Bac Maroc 2024 - corrigé

Exercice 1

1. Avec la définition de f, on peut écrire :

$$\forall x \in \left]1;+\infty\right[,\ f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1} = \frac{\ln(x)}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1} \times \frac{\ln(x)}{x-1}$$

Or $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$

Et ainsi, $\lim\limits_{x\to 1_+} f(x) = \frac{1}{2}$

Comme on a posé $f(1) = \frac{1}{2}$, on conclut que f est continue à droite en 1.

2. Par croissance comparée, on trouve que :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} = 0$. L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (C).

3.

a. Soit $x \in \left]1;+\infty\right[$ et $t = (x-1)^2$

On a donc $1 - x = -(x-1) = -\sqrt{t}$ car $1 - x < 0$
Et $x = 1 + \sqrt{t}$

En remplaçant, on obtient bien : $\frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{-\sqrt{t}+\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{t}$

b. Posons $\forall t \in \left]0;+\infty\right[,\ g(t) = -\sqrt{t} + \ln\left(1+\sqrt{t}\right)$

La fonction g est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et :

$$\forall t \in \left]0;+\infty\right[,\ g'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{1+\sqrt{t}} = \frac{-1-\sqrt{t}+1}{2\sqrt{t}\left(1+\sqrt{t}\right)} = -\frac{1}{2\left(1+\sqrt{t}\right)}$$

On note que $\forall t \in \left]0;+\infty\right[,\ g'(t) < 0$

On a donc que $\forall t \in \left]0;+\infty\right[,\ \left|g'(t)\right| < \frac{1}{2}$

D'après l'inégalité des accroissements finis :
$\forall t \in \left[0;+\infty\right],\ \left|g(t) - g(0)\right| < \frac{1}{2}t$
Or $g(0) = 0$.

©antoine.remond.maths@gmail.com

On a donc déjà $\forall t \in \left[0; +\infty\right],\ -\frac{1}{2}t < -\sqrt{t} + \ln\left(1+\sqrt{t}\right)$

A l'inverse $\forall x \in \left]0; t\right],\ \frac{1}{2\left(1+\sqrt{t}\right)} < \left|g'(x)\right|$

Et donc $\forall x \in \left[0; t\right],\ \frac{x}{2\left(1+\sqrt{t}\right)} < \left|g(x)\right|$

En particulier pour $x = t$, $\frac{t}{2\left(1+\sqrt{t}\right)} < \left|g(t)\right|$

Comme $\forall t \in \left]0; +\infty\right[,\ g(t) < 0$, on obtient bien : $-\sqrt{t} + \ln\left(1+\sqrt{t}\right) < \frac{t}{2\left(1+\sqrt{t}\right)}$

On arrive donc à l'encadrement $\forall t \in \left]0; +\infty\right[,\ -\frac{1}{2}t < -\sqrt{t} + \ln\left(1+\sqrt{t}\right) < -\frac{t}{2\left(1+\sqrt{t}\right)}$

Et finalement, $\forall t \in \left]0; +\infty\right[,\ -\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t} + \ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{t} < -\frac{1}{2\left(1+\sqrt{t}\right)}$

c. Comme, $\lim\limits_{t \to 0_+} -\frac{1}{2\left(1+\sqrt{t}\right)} = -\frac{1}{2}$

On peut appliquer le théorème des gendarmes pour affirmer que :

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{-\sqrt{t} + \ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{t} = -\frac{1}{2}$$

En repartant de l'égalité du 3.a,

On conclut que $\lim\limits_{t \to 1_+} \frac{1 - x + \ln(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}$

4.

a. Étudions l'expression proposée :

$$\forall x \in \left]1; +\infty\right[,\ \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x-1} = \frac{\frac{\ln(x)}{x^2-1} - \frac{1}{2}}{x-1} = \frac{2\ln(x) - x^2 + 1}{2\left(x^2-1\right)(x-1)}$$

$$= \frac{-(x-1)\ln(x) + (x+1)\ln(x) - (x-1)(x+1)}{2\left(x^2-1\right)(x-1)}$$

$$= \frac{-(x-1)\ln(x) + (x+1)\ln(x) - (x-1)(x+1)}{2\left(x^2-1\right)(x-1)} = -\frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln(x) - x + 1}{2(x-1)^2}$$

©antoine.remond.maths@gmail.com

Remarque : on « force » l'apparition des différents éléments, en particulier le découpage des $2\ln(x)$. En remettant les 2 membres de la somme de la réponse au même dénominateur on trouve rapidement le bon agencement.

