0.5 b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

(On prendra : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$, $f(1)=-0.5$ et il n'est pas demandé de représenter le point I)

0.25 5-a) Vérifier que : $(\forall x\in]-\infty,\alpha])$; $f(x)\le 0$

0.75 b) Montrer que : $\int_0^{\alpha} f(x)dx=\frac{2}{3}\alpha\left(\alpha^2-3\right)$, en déduire que : $\frac{3}{2}<\alpha\le\sqrt{3}$

0.5 c) Calculer en fonction de α , en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y=0$, $x=0$ et $x=\alpha$

PARTIE II : On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0<\alpha \quad \text{et} \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1}=f(u_n)+u_n$$

0.5 1-a) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n<\alpha$ (utiliser la question 5-a) de la PARTIE I)

0.25 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2- On suppose que $0\le u_0$ et on pose $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$

0.5 a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g(x)>0$ (On prendra $\ln 2=0.69$)

0.5 b) En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0\le u_n$

(On remarque que : $f(x)+x=xg(x)$)

0.25 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

0.5 d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3- On suppose que $u_0<0$

0.5 a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}-u_n\le f(u_0)$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n\le u_0+nf(u_0)$

0.25 c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

FIN