

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

## MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 dont une annexe en page 7/7 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. **Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.** Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

### EXERCICE 1 (4 points)

#### Commun à tous les candidats

On considère un solide  $ADECBF$  constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré  $ABCD$  de centre  $I$ . Une représentation en perspective de ce solide est donnée **en annexe (à rendre avec la copie)**. Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AK})$

1.
  - a) Montrer que  $IE = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . En déduire les coordonnées des points  $I$ ,  $E$  et  $F$ .
  - b) Montrer que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$  est normal au plan  $(ABE)$ .
  - c) Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABE)$ .
2. On nomme  $M$  le milieu du segment  $[DF]$  et  $N$  celui du segment  $[AB]$ .
  - a) Démontrer que les plans  $(FDC)$  et  $(ABE)$  sont parallèles.
  - b) Déterminer l'intersection des plans  $(EMN)$  et  $(FDC)$ .
  - c) Construire sur l'**annexe (à rendre avec la copie)** la section du solide  $ADECBF$  par le plan  $(EMN)$ .

## EXERCICE 2 (4 points)

### Commun à tous les candidats

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.

Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

*Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à  $10^{-3}$  près.*

### Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?
2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

### Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite. Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

### Partie C

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.

Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 ;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

### EXERCICE 3 (4 points)

#### Commun à tous les candidats

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1-x}}.$$

#### Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .
2. Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e}$  (on rappelle que  $e = e^1$ ).
3. Montrer alors que  $\int_0^1 f(x) dx = \ln(2) + 1 - \ln(1 + e)$ .

#### Partie B

Soit  $n$  un entier naturel. On considère les fonctions  $f_n$  définies sur  $[0; 1]$  par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + ne^{1-x}}$$

On note  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

1. On a tracé **en annexe** les courbes représentatives des fonctions  $f_n$  pour  $n$  variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe  $\mathcal{C}_0$  représentative de la fonction  $f_0$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel, interpréter graphiquement  $u_n$  et préciser la valeur de  $u_0$ .
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite  $(u_n)$ ? Démontrer cette conjecture.
4. La suite  $(u_n)$  admet-elle une limite?

#### EXERCICE 4 (5 points)

##### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

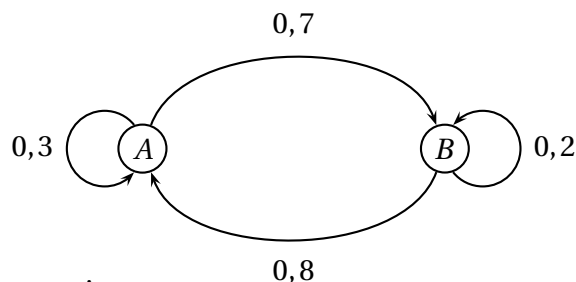
- On considère le système  $\begin{cases} n \equiv 1 [5] \\ n \equiv 3 [4] \end{cases}$  d'inconnue  $n$  entier relatif.

**Affirmation 1 :** Si  $n$  est solution de ce système alors  $n - 11$  est divisible par 4 et par 5.

**Affirmation 2 :** Pour tout entier relatif  $k$ , l'entier  $11 + 20k$  est solution du système.

**Affirmation 3 :** Si un entier relatif  $n$  est solution du système alors il existe un entier relatif  $k$  tel que  $n = 11 + 20k$ .

- Un automate peut se trouver dans deux états  $A$  ou  $B$ . À chaque seconde il peut soit rester dans l'état où il se trouve, soit en changer, avec des probabilités données par le graphe probabiliste ci-dessous. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $a_n$  la probabilité que l'automate se trouve dans l'état  $A$  après  $n$  secondes et  $b_n$  la probabilité que l'automate se trouve dans l'état  $B$  après  $n$  secondes. Au départ, l'automate est dans l'état  $B$ .