Et donc $\forall x \in \left]1;+\infty\right[,\ \dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} = -\dfrac{\ln(x)}{x-1}\times\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}$

b. Quand $x \to 1$:

Comme $\ln(1)=0$, $\dfrac{\ln(x)}{x-1}$ est le taux d'accroissement de la fonction logarithme en 1 et donc $\dfrac{\ln(x)}{x-1} \to 1$

Ainsi, $-\dfrac{\ln(x)}{x-1}\times\dfrac{1}{2(x+1)} \to -\dfrac{1}{4}$

Et en reprenant le résultat de la question précédente, on trouve que $\lim\limits_{x\to 1_+}\dfrac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2} = -\dfrac{1}{4}$

Et donc $\lim\limits_{x\to 1_+}\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1} = -\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2}$

On reconnait l'expression du taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

On conclut donc que f est dérivable à droite en 1 et $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.

f admet donc une tangente de pente $-\dfrac{1}{2}$ en $x=1$.

5.

a. Notons déjà que $\forall t \in \left[1;+\infty\right[,\ \dfrac{t^2-1}{t^3} \geqslant 0$ et $\dfrac{t^2-1}{t^2} \geqslant 0$

Ce qui implique que $\forall x \in \left[1;+\infty\right[,\ \displaystyle\int_1^x \frac{t^2-1}{t^3}\mathrm{d}t \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_1^x \frac{t^2-1}{t^2}\mathrm{d}t \geqslant 0$

On peut donc déjà affirmer que $\forall x \in \left[1;+\infty\right[,\ I(x) \geqslant 0$ et $J(x) \geqslant 0$

De plus $\forall x \in \left[1;+\infty\right[,\ I(x)-J(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{t^2-1}{t^3}\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{t^2-1}{t^2}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{t^2-1}{t^3}-\frac{t^2-1}{t^2}\mathrm{d}t$
$\displaystyle\int_1^x \frac{t^2-1}{t^2}\left(\frac{1}{t}-1\right)\mathrm{d}t \leqslant 0$ (car $\dfrac{1}{t}-1 \leqslant 0$).

D'où $\forall x \in \left[1;+\infty\right[,\ I(x) \leqslant J(x)$

Et finalement $\forall x \in \left[1;+\infty\right[,\ 0 \leqslant I(x) \leqslant J(x)$

b. Calculons les 2 intégrales :

$\forall x \in \left[1; +\infty\right[, \ I(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{t^2-1}{t^3}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t = \left[\ln(t) + \frac{1}{2t^2}\right]_1^x$

$= \ln(x) + \dfrac{1}{2x^2} - \ln(1) - \dfrac{1}{2} = \ln(x) + \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{2}$

Ce qu'on peut bien écrire $\forall x \in \left[1; +\infty\right[, \ I(x) = \ln(x) - \dfrac{x^2-1}{2x^2}$

$\forall x \in \left[1; +\infty\right[, \ J(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{t^2-1}{t^2}\mathrm{d}t = \int_1^x 1 - \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[t + \frac{1}{t}\right]_1^x = x + \frac{1}{x} - 1 - 1 = \frac{x^2-2x+1}{x}$

$\forall x \in \left[1; +\infty\right[, \ J(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x}$

c. f est bien dérivable sur $\left]1; +\infty\right[$ comme quittent de fonctions qui le sont et donc le dénominateur ne s'annule pas.

Et $\forall x \in \left]1; +\infty\right[, \ f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\left(x^2-1\right) - 2x\ln(x)}{\left(x^2-1\right)^2} = \dfrac{\left(x^2-1\right) - 2x^2\ln(x)}{x\left(x^2-1\right)^2}$

D'un autre côté $\dfrac{-2}{(x+1)^2} \times \dfrac{I(x)}{J(x)} = \dfrac{-2}{(x+1)^2} \times \dfrac{\ln(x) - \frac{x^2-1}{2x^2}}{\frac{(x-1)^2}{x}} = \dfrac{-2}{(x+1)^2} \times \dfrac{x\,2x^2\ln(x) - x\left(x^2-1\right)}{2x^2(x+1)^2}$

