∾ Corrigé du baccalauréat Asie 24 mars 2023 ∾

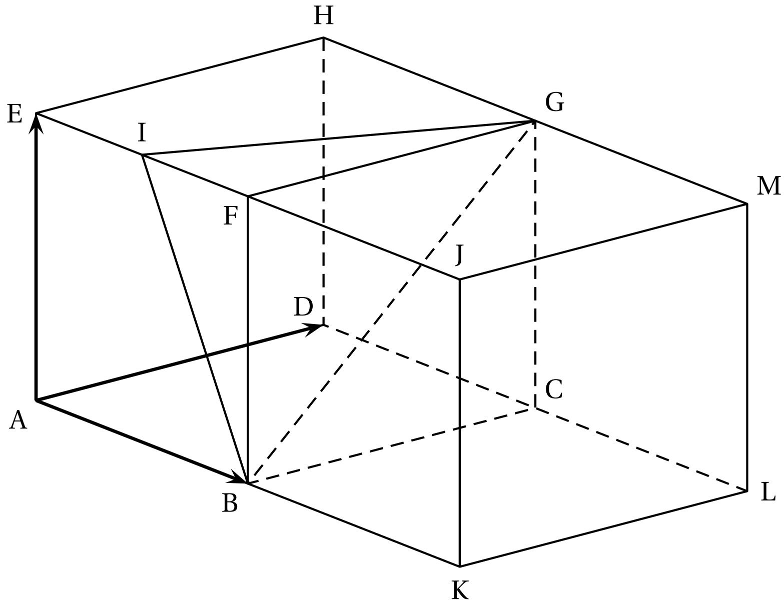
Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 **5 points**

Partie A

On considère deux cubes ABCDEFGH et BKLCFJMG positionnés comme sur la figure suivante :



Le point I est le milieu de [EF].
Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.
Ainsi, par exemple, les points F, G et J ont pour coordonnées

$$F(1\,;0\,;1),\qquad G(1\,;1\,;1)\quad \text{et}\quad J(2\,;0\,;1).$$

1. Puisque ABCDEFGH et BKLCFJMG sont des cubes on a FG = BF = EH = AD = 1 et comme I est le milieu de [EF], on a $FI = \frac{1}{2}\times EF = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$.
En prenant comme base le triangle rectangle isocèle BFG et la hauteur [FI], on a donc :
$V_{\text{FIGB}} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ (unité de volume).

2. On a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD}$. les coordonnées de I sont donc : $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$.

3. Avec J(2 ; 0 ; 1) et D(0 ; 1 ; 0), on obtient $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

D'autre part $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0-0\\1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$.

De G(1 ; 1 ; 1) on obtient $\overrightarrow{\text{BG}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a donc $\overrightarrow{\text{DJ}}\cdot\overrightarrow{\text{BI}} = -1+0+1 = 0$ et

$\overrightarrow{\text{DJ}}\cdot\overrightarrow{\text{BG}} = 0-1+1 = 0$.

Conclusion $\overrightarrow{\text{DJ}}$ est un vecteur normal à deux vecteurs non colin"aires du plan (BIG) : c'est un vecteur normal à ce plan.

4. On sait donc d'après la question précédente que :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{BIG}) \iff 2x-1y+1z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

Or $\text{B}(1\,;0\,;0) \in (\text{BIG}) \iff 2\times1-1\times0+1\times0+d=0 \iff 2+d=0 \iff d=-2$.

On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{BIG}) \iff 2x-1y+1z-2=0$

5. La droite d orthogonale à (BIG) a un vecteur directeur colinéaire à $\overrightarrow{\text{DJ}}$.

On a F(1 ; 0 ; 1). D'autre part donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in d \iff$

$$\overrightarrow{\text{F}M} = t\overrightarrow{\text{DJ}},\ t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& 2t\\ y-0 &=& -t\\ z-1 &=& t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y-0 &=& -t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$$

6. **a.** Si $\text{L}'(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à d et au plan (BIG) ses coordonnées vérifient les équations paramétriques de d et l'équation du plan (BIG) soit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y-0 &=& -t\\ z &=& 1+\ t\\ 2x-y+z-2 &=& 0\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs expressions en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$2(1+2t)-(-t)+(1+t)-2=0 \iff 2+4t+t+1+t-2=0 \iff 6t+1=0 \iff t=-\dfrac{1}{6}$ et

en remplaçant dans x, y et z, on obtient $x = 1+\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{3}$, $y=-\left(-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{6}$ et $z=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$.

