

∞ Corrigé du baccalauréat Centres étrangers 14 mars 2023 ∞

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 5 points

Pour ce QCM, aucune justification n'est demandée. On en fournit quand même dans ce corrigé.

1. Réponse B.

F est dérivable sur \mathbb{R} , en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

F est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = e^x$

On a donc, pour tout réel x , $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$

$F = u' \times v + v' \times u$ donc, pour tout réel x , $F'(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur \mathbb{R} .

2. Réponse D.

Par lecture graphique : $f(x) < 0$ sur $]0 ; 1[$ et $f(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$.

D'après l'énoncé : le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse 3 donc $f'(x) > 0$ sur $]0 ; 3[$ et $f'(x) < 0$ sur $]3 ; +\infty[$.

D'après l'énoncé : le point d'abscisse 5 est le seul point d'inflexion, de plus, par lecture graphique, la fonction est concave puis convexe donc : $f''(x) < 0$ sur $]0 ; 5[$ et $f''(x) > 0$ sur $]5 ; +\infty[$.

Pour tout $x \in]5 ; +\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

3. Réponse D.

Pour tout réel positif t , $g(t) = \frac{a}{b + e^{-t}}$.

D'une part $g(0) = \frac{a}{b + e^0} = \frac{a}{b + 1} = 2$ donc $\frac{a}{b + 1} = 2 \iff a = 2(b + 1) = 2b + 2$.

D'autre part :

$\lim_{t \rightarrow +\infty} -t = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc, par composition, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$

d'où, par somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} b + e^{-t} = b$

et donc, par quotient $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a}{b + e^{-t}} = \frac{a}{b}$

d'où $\frac{a}{b} = 3 \Leftrightarrow a = 3b$

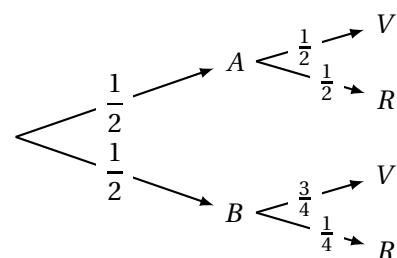
On a donc $a = 2b + 2 = 3b$ d'où $b = 2$ et $a = 3 \times 2 = 6$

4. Réponse C.

Soient :

- A l'évènement « Alice choisit l'urne A »
- B l'évènement « Alice choisit l'urne B »
- V l'évènement « Elle obtient une boule verte »
- R l'évènement « Elle obtient une boule rouge »

La situation peut être représentée à l'aide de l'arbre ci-dessous :



On cherche la probabilité $P_V(B)$.

$$P(V \cap B) = P(B) \times P_B(V) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

Les évènements A et B partitionnant l'univers, la loi des probabilités totales donne :

$$P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B) = P(A) \times P_A(V) + \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$P_V(B) = \frac{P(V \cap B)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}.$$

5. Réponse B.

On cherche l'algorithme qui permet de calculer la somme des 100 premiers termes de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{1}{n}$.

L'algorithme A. calcule chaque terme mais ils ne sont pas additionnés, ce n'est pas la réponse A.

L'algorithme C. initialise le compteur k , il ne peut donc pas comparer S à 100, l'algorithme ne fonctionne pas, ce n'est pas la réponse C.

L'algorithme D. initialise le compteur k à zéro mais il n'est pas incrémenté dans la boucle while, k faudra toujours 0 et l'algorithme ne s'arrête jamais, ce n'est donc pas l'algorithme D.

Par élimination, c'est donc l'algorithme B.

EXERCICE 2 6 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]-1,5 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x = \ln(2x+3) - 1 - x$.

1. $\lim_{x \rightarrow -1,5^+} 2x+3 = 0^+$ ($x > -1,5$ donc $2x+3 > 0$)

or $\lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow -1,5} \ln(2x+3) = -\infty$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -1,5} -1 - x = 0,5$ donc, par somme, $\lim_{x \rightarrow -1,5} g(x) = -\infty$.

2. g est dérivable sur $]-1,5 ; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.

g est de la forme $\ln(u) + v$ avec $u(x) = 2x-3$ et $v(x) = -1-x$. On a donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -1$.

$$g' = \frac{u'}{u} + v' \text{ donc, pour tout réel } x \in]-1,5 ; +\infty[, g'(x) = \frac{2}{2x+3} - 1 = \frac{2-2x-3}{2x+3} = \frac{-2x-1}{2x+3}.$$

Sur l'intervalle $]-1,5 ; +\infty[$, $2x+3$ est strictement positif donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $-2x-1$: $g'(x)$ est donc strictement positif sur l'intervalle $]-1,5 ; -0,5[$ et strictement négatif sur l'intervalle $]-0,5 ; +\infty[$.

g est donc strictement croissante sur l'intervalle $]-1,5 ; -0,5[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]-0,5 ; +\infty[$.