$= \dfrac{-2}{(x+1)^2} \times \dfrac{2x^2\ln(x) - \left(x^2-1\right)}{2x\,(x-1)^2} = \dfrac{\left(x^2-1\right) - 2x^2\ln(x)}{x\left(x^2-1\right)^2}$

Et ainsi, $\forall x \in \left]1; +\infty\right[, \ f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2} \times \dfrac{I(x)}{J(x)}$

Remarque : *on travaille avec 1 exclu, donc il n'y a pas de problème de définition des quotients.*

d. On note déjà que dans l'expression $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2} \times \dfrac{I(x)}{J(x)}$ tous les facteurs sont strictement positifs pour $x > 1$ (je te laisse vérifier si besoin !). Donc le « $-$ » nous assure que $\forall x \in \left]1; +\infty\right[, \ f'(x) < 0$.

De plus, d'après la question 5.a, $0 < \dfrac{I(x)}{J(x)} \leqslant 1$ et $(x+1)^2 \geqslant (1+1)^2 = 4$

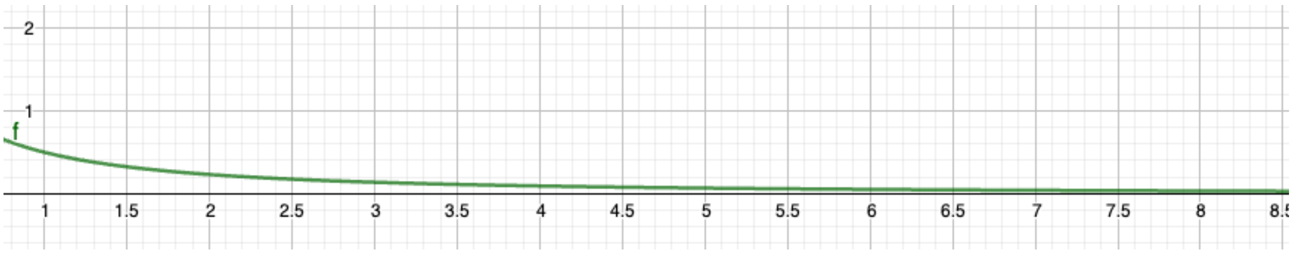
Finalement, on peut encadrer $\forall x \in \left]1; +\infty\right[, \ -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0$

6. En reprenant les éléments, on constate que le tableau de variations de f est relativement simple, puisque la fonction est strictement décroissante entre $\dfrac{1}{2}$ et 0

D'où le tableau :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘	0

Et la courbe (C) :



7. Considérons la fonction h définie sur $\left]1;+\infty\right[$ par
$\forall x \in \left]1;+\infty\right[,\ h(x) = f(x) - x + 1$

Cette fonction est bien dérivable sur $\left]1;+\infty\right[$ et :
$\forall x \in \left]1;+\infty\right[,\ h'(x) = f'(x) - 1 < 0$
Donc h est strictement décroissante sur $\left]1;+\infty\right[$

De plus, $h(1) = f(1) - 1 + 1 = \dfrac{1}{2} > 0$
Et $h(2) = f(2) - 2 + 1 = \dfrac{\ln(2)}{2^2 - 1} - 1 = \dfrac{\ln(2)}{3} - 1 \approx 0{,}77 < 0$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $h(x) = 0$ admet une unique solution dans $\left]1;2\right[$.

Et par définition de h, on conclut que $f(x) = x - 1$ admet une unique solution dans $\left]1;2\right[$.

8.
a. Remarquons déjà rapidement que la suite (a_n) est bien définie, car f est à valeurs strictement positive, donc $1 + f(a_n)$ est bien supérieur à 1.

Par définition de a et de (a_n), on peut écrire : $a_{n+1} - a = 1 + f(a_n) - f(a) - 1 = f(a_n) - f(a)$

En 5.d, on a vu que $\forall x \in \left]1;+\infty\right[,\ \left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$. On peut à nouveau utiliser le théorème des accroissements finis pour affirmer que :
$\forall x \in \left]1;+\infty\right[,\ \left|f(a_n) - f(a)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left|a_n - a\right|$

Ainsi on obtient bien $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|a_{n+1} - a\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left|a_n - a\right|$.