Conclusion avec $\text{L}' = d\cap(\text{BIG})$, $\quad \text{L}'\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{6}\,;\,\dfrac{5}{6}\right)$.

b. Calculer la longueur FL. Avec $\overrightarrow{\text{FL}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6}\end{pmatrix}$,

on a $\text{FL}'^2 = \left\|\overrightarrow{\text{FL}}\right\|^2 = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{4}{36}+\dfrac{2}{36}=\dfrac{6}{36}$,

donc $\text{FL}' = \sqrt{\dfrac{6}{36}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

c. En prenant comme base le triangle (BIG) le tétraèdre FIGB a pour hauteur [FL′] ; on a donc

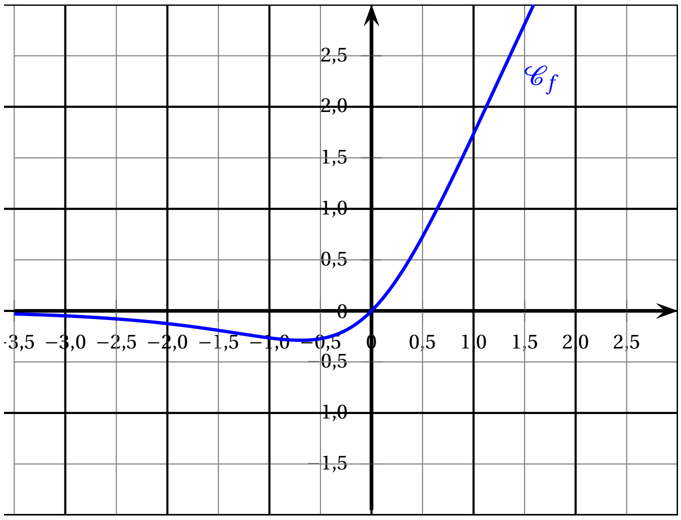
$V_{\text{FIGB}} = \text{aire (BIG)}\times[\text{FL}']\times\dfrac{1}{3} \iff \dfrac{\dfrac{1}{12}\times3}{\dfrac{\sqrt{6}}{6}} = \text{aire (BIG)} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. (unités d'aire)

EXERCICE 2 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - e^{x} + 1\right).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative représentée ci-dessous.



Un élève formule les conjectures suivantes à partir de cette représentation graphique :

1. L'équation $f(x) = 2$ semble admettre au moins une solution.
2. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f semble être croissante est $[-0,5\ ;\ +\infty[$.
3. L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ semble être : $y = 1,5x$.

Le but de cet exercice est de valider ou rejeter les conjectures concernant la fonction f.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par

$$g(x) = e^{2x} - e^{x} + 1.$$

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = X = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{X} = 0$; d'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

2. On peut écrire $g(x) = e^{x}\left(e^{x} - 1 + e^{-x}\right)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, on a par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} - 1 + e^{-x} = +\infty$ et enfin par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

3. g somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et

$g'(x) = 2e^{2x} - e^{x} = e^{x}\left(2e^{x} - 1\right)$.

4. D'après la question précédente comme $e^{x} > 0$, quel que soit le réel x, le signe de $g'(x)$ est celui de $2e^{x} - 1$.

- $2e^{x} - 1 = 0 \iff 2e^{x} = 1 \iff e^{x} = \dfrac{1}{2} \iff x = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) ;
- $2e^{x} - 1 > 0 \iff 2e^{x} > 1 \iff e^{x} > \dfrac{1}{2} \iff x > \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$;

- $2\mathrm{e}^x - 1 < 0 \iff 2\mathrm{e}^x < 1 \iff \mathrm{e}^x < \dfrac{1}{2} \iff x < \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2.$

  La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty\,;\,-\ln 2[$ et croissante sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$.

  Donc $g(-\ln 2) = \mathrm{e}^{-2\ln 2} - \mathrm{e}^{-\ln 2} + 11 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\ln 2}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} + 1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 4}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} + 1 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{4}$ est le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

  D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Le minimum de la fonction g est supérieur à zéro, donc quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\;g(x) > 0$.

6. En posant $X = \mathrm{e}^x$, $g(x) = g(X) = X^2 - X + 1 = \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + 1 = \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.

   Sous cette écriture on voit que $g(X)$ est un trinôme somme de deux carrés dont l'un est supérieur à zéro, donc $g(X) > 0$.

Partie B

1. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\;f(x) = \ln g(x)$.

