

**EXERCICE1 : (12 points)**

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx$$

Soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

Partie I :

0.5 1-a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - nx + 2)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 b) Montrer que la courbe (C_n) admet, en $-\infty$, une asymptote (Δ_n) dont on déterminera une équation cartésienne.

0.5 2-a) Montrer que la fonction f_n est dérivable sur \mathbb{R} et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f_n'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$$

0.5 b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$

0.5 c) En déduire le sens de variation de la fonction f_n sur \mathbb{R}

(On distinguera les deux cas : $n=0$ et $n \geq 1$)

0.5 3-a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C_n) au point I d'abscisse 0

0.5 b) Montrer que le point I est le seul point d'inflexion de la courbe (C_n)

0.5 4- Représenter graphiquement dans le même repère, les deux courbes (C_0) et (C_2) .

5- Pour tout réel $t > 0$, on pose $A(t)$ l'aire du domaine plan limité par (C_n)

et les droites d'équations respectives : $y = nx - 2$, $x = 0$ et $x = t$

0.5 a) Calculer $A(t)$ pour tout $t > 0$

0.5 b) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$

Partie II :

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f_0(u_n)$$

0.5 1-a) Montrer que l'équation $f_0(x) = x$ admet une unique solution α dans \mathbb{R}

0.5 b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; |f_0'(x)| \leq \frac{1}{2}$

0.5 2-a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$



0.5 b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$

0.5 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers α

Partie III :

On suppose dans cette partie que $n \geq 2$

0.5 1- a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel x_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$

0.5 b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $0 < x_n < 1$

$$\text{(On prendra } \frac{2e}{1+e} < 1.47 \text{)}$$

0.5 2-a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(x_n) > 0$

0.5 b) En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante.

0.5 c) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

0.5 3-a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n} \left(\frac{2e}{1+e} \right)$

0.5 b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$

0.5 4-a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $x_n \leq x_2$

0.5 b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n$

EXERCICE2 : (4 points)

Soient a , b et c trois nombres complexes non nuls tel que : $a + b \neq c$

0.5 1-a) Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation d'inconnue z

$$(E) : z^2 - (a + b + c)z + c(a + b) = 0$$

0.5 b) On suppose dans cette question que : $a = i$, $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c = a - b$

Ecrire les deux solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

2- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ qu'on suppose non alignés.

Soient $P(p)$ le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en A

et $Q(q)$ le centre de la rotation d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme C en A

et $D(d)$ le milieu du segment $[BC]$

- 1 a) Montrer que : $2p = b + a + (a - b)i$ et $2q = c + a + (c - a)i$
- 0.5 b) Calculer : $\frac{p - d}{q - d}$
- 0.5 c) En déduire la nature du triangle PDQ
- 3- Soient E le symétrique de B par rapport à P et F le symétrique de C par rapport à Q et K le milieu du segment $[EF]$
- 0.5 a) Montrer que l'affixe de K est $k = a + \frac{i}{2}(c - b)$
- 0.5 b) Montrer que les points K , P , Q et D sont cocycliques.

EXERCICE3 : (4 points)

Partie I : On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $47x - 43y = 1$

- 0.25 1- Vérifier que le couple $(11, 12)$ est une solution particulière de l'équation (E)
- 0.75 2- Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)

Partie II : On considère dans \mathbb{Z} l'équation (F) : $x^{41} \equiv 4 \pmod{43}$

- 1- Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F)
- 0.5 a) Montrer que x et 43 sont premiers entre eux, en déduire que : $x^{42} \equiv 1 \pmod{43}$
- 0.5 b) Montrer que : $4x \equiv 1 \pmod{43}$, en déduire que : $x \equiv 11 \pmod{43}$
- 0.5 2- Donner l'ensemble des solutions dans \mathbb{Z} de l'équation (F)

Partie III : On considère dans \mathbb{Z} le système à deux équations suivant (S) : $\begin{cases} x^{41} \equiv 4 \pmod{43} \\ x^{47} \equiv 10 \pmod{47} \end{cases}$

- 1- Soit x une solution du système (S)
- 0.5 a) Montrer que x est solution du système (S') : $\begin{cases} x \equiv 11 \pmod{43} \\ x \equiv 10 \pmod{47} \end{cases}$
- 0.5 b) En déduire que : $x \equiv 527 \pmod{2021}$ (On pourra utiliser la partie I)
- 0.5 2- Donner l'ensemble des solutions dans \mathbb{Z} du système (S)

FIN