3. a. Sur l'intervalle $]-0,5 ; +\infty[$, la fonction g est une fonction continue (car dérivable) et strictement décroissante. D'où le tableau de variations :

x	-1,5	-0,5	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	$\approx 0,19$		
	$-\infty$		$-\infty$

$g(-0,5) = \ln(2 \times (-0,5) + 3) - 1 + 0,5 = \ln(2) - 0,5 \approx 0,19$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ (admis), donc 0 est une valeur intermédiaire entre $g(-0,5)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

En vertu du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-0,5 ; +\infty[$.

b. La calculatrice donne :

- $g(0,2) \approx 0,24$ et $g(0,3) \approx -0,02$ donc $0,2 < \alpha < 0,3$;
- $g(0,25) \approx 0,003$ et $g(0,26) \approx -0,002$ donc $0,25 \leq \alpha \leq 0,26$.

Partie B

1. f est croissante sur l'intervalle $]-1,5 ; +\infty[$ et donc en particulier sur l'intervalle $[-1 ; \alpha]$.

Donc $-1 \leq x \leq \alpha \implies f(-1) \leq f(x) \leq f(\alpha)$.

Or $g(\alpha) = 0 = f(\alpha) - \alpha$ donc $f(\alpha) = \alpha$ et $f(-1) = \ln(2 \times (-1) + 3) - 1 = \ln(1) - 1 = -1$

donc $-1 \leq f(x) \leq \alpha$, c'est à dire $f(x) \in [-1 ; \alpha]$.

2. a. *Initialisation* : à l'indice $n = 0$:

On a $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) = f(0) = \ln(3) - 1 \approx 0,099$ donc $-1 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$.

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que, pour un entier naturel n donné, l'inégalité $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ est vraie. Montrons que l'inégalité sera vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

$$\implies f(-1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha) \quad \text{car } f \text{ est croissante sur } [-1 ; \alpha]$$

$$\implies -1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha \quad \text{car } f(-1) = -1 \text{ et } f(\alpha) = \alpha$$

Si l'inégalité est vérifiée à l'indice n , alors, elle l'est aussi au rang suivant.

Conclusion : L'inégalité est vérifiée à l'indice 0 et sa véracité est héréditaire pour tout indice n naturel, donc, par principe de récurrence, on a $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ pour tout entier naturel n .

b. On vient d'établir que :

pour tout entier naturel n , $u_n \leq \alpha$ donc la suite est majorée par α

et pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite est croissante,

elle est donc convergente.

EXERCICE 3 6 points

1. a. Dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a les points suivants :

$H(0 ; 2 ; 2)$, $M(3 ; 0 ; 1)$ et $N(3 ; 1 ; 1)$.

b. On a $\overrightarrow{HM} = \begin{pmatrix} x_M - x_H \\ y_M - y_H \\ z_M - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (HM) est dirigée par \overrightarrow{HM} et elle passe par H , elle admet donc comme repré-

tation paramétrique :
$$\begin{cases} x = x_H + t x_{\overrightarrow{HM}} \\ y = y_H + t y_{\overrightarrow{HM}} \\ z = z_H + t z_{\overrightarrow{HM}} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ soit ici : } \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a les coordonnées suivantes :

$$B(2; 0; 0)$$

$$C(2; 2; 0)$$

$$F(2; 0; 2)$$

Le plan (BCF) est parallèle au plan yOz , son équation est donc de la forme $x = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ici on a donc $x = 2$

Cherchons le paramètre t tel qu'un point M_t de paramètre t dans la représentation de (HM) soit un point de (BCF) :

$$\begin{aligned} M_t \in (BCF) &\iff x_{M_t} = 2 \\ &\iff 3t = 2 \\ &\iff t = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

P est donc $M_{\frac{2}{3}}$ sur la droite (HM), il a donc comme coordonnées :

$$x_P = 2, y_P = 2 - 2 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \text{ et } z_P = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Cela confirme $P\left(2; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$

$$3. \quad \text{a. } \overrightarrow{PM} \begin{pmatrix} x_M - x_P \\ y_M - y_P \\ z_M - z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ 0 - \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et de même : } \overrightarrow{PN} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Comme le repère est orthonormé, on peut calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées :

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 1 \times 1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\text{b. } PM = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

c. On sait que $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = PM \times PN \times \cos(\widehat{MPN})$.

$$\text{On a donc } \frac{8}{9} = \frac{\sqrt{14}}{3} \times \frac{\sqrt{11}}{3} \times \cos(\widehat{MPN}).$$

$$\text{d'où } \cos(\widehat{MPN}) = \frac{8}{\sqrt{11}\sqrt{14}} \text{ soit } \widehat{MPN} \approx 50^\circ.$$

L'angle ne dépasse pas 55° , le toit peut donc être construit.

4. Les droites (EH) et (MN) sont parallèles donc les droites (HM) et (EN) sont coplanaires et non parallèles, elles sont donc sécantes.

$$\text{On a } \overrightarrow{EN} \begin{pmatrix} x_N - x_E \\ y_N - y_E \\ z_N - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La droite (EN) est dirigée par \overrightarrow{EN} et elle passe par E, elle admet donc comme représentation

$$\text{paramétrique : } \begin{cases} x = x_E + t x_{\overrightarrow{EN}} \\ y = y_E + t y_{\overrightarrow{EN}} \\ z = z_E + t z_{\overrightarrow{EN}} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ soit ici : } \begin{cases} x = 3t' \\ y = t' \\ z = 2 - t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

Pour trouver l'intersection des droites (EH) et (MN), il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 3t = 3t' \\ 2 - 2t = t' \\ 2 - t = 2 - t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ 2 - 2t = t \\ 2 - t = 2 - t \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ 2 = 3t \\ 0 = 0 \end{cases} \iff t = t' = \frac{2}{3}$$

Le point d'intersection est donc le point P.

EXERCICE 4 3 points

Vérifions d'abord la condition 1 portant sur la première phase.

Nous avons :

- une expérience à deux issues (le candidat est qualifié), le succès est « être qualifié », a une probabilité $p = 0,6$;
- cette expérience est répétée quatre fois (quatre candidats) de façon identique et indépendante, donc $n = 4$ répétitions;
- dans ce schéma de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et $p = 0,6$, on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Avec ces éléments, on peut dire que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4 ; 0,6)$.

La condition 1 « la deuxième phase doit avoir lieu dans 80% des cas » correspond à l'évènement « au moins deux candidats sont sélectionnés » a une probabilité supérieure ou égale à 0,8 (c'est à dire correspond à $P(X \geq 2) \geq 0,8$).

Avec la calculatrice : $P(X \geq 2) \approx 0,821$.

On a donc bien : $P(X \geq 2) \geq 0,8$, la condition 1 est donc vérifiée.

Pour la condition 2 :

Soit T la variable aléatoire donnant la durée de la deuxième phase.

Les valeurs prises par T sont : 0, 5, 9 et 11.

La deuxième phase dure 11 minutes lorsque quatre candidats sont sélectionnés donc

$$P(T = 11) = P(X = 4) = \binom{4}{4} \times 0,6^4 \times 0,4^0 = 0,6^4 = 0,1296.$$

De même :

$$P(T = 9) = P(X = 3) = \binom{4}{3} \times 0,6^3 \times 0,4^1 = 0,3456.$$

$$P(T = 5) = P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,6^2 \times 0,4^2 = 0,3456.$$

$$P(T = 0) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{4}{0} \times 0,6^0 \times 0,4^4 + \binom{4}{1} \times 0,6^1 \times 0,4^3 = 0,0256 + 0,1536 = 0,1792$$

On peut résumer les résultats dans le tableau de la loi de probabilité de la loi T :

t_i	0	5	9	11
$P(T = t_i)$	0,1792	0,3456	0,3456	0,1296

La durée moyenne du jeu correspond à l'espérance de la variable aléatoire T .

$$E(T) = 0 \times P(T = 0) + 5 \times P(T = 5) + 9 \times P(T = 9) + 11 \times P(T = 11)$$

$$E(T) = 0 + 5 \times 0,3456 + 9 \times 0,3456 + 11 \times 0,1296 = 6,264$$

La durée moyenne du jeu est donc supérieur à 6 minutes, la deuxième condition n'est pas vérifiée, le jeu ne peut donc pas être retenu.