©antoine.remond.maths@gmail.com

b. La proposition à démontrer est $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|a_n - a\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|a_0 - a\right|$

<u>Initialisation :</u>

Au rang $n = 0$, nous avons trivialement $\left|a_0 - a\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left|a_0 - a\right| = \left|a_0 - a\right|$

<u>Hérédité :</u>

Supposons la proposition vraie au rang n et étudions le rang $n+1$.

D'après la question précédente, $\left|a_{n+1} - a\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|a_n - a\right|$

Et d'après l'hypothèse de récurrence, $\left|a_n - a\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|a_0 - a\right|$

Ainsi, $\left|a_{n+1} - a\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|a_n - a\right| \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|a_0 - a\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left|a_0 - a\right|$

Ce qui confirme bien l'hérédité de la proposition.

On conclut donc que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|a_n - a\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|a_0 - a\right|$

c. Comme $\frac{1}{2} < 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} \left|a_n - a\right| = 0$

Et donc $\left(a_n\right)$ converge vers a.

Exercice 2

1.

a. D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme $f : t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$ est continue sur $\left[0; 1\right]$, F est une primitive de f.

Donc F est dérivable sur $\left[0; 1\right]$ et $\forall x \in \left[0; 1\right],\ F'(x) = \mathrm{e}^{x^2} > 0$

Donc F est continue et strictement croissante sur $\left[0; 1\right]$.

b. Comme F est strictement croissante, elle représente bien une bijection.

De plus $F(0) = \int_0^0 \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = 0$ et $F(1) = \int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = \beta$

Et donc F est une bijection entre $\left[0; 1\right]$ et $\left[0; \beta\right]$.

2.

a. On note $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$

On reconnaît la formule de Riemann (au facteur β près qui nous donne) :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\beta}{n}\sum_{k=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right) = \int_0^\beta F^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

Et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right) = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$

Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$

Donc $\left(S_n\right)$ converge vers $l = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$

b. Effectuons le changement de variable proposé $u = F^{-1}(t)$
D'où $\mathrm{d}t = F'(u)\,\mathrm{d}u = e^{u^2}\mathrm{d}u$

Ainsi, $l = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\beta}\int_{F^{-1}(0)}^{F^{-1}(\beta)} u\mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u$

Et finalement $l = \frac{1}{\beta}\int_0^1 u\mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u$

c. $\frac{1}{\beta}\int_0^1 u\mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{\beta}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u^2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{2\beta}$

Et donc $l = \frac{\mathrm{e}-1}{2\beta}$

Exercice 3

Partie I

1.
a. $\left(E_\alpha\right) : z^2 - 2\mathrm{i}z + \alpha = 0$

La formule du discriminant est la même que pour des coefficients réels :
$\Delta = \left(-2\mathrm{i}\right)^2 - 4\alpha = -4 - 4\alpha = -4(1+\alpha)$

Donc on a bien $\Delta = -4(1+\alpha)$

b. $\left(E_\alpha\right)$ admet 2 solutions distinctes ssi $\Delta \neq 0$, donc ssi $-4(1+\alpha) \neq 0$

Donc $\left(E_\alpha\right)$ admet 2 solutions distinctes ssi $\alpha \neq -1$

2. Là encore, on utilise la même formule qu'habituellement « $P(x) = x^2 - sx + p$ »

On a donc $z_1 + z_2 = 2\mathrm{i}$ et $z_1 z_2 = \alpha$.

Partie II

1.

a. On a $\alpha = m^2 - 2m$ avec $m \in \mathbb{R}$

On trouve donc $\Delta = -4(1+\alpha) = -4\left(1+m^2-2m\right) = -4(m-1)^2 \in \mathbb{R}_-$

On trouve donc $z_1 = \dfrac{2\mathrm{i} + 2\left|m-1\right|\mathrm{i}}{2} = \left(1+\left|m-1\right|\right)\mathrm{i}$ et $z_2 = \left(1-\left|m-1\right|\right)\mathrm{i}$

Donc $z_1 = \left(1+\left|m-1\right|\right)\mathrm{i}$ et $z_2 = \left(1-\left|m-1\right|\right)\mathrm{i}$

b. z_1 et z_2 sont imaginaires purs.

Donc O, M_1 et M_2 sont alignés.