   Or on a vu dans la partie précédente que $g(x) > 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = \ln g(x)$ entraîne

   $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1}.$

3. Soit $\mathcal{T}_0$ la tangente au point d'abscisse 0 :

   On a $M(x\,;\,y) \in \mathcal{T}_0 \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

   - $f(0) = \ln(1 - 1 + 1) = \ln 1 = 0$;
   - $f'(0) = \dfrac{2-1}{1-1+1} = 1$, donc :

   $M(x\,;\,y) \in \mathcal{T}_0 \iff y - 0 = 1(x - 0) \iff y = x.$

4. On a vu que $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ et dans la partie que le dénominateur $g(x) > 0$; le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g'(x)$ étudié dans la partie A.

   Donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,-\ln 2[$, d'où la fonction f est décroissante sur cet intervalle et $f'(x) > 0$ sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$, d'où la fonction f est croissante sur cet intervalle.

5. - $f(-\ln 2) = \ln g(-\ln 2) = \ln\dfrac{3}{4} \approx -0,29$;
   - On a vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, donc par composition $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln g(x) = +\infty$.

   La fonction f est continue car dérivable sur $]-\ln 2\,;\,+\infty[$, strictement croissante de $f(-\ln 2) < 2$ à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique

   $\alpha \in]-\ln 2\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne :

$f(1) \approx 1,7$ et $f(2) \approx 3,8$, donc $1 < \alpha < 2$;

$f(1,1) \approx 1,9$ et $f(1,2) \approx 2,2$, donc $1,1 < \alpha < 1,2$;

$f(1,12) \approx 1,99$ et $f(1,13) \approx 2,01$, donc $1,12 < \alpha < 1,13$.

Partie C

Conjecture 1 : d'après le résultat précédent elle est vraie ;
Conjecture 2 : elle est fausse f est croissante sur $]-\ln 2\ ;\ +\infty[$;
Conjecture 3 : on a vu que l'équation de cette tangente est $y = x$: la conjecture est fausse.

EXERCICE 3 **4 points**

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.
Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.
On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.
On admet que, au bout de 24 heures, 0,5 % des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.
On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.
Pour $n \geqslant 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1. **a.** $v_0 = 2 \times 3 \times 10^{21} = 6 \times 10^{21}$ noyaux atomiques.

   b. Si v_n est le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours, le lendemain 0,5 % ont disparu, il reste donc $v_n\left(1 - \dfrac{0,5}{100}\right) = v_n \times (1 - 0,005) = 0,995v_n$ que l'on augmente de 0,005. Donc $v_{n+1} = 0,995v_n + 0,005 \times 3 \times 10^{21} = 0,995v_n + 0,015 \times 10^{21}$ ou encore

$$v_{n+1} = 0,995v_n + 1,5 \times 10^{19}.$$

2. **a.** *Initialisation* :
   Pour $n = 0$, $u_0 = 6 \times 10^{21}$;
   Pour $n = 1$, la relation de récurrence donne :
   $u_1 = 0,995 \times 6 \times 10^{21} v + 1,5 \times 10^{19} = 5,97 \times 10^{21} + 1,5 \times 10^{19} = 597 \times 10^{19} + 1,5 \times 10^{19} = 598,5 \times 10^{19} = 5,985 \times 10^{21}$.
   On a donc $0 \leqslant v_1 \leqslant v_0$. la proposition est vraie au rang $n = 0$.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$. On peut écrire successivement :
   $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \iff 0,995 \times 0 \leqslant 0,995v_{n+1} \leqslant 0995v_n \iff 0 + 1,5 \times 10^{19} \leqslant v_{n+1} \times 0,995 + 1,5 \times 10^{19} \leqslant 0,995v_n + 1,5 \times 10^{19}$ soit $1,5 \times 10^{19} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. La proposition est donc vraie au rang $n + 1$.
   Conclusion : la proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n.$$

   b. La partie gauche de la proposition montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et la partie de droite montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel $\ell \geqslant 0$.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = v_n - 3 \times 10^{21}.$$

a. D'après la définition on a :
$u_{n+1} = v_{n+1} - 3 \times 10^{21} = 0,995 v_n + 1,5 \times 10^{19} - 3 \times 10^{21} = 0,995 v_n + 1,5 \times 10^{19} - 300 \times 10^{19}$, soit $u_{n+1} = 0,995 v_n - 298,5 \times 10^{19} = 0,995 v_n - 2,985 \times 10^{21} = 0,995 v_n - 3 \times 0,995 \times 10^{21} = 0,995 \left(v_n - 3 \times 10^{21}\right) = 0,995 u_n$.
L'égalité $u_{n+} = 0,995 u_n$, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 0,995, de premier terme $u_0 = v_0 - 3 \times 10^{21} = 6 \times 10^{21} - 3 \times 10^{21} = 3 \times 10^{21}$.

b. On sait que le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $u_n = u_0 \times 0,995^n = 3 \times 10^{21} \times 0,995^n$.
Or $u_n = v_n - 3 \times 10^{21} \iff v_n = u_n + 3 \times 10^{21} = 3 \times 10^{21} \times 0,995^n + 3 \times 10^{21} = 3 \times 10^{21} \left(0,995^n + 1\right)$.

c. Comme $-1 < 0,995 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,995^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,995^n + 1 = 1$ et enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3 \times 10^{21}$.

