-i|$.

(Γ) est ...

A : la droite (IJ) privée du segment [IJ]

B : la droite (IJ)

C : la médiatrice du segment [IJ]

D : le cercle de centre I et de rayon 1.

Énoncé incomplet n° 5. Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle K telle que : $\forall x \in$ K, $f'(x) > 0$.

f est une bijection de K vers f (K).

$\forall a \in f(\mathrm{K})\,,\,(f^{-1})'(a)$ est égal à ...

A : $\dfrac{1}{f'(a)}$

B : $\dfrac{-1}{f^{-1}(a)}$

C : $f'(f^{-1}(a))$

D : $\dfrac{1}{f'(f^{-1}(a))}$.

Exercice 3 (3 points)

Dans une ville, 30% de la population ont un âge supérieur ou égal à 65 ans.

60% des personnes ayant un âge supérieur ou égal à 65 ans sont atteints de la Covid-19.

0,1% des personnes de moins de 65 ans sont atteints de la Covid-19.

1. On prend une personne au hasard et on donne les événements suivants :

S " la personne a un âge supérieur ou égal à 65 ans " ;

C " le personne est atteinte de la Covid-19 " .

a. Dresse un arbre pondéré qui représente la situation.

b. Donne la probabilité $P_{\mathrm{S}}(\mathrm{C})$ des personnes atteintes de la Covid-19 sachant qu'elles ont plus de 65 ans.

c. Calcule la probabilité pour que la personne ait au moins 65 ans et soit atteinte de la Covid-19.

2. Justifie que la probabilité de l'événement C est : 0,1807.

3. On prend au hasard n personnes dans la ville et on note P_{n} la probabilité d'avoir au moins une personne atteinte de la Covid-19 ($n \in \mathbf{N}^*\{1$).

a. Justifie que : $\forall\ n \in \mathbf{N}^*\{1,\ P_n = 1-(0,8193)^n$.

b. Détermine le nombre minimal de personnes pour que la probabilité d'avoir au moins une personne atteinte de la Covid-19 dépasse 99,99 %.

Exercice 4 (4 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{1-x} - x + 1$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité graphique est le centimètre.

1. On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

Interprète graphiquement ces résultats.

2. **a.** Calcule la limite de f en $+\infty$.

b. Justifie que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

3. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$ par : $g(x) = xe^{1-x} + 1$.
On admet qu'il existe un nombre réel α élément de l'intervalle [-0,4 ; -0,2] tel que g (α)=0 et
$\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;\,\alpha[,\ g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha\,;\,+\infty[,\ g(x) > 0 \end{cases}$
On admet que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.
   a. Justifie que : $\forall x \in R\,, f'(x) = -g(x)$.
   b. Étudie le sens de variation de f .
   c. Dresse le tableau de variation de f.
4. On admet que (C) est au dessus de (D) sur [-1 ; + ∞[et au dessous de (D) sur]-∞ ; -1].
Construis (C). (T
prendras : α=-0,3 et f (α) = 3,9).
5. **a.** Interprète graphiquement l'intégrale K telle que $K = \displaystyle\int_0^1 (f(x) - (-x+1))\mathrm{d}x$.
   b. Justifie, à l'aide d'une intégration par parties, que K = 2e - 3.

Exercice 5 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) d'unité graphique le centimètre.
On réalisera une figure qu'on complétera tout au long de l'exercice.
On note A et B les points d'affixes respectives 8 et 4 + 4i.

1. On considère la similitude directe S de centre O telle que S(A)=B.
   a. Justifie que la similitude directe S a pour écriture complexe : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) z$.
   b. Détermine le rapport et l'angle de S.
2. On considère les points A_n tels que $\begin{cases} A_0 = A \\ \forall n \in \mathbf{N}\,, A_{n+1} = S(A_n) \end{cases}$
On désigne par z_n l'affixe du point A_n .
   a. Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}\,, z_n = 8\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n$.
   b. Démontre que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle et isocèle en A_{n+1}.
3. **a.** Place successivement les points A_0 , A_1 , A_2 , A_3 et A_4.
   b. Justifie que l'aire a_1 en cm^2,du triangle OA_0A_1 est 16.
   c. Déduis du résultat précédent l'aire a, en cm^2, du polygone A_0 A_1 A_2 A_3A_4.

Exercice 6 (5 points)

Une société fabrique et commercialise des produits cosmétiques. Les relevés, en millions de Francs CFA, des frais publicitaires mensuels de la société et de son chiffre d'affaires mensuel sont consignés dans le tableau suivant.

Frais publicitaires	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires	60	66	69	75	81

Le directeur commercial veut investir davantage dans la publicité pour que le chiffre d'affaires mensuel atteigne 100 millions de Francs CFA.
Informée du problème, sa fille, qui est une de tes camarades de classe, te sollicite pour trouver le montant des frais à investir dans la publicité afin d'atteindre 100 millions comme chiffre d'affaires.
Fais une proposition argumentée.