2. On ne peut pas avoir les 2 racines nulles, on supposera donc que $z_2 \neq 0$

a. Si $\dfrac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur, il existe un complexe a tel que $z_1 = \mathrm{i}a z_2$

Ainsi $z_1\overline{z_2} = \mathrm{i}a z_2\overline{z_2} = \mathrm{i}a\left|z_2\right|^2 \in \mathrm{i}\mathbb{R}$. Ce qui signifie donc que $Re\left(z_1\overline{z_2}\right) = 0$

Réciproquement, on suppose que $Re\left(z_1\overline{z_2}\right) = 0$.

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{\left|z_2\right|^2} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

Donc $\dfrac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $Re\left(z_1\overline{z_2}\right) = 0$.

b. $\left|z_1 - z_2\right|^2 = \left(z_1 - z_2\right)\overline{\left(z_1 - z_2\right)} = \left(z_1 - z_2\right)\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2$

Or $\overline{z_1}z_2 = \overline{z_1\overline{z_2}}$ donc $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 2Re\left(z_1\overline{z_2}\right)$ et finalement

$\left|z_1 - z_2\right|^2 = \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 - 2Re\left(z_1\overline{z_2}\right)$

De la même façon, on trouve $\left|z_1 + z_2\right|^2 = \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 + 2Re\left(z_1\overline{z_2}\right)$

Et donc $\left|z_1 - z_2\right|^2 = \left|z_1 + z_2\right|^2 - 4Re\left(z_1\overline{z_2}\right)$

c. Comme vu à la question 2.a, $\dfrac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur est équivalent à $Re\left(z_1\overline{z_2}\right) = 0$

Et avec la question précédente, $\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \left|z_1 - z_2\right|^2 = \left|z_1 + z_2\right|^2$

Or, on a vu en question I.2 que $z_1 + z_2 = 2\mathrm{i}$ et donc $\left|z_1 - z_2\right|^2 = \left|z_1 + z_2\right|^2 = 4$

Et donc $\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \left|z_1 - z_2\right| = 2$

3.

a. On a vu dans la 1ère question que $\Delta = -4(1+\alpha)$

On sait par ailleurs que $z_1 + z_2 = 2\mathrm{i}$
Donc $\left(z_1 + z_2\right)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = -4$
Et comme $z_1z_2 = \alpha$, on trouve $z_1^2 + z_2^2 = -4 - 2\alpha$

Par ailleurs $\left(z_1 - z_2\right)^2 = z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 = -4 - 2\alpha - 2\alpha = -4(1+\alpha) = \Delta$

Donc on confirme $\left(z_1 - z_2\right)^2 = \Delta$

b. OM_1M_2 rectangle en O se « traduit » par $\dfrac{z_1}{z_2}$ est imaginaire pur.

Comme $\left(z_1 - z_2\right)^2 = \Delta$, donc $\left|z_1 - z_2\right|^2 = \left|\Delta\right| = 4$
Et $\left|\Delta\right| = 4\left|1+\alpha\right| = 4$

D'où finalement $\left|1+\alpha\right| = 1$

Donc Γ correspond au cercle de centre $(-1;0)$ et de rayon 1.

Exercice 4

1.

a. $\left(\mathrm{i};2\right)\mathrm{T}\left(1;\mathrm{i}\right) = \left(\mathrm{i}\times -\mathrm{i}+1;2\mathrm{i}\right) = \left(2;2\mathrm{i}\right)$

Donc $\left(\mathrm{i};2\right)\mathrm{T}\left(1;\mathrm{i}\right) = \left(2;2\mathrm{i}\right)$

On trouve par ailleurs $\left(1;\mathrm{i}\right)\mathrm{T}\left(\mathrm{i};2\right) = \left(2+\mathrm{i};2\mathrm{i}\right)$

b. La question précédente nous indique que $\left(1;\mathrm{i}\right)\mathrm{T}\left(\mathrm{i};2\right) \neq \left(\mathrm{i};2\right)\mathrm{T}\left(1;\mathrm{i}\right)$

Et donc la loi T n'est pas commutative dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$.