On considère l'algorithme suivant :

<b>Variables :</b>	$a$ et $b$ sont des réels
<b>Initialisation :</b>	$a$ prend la valeur 0 $b$ prend la valeur 1
<b>Traitement :</b>	Pour $k$ allant de 1 à 10 $a$ prend la valeur $0,8a + 0,3b$ $b$ prend la valeur $1 - a$ Fin Pour
<b>Sortie :</b>	Afficher $a$ Afficher $b$

**Affirmation 4 :** En sortie, cet algorithme affiche les valeurs de  $a_{10}$  et  $b_{10}$ .

**Affirmation 5 :** Après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état  $A$  que d'être dans l'état  $B$ .

**EXERCICE 5 (3 points)****Commun à tous les candidats**

On considère la suite  $(z_n)$  de nombres complexes définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 \end{cases} .$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note  $M_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

On considère le nombre complexe  $z_A = 4 + 2i$  et  $A$  le point du plan d'affixe  $z_A$ .

1. Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = z_n - z_A$ .

a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times u_n$ .

b) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :

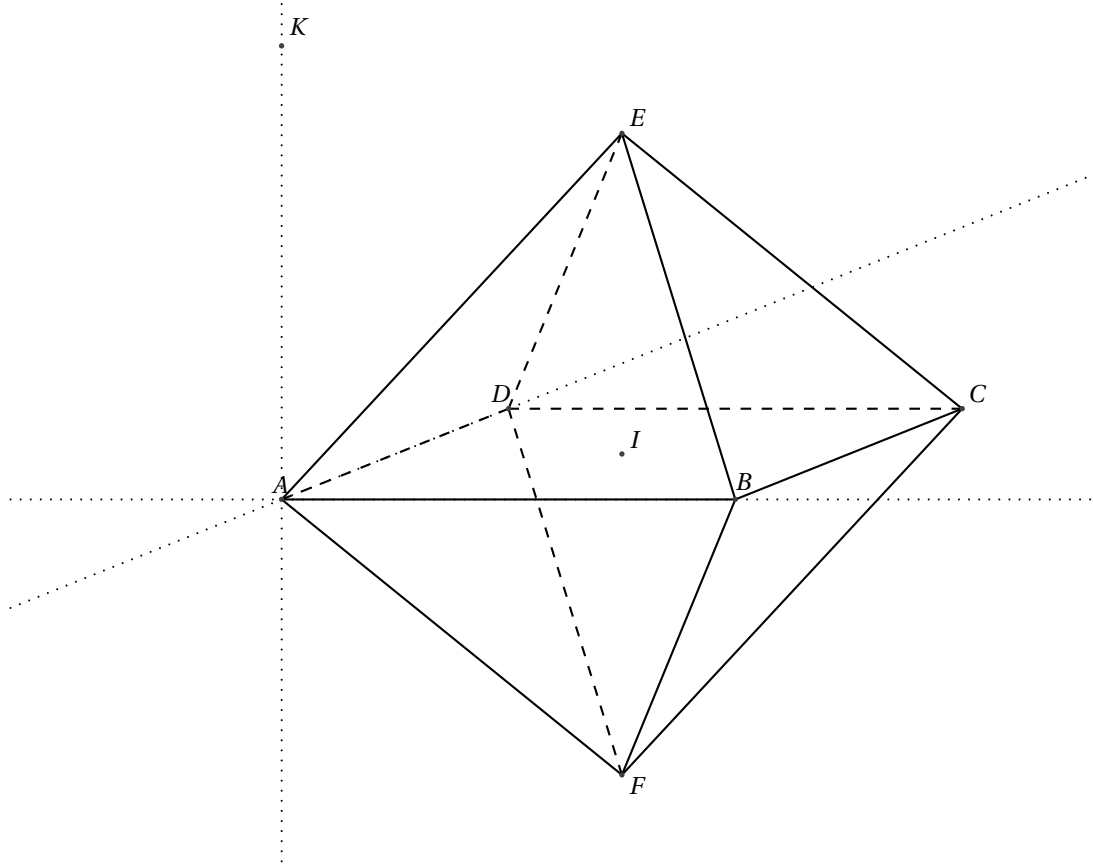
$$u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4 - 2i).$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , les points  $A$ ,  $M_n$  et  $M_{n+4}$  sont alignés.

# Annexe

À rendre avec la copie

## Exercice 1



## Exercice 3

