Bac PC (Session normale 2022)

Exercice 1

$A(0,1,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$.

1- a- Mq que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k}$

On a: $\overrightarrow{AB}(1,1,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{i} - 0\vec{j} + \vec{k} = \vec{i} + \vec{k}$$

b- En déduire que $x+z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1,0,1)$ est normal au plan (ABC), donc si $M(x,y,z) \in (ABC)$ alors $\overrightarrow{AM} \perp (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$

ie: $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$

ie: $\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

ie: $1 \times x + 0(y-1) + 1 \times (z-1) = 0$

donc: $x + z - 1 = 0$ est l'équation du plan (ABC).

2- (S) est la sphère de centre $\Omega(1,1,2)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$

Déterminons une équation de la sphère (S).

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace, on a :

$$M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+4=0$$

donc : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+4=0$ est une équation de la sphère (S).

3- M que le plan (ABC) est tangent à (S) au point A :

On a : $\Omega(1,1,2)$ et $(ABC): x+z-1=0$

$$d(\Omega,(ABC)) = \frac{|1\times1+0\times1+1\times2-1|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R$$

donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

On a : $\Omega A = \sqrt{(0-1)^2+(1-1)^2+(1-2)^2} = \sqrt{2}$

donc le point $A \in (S)$

et comme $A \in (ABC)$ alors A est le point où le plan (ABC) rencontre la sphère (S).

Ainsi le plan (ABC) est tangent à S au point A.

3. (Δ) passe par C et $(\Delta) \perp (ABC)$.

a. Déterminons une représentation paramétrique de (Δ)

On a : $(\Delta) \perp (ABC)$, donc un vecteur normal à (ABC) est directeur de (Δ)

et comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\,(1,0,1)$ est normal à (ABC) alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de (Δ), et comme (Δ) passe par le point $C(-1,1,2)$ alors une représentation paramétrique de (Δ) est :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b. M que (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point (D), à déterminer :

$$M(x,y,z) \in (S) \cap (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 \\ z = 2 + t \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2 \end{cases}$$

$$(-1+t-1)^2 + (1-1)^2 + (2+t-2)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (t-2)^2 + t^2 = 2 \Leftrightarrow 2t^2 - 4t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(t^2 - 2t + 1) = 0 \Leftrightarrow 2(t-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1$$

donc : $\begin{cases} x = -1 + t = -1 + 1 = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 + t = 2 + 1 = 3 \end{cases}$

Ainsi : $(S) \cap (\Delta) = \{D\} \,/\, D(0,1,3)$

c'est à dire (Δ) est tangent à (S) au point $D(0,1,3)$.

c. Calculons le produit scalaire $\vec{AC} \cdot (\vec{i} + \vec{k})$:

On a : $\vec{AC}(-1,0,1)$ et $\vec{i} + \vec{k}(1,0,1)$

$$\vec{AC} \cdot (\vec{i} + \vec{k}) = -1 + 0 + 1 = 0$$

https://groupe-reussite.fr/cours-particuliers/physique-chimie/tous-niveaux/france/