2. Considérons a, c et e dans $\mathbb{C}$ et b, d et f dans $\mathbb{C}^*$.

On a d'une part $\left[\left(a;b\right)\mathrm{T}\left(c;d\right)\right]\mathrm{T}\left(e;f\right) = \left(a\bar{d}+c;bd\right)\mathrm{T}\left(e;f\right) = \left(\left(a\bar{d}+c\right)\bar{f}+e;bdf\right)$
$= \left(a\bar{d}\bar{f}+c\bar{f}+e;bdf\right)$

Et d'autre part $\left(a;b\right)\mathrm{T}\left[\left(c;d\right)\mathrm{T}\left(e;f\right)\right] = \left(a;b\right)\mathrm{T}\left(c\bar{f}+e;df\right) = \left(a\bar{d}\bar{f}+c\bar{f}+e;bdf\right)$

Donc $\left[\left(a;b\right)\mathrm{T}\left(c;d\right)\right]\mathrm{T}\left(e;f\right) = \left(a;b\right)\mathrm{T}\left[\left(c;d\right)\mathrm{T}\left(e;f\right)\right]$

Et donc la loi T est associative dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$.

3. Prenons a et b dans $\mathbb{C}$
$\left(a;b\right) \mathrm{T}\,(0;1) = \left(a \times 1 + 0; b\right) = \left(a;b\right)$
Et $(0;1)\,\mathrm{T}\left(a;b\right) = \left(0 \times \overline{b} + a; 1 \times b\right) = \left(a;b\right)$

Et donc $(0;1)\,\mathrm{T}\left(a;b\right) = \left(a;b\right) \mathrm{T}\,(0;1) = \left(a;b\right)$

$\boxed{\text{Donc } (0;1) \text{ est l'élément neutre de } \mathrm{T}.}$

4.
a. Soit $\left(a;b\right) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, $\left(a;b\right) \mathrm{T}\left(-\frac{a}{\overline{b}};\frac{1}{b}\right) = \left(\frac{a}{\overline{b}} - \frac{a}{\overline{b}}; b \times \frac{1}{b}\right) = (0;1)$

b. D'après les questions précédentes, T est une loi interne de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, associative et pour laquelle tous les éléments de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ ont un opposé. T n'est par contre pas commutative.

$\boxed{\text{Donc } (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \mathrm{T}) \text{ est un groupe non commutatif.}}$

5.
a. pour un réel d, on a $\overline{d} = d \in \mathbb{R}$, et donc :
$\forall\Big(\left(a;b\right);\left(c;d\right)\Big) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*)^2,\ \left(a;b\right) \mathrm{T}\left(c;d\right) = \left(a\overline{d} + c; bd\right) = \left(ad + c; bd\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

$\boxed{\text{Ainsi } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \text{ est stable par } \mathrm{T}.}$

b. L'élément neutre de T est bien dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et l'associativité reste vraie.
L'opposé est également dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ (là encore car le conjugué d'un réel est un réel).

$\boxed{\text{On peut donc conclure que } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \mathrm{T}).}$

Exercice 5

1.
a. Comme p et q sont premiers et que r est premier avec eux, on peut appliquer le petit théorème de Fermat.

On a donc :
$r^{p-1} \equiv 1\,\left[p\right]$, ce qui est équivalent à $r^{p-1} - 1$ est un multiple de p

Et $r^{q-1} \equiv 1\,\left[q\right]$, ce qui est équivalent à $r^{q-1} - 1$ est un multiple de q

$\boxed{\text{Donc } p \text{ divise } r^{p-1} - 1 \text{ et } q \text{ divise } r^{q-1} - 1.}$

b. Comme $r^{p-1} \equiv 1\,\left[p\right]$, on déduit que $\left(r^{p-1}\right)^{q-1} = r^{(p-1)(q-1)} \equiv 1\,\left[p\right]$

De la même façon $r^{(p-1)(q-1)} \equiv 1\,\left[q\right]$

$\boxed{\text{Ainsi, } p \text{ et } q \text{ divisent } r^{(p-1)(q-1)} - 1.}$

c. D'après la question précédente, p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.
Et comme p et q sont premiers (et donc premiers entre eux) leur produit divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.

Donc pq divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.

2. Posons $p = 13$, $q = 17$ (qui sont bien premiers) et $r = 2024$, qui est bien premier avec 13 et 17.

On a de plus $13 \times 17 = 221$ et $(13-1) \times (17-1) = 12 \times 16 = 192$

Et donc 221 qui divise $2024^{192} - 1$ ou encore $2024^{192} \equiv 1\ [221]$.

Ce qui implique que si $2024^{192}x \equiv 3\ [221]$ alors $x \equiv 3\ [221]$

Les solutions de l'équation sont $x = 3 + 221k,\ k \in \mathbb{Z}$.

©antoine.remond.maths@gmail.com