4. Il faut résoudre l'inéquation :
$v_n < 4,5 \times 10^{21} \iff 3 \times 10^{21} \left(0,995^n + 1\right) < 4,5 \times 10^{21} \iff 3\left(0,995^n + 1\right) < 4,5 \iff 0,995^n + 1 < 1,5 \iff 0,995^n < 0,5 \iff n \ln 0,995 < \ln 0,5 \iff n > \dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,995}$ (car $\ln 0,995 < 0$).

La calculatrice donne $\dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,995} \approx 138,3$.

Le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4,5 \times 10^{21}$ au bout de 139 jours.

5. **a.** Pour définir V on peut utiliser la définition ou la formule explicite, soit
V = 0.995*V + 1.5*10**19 ou
V= 3*10**21*(0.995**(k+1)+1)

b. 52 semaines à 7 jours représentent 364 jours. Il faut donc écrire noyaux(364).

EXERCICE 4 **5 points**

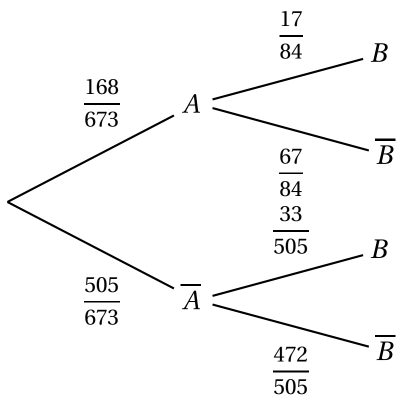
Pour chacune des cinq questions de cet exercice, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1 : Le nombre de termes de cette liste est : 673 : en effet,
le n-ième terme de la liste est $7 + 3(n-1)$; il faut donc résoudre l'équation :
$2023 = 7 + 3(n-1) \iff 2016 = 3(n-1) \iff 3 \times 672 = 3(n-1) \iff 672 = n - 1 \iff n = 673$.
Question 2 : On choisit au hasard un nombre dans cette liste. La probabilité de tirer un nombre pair est :
Il faut trouver n tel que $7 + 3(n-1) = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}$,soit $7 + 3n - 3 = 2k \iff 4 + 3n = 2k$.
Il faut que la somme $4 + 3n$ soit paire ; comme 4 est pair il faut donc que $3n$ soit pair et comme 3 est impair il faut que n soit pair.
Sur les 673 nombres de la liste le premier et le dernier nombre de la liste sont impairs ; il y a donc 336 nombres pairs. Réponse C

On rappelle qu'on choisit au hasard un nombre dans cette liste.
On s'intéresse aux évènements suivants :

- Évènement A : « obtenir un multiple de 4 »
- Évènement B : « obtenir un nombre dont le chiffre des unités est 6 »

Pour répondre aux questions suivantes on pourra utiliser l'arbre pondéré ci-dessous et on donne $p(A \cap B) = \dfrac{34}{673}$.



Question 3 :
La probabilité d'obtenir un multiple de 4 ayant 6 comme chiffre des unités est donnée par
$p(A \cap B) = \dfrac{34}{673}$! Réponse B

Question 4 : $P_B(A)$ est égale à :
$P_B(A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(B)}$.
Or $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = \dfrac{34}{673} + \dfrac{505}{673} \times \dfrac{33}{505} = \dfrac{34}{673} + \dfrac{33}{673} = \dfrac{67}{673}$.
Donc $P_B(A) = \dfrac{\frac{34}{673}}{\frac{67}{673}} = \dfrac{34}{67}$. Réponse D

Question 5 : On choisit, au hasard, successivement, 10 éléments de cette liste.
Un élément peut être choisi plusieurs fois. La probabilité qu'aucun de ces 10 nombres ne soit un multiple de 4 est :
La probabilité de ne pas tirer un multiple de 4 est égale à $\dfrac{505}{673}$.
La probabilité qu'aucun des 10 nombres tirés ne soit un multiple de 4 est égale à $\left(\dfrac{505}{673}\right)^{10} \approx 0,057$.
Réponse A