En déduire la distance $d(A,(\Delta))$

On a : $\vec{AC}\cdot(\vec{i}+\vec{k})=0$

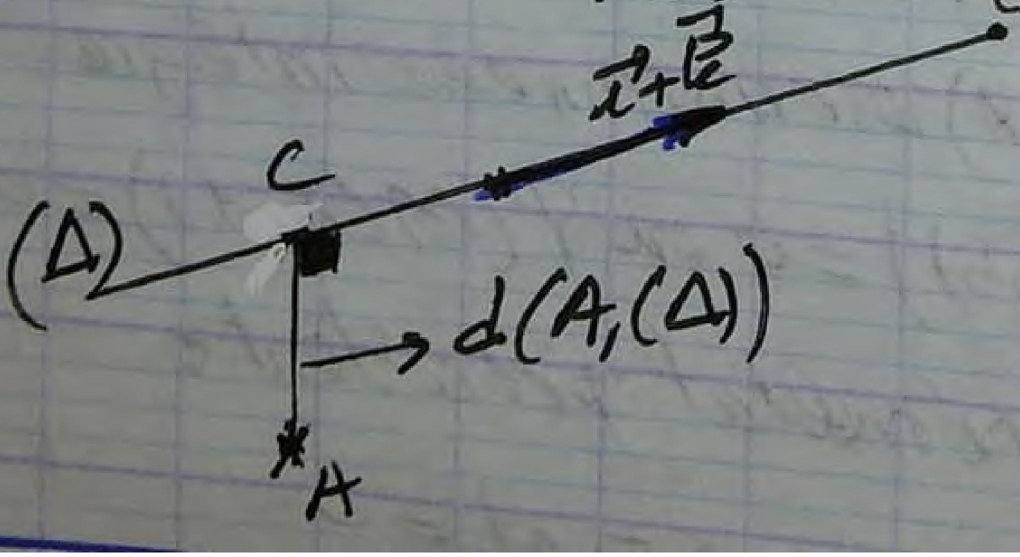
donc : $\vec{AC}\perp(\vec{i}+\vec{k})$

ie : $\vec{AC}\perp(\vec{AB}\wedge\vec{AC})$

et comme (Δ) passe par C et a pour vecteur directeur $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ alors

$d(A,(\Delta)) = AC$

ie : $d(A,(\Delta)) = \sqrt{(-1)^2+0^2+(1)^2} = \sqrt{2}$



Exercice 2

$A(a=-1-i\sqrt{3})$, $B(b=-1+i\sqrt{3})$ et t est la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$

1- Prouvons que l'affixe de D image de B par t est $d=-2$:

On a : $t(B)=D \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OA}$

$$\Leftrightarrow d-b=a-0$$

$$\Leftrightarrow d=a+b$$

et comme $a+b=-1-i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}=-2$

alors $d=-2$.

2- R est la rotation de centre D et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. M que l'affixe de C image de B par R est $c=-4$

On a : $R(B)=C \Leftrightarrow c-d=e^{i2\pi/3}(b-d)$

$$\Leftrightarrow c=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\left(-1+i\sqrt{3}+2\right)-2$$

$$\Leftrightarrow c=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)-2$$

$$\Leftrightarrow c=-\frac{1}{2}-\cancel{i\frac{\sqrt{3}}{2}}+\cancel{i\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{3}{2}-2$$

$$\Leftrightarrow c=-4$$

3-a- Ecrire le nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique

On a : $\frac{b-c}{a-c}=\frac{-1+i\sqrt{3}+4}{-1-i\sqrt{3}+4}=\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)}$

$$=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{(\sqrt{3}+i)^2}{4}=\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

donc : $\frac{b-c}{a-c} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

b. En déduire que : $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$

On a : $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2$

$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

$= e^{i2\pi/3}$

et on a : $c-d = e^{i2\pi/3}(b-d)$ (question 2)

donc : $\frac{c-d}{b-d} = e^{i2\pi/3}$

d'où : $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$

4- $\Gamma(\Omega, 2)$ et $\Gamma'(O, 4)$

$M(z) \in (\Gamma) \cap (\Gamma')$

a. Vérifions que $|z+2| = 2$

On a : $M(z) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \Omega M = 2$

$\Leftrightarrow |z-(-2)| = 2$

$\Leftrightarrow |z+2| = 2$

b- Prouvons que $Z+\overline{Z}=-8$

On a : $M(Z)\in(\Gamma') \Leftrightarrow OM=4$

$\Leftrightarrow |Z|=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{Z\overline{Z}}=4$

$\Leftrightarrow Z\overline{Z}=16$

et on a : $|Z+2|=2 \Leftrightarrow \sqrt{(Z+2)\overline{(Z+2)}}=2$

$\Leftrightarrow (Z+2)(\overline{Z}+2)=4$

$\Leftrightarrow Z\overline{Z}+2(Z+\overline{Z})+4=4$

$\Leftrightarrow Z+\overline{Z}=-\frac{Z\overline{Z}}{2}$

et comme $Z\overline{Z}=16$ alors $Z+\overline{Z}=-8$

c- En déduire que (Γ) et (Γ') se coupent en un seul point, à déterminer :

Soit $M(Z)\in(\Gamma)\cap(\Gamma')$, d'après le résultat de la question 4-b, on a : $Z+\overline{Z}=-8$

ie : $2R_e(Z)=-8$

donc : $R_e(Z)=-4$

d'où : $Z=-4+xi\ /\ x\in\mathbb{R}$

et comme $M(z) \in (\Gamma')$ alors : $OM = 4$

i.e : $|z| = 4$

$$|z| = 4 \Leftrightarrow |-4 + xi| = 4$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{16 + x^2} = 4$$
$$\Leftrightarrow 16 + x^2 = 16$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0$$

donc : $z = -4$ $(x = 0)$

Ainsi le point d'intersection de (Γ) et (Γ') est le point d'affixe -4, c'est à dire le point C.

Exercice 3

10 boules : 3 blanches, 3 vertes, 4 rouges

On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1- A est l'événement "N'obtenir aucune boule rouge"

M que $p(A) = \frac{1}{6}$

On est dans le cas d'équiprobabilité, donc

$$p(A) = \frac{card\,A}{card\,\Omega}$$

et comme : $card\,\Omega = C_{10}^{3} = \frac{\cancel{10}^{5} \times \cancel{9}^{3} \times \cancel{8}}{1 \times \cancel{2} \times \cancel{3}} = 120$

et $card\,A = C_{6}^{3} = \frac{\cancel{6} \times 5 \times 4}{1 \times \cancel{2} \times \cancel{3}} = 20$

(on a éliminé les rouges)

alors : $p(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

2- B : "obtenir 3 boules blanches ou 3 boules vertes"

Calculons $p(B)$:

$$p(B) = \frac{card\,B}{card\,\Omega} = \frac{C_3^3 + C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

3- C : "Obtenir exactement une boule rouge"

M que $p(C) = \frac{1}{2}$

$$p(C) = \frac{card\,C}{card\,\Omega} = \frac{C_4^1 \times C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{4 \times 15}{120} = \frac{1}{2}$$

b- Calculons $J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^x \, dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

Posons : $u(x) = x+1$ et $v'(x) = (x+1)e^x$

on a alors : $u'(x) = 1$ et $v(x) = xe^x$

donc d'après la formule d'intégration par parties :

$$J = \left[(x+1)xe^x\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} xe^x \, dx$$

ie : $J = -\int_{-1}^{0} xe^x \, dx$

Utilisons une autre fois la méthode d'intégration par parties, en posant : $p(x) = x$ et $q'(x) = e^x$

on a alors : $p'(x) = 1$ et $q(x) = e^x$

donc : $\int_{-1}^{0} xe^x \, dx = \left[xe^x\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^x \, dx$

$$= e^{-1} - \left[e^x\right]_{-1}^{0} = e^{-1} - (1 - e^{-1})$$

$$= 2e^{-1} - 1$$

d'où : $J = -(2e^{-1} - 1) = 1 - 2e^{-1}$

2-a- Résolvons l'équ. différentielle

(E) : $y'' - 2y' + y = 0$

L'équation caractéristique de (E) est :

$r^2 - 2r + 1 = 0$

ie : $(r-1)^2 = 0$

d'où $r = 1$.

La solution générale de (E) est $y = (\alpha x + \beta)e^x$ tels que α et $\beta \in \mathbb{R}$, c'est à dire que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \longrightarrow (\alpha x + \beta)e^x$ où α et β sont des réels.

b. Mque h est la solution de (E) qui vérifie $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$:

Pour tout réel x, on a : $h(x) = (x+1)e^x$

ici on a $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, donc h est solution de l'équ. différentielle (E)

et on a : $h(0) = (0+1)e^0 = 1 \times 1 = 1$

et $(\forall x \in \mathbb{R})$ $h'(x) = e^x + (x+1)e^x$

donc : $h'(0) = e^0 + (0+1)e^0 = 1 + 1 = 2$

Ainsi h est la solution de (E) qui vérifie $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$.