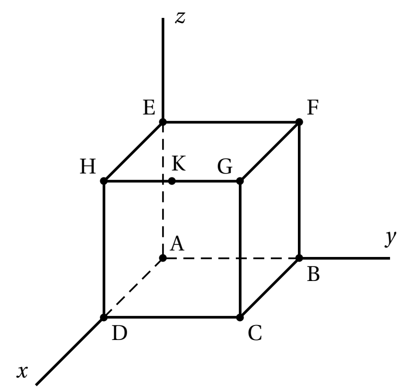
∽ Corrigé du Baccalauréat Nouvelle-Calédonie ∽
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ - 29 août 2023 Jour 2

EXERCICE 1 5 points

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-contre.
On note K le milieu du segment [HG].
On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



1. Les points C, F et K définissent un plan si et seulement si ils ne sont pas alignés.

   - $\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AB}}$ donc le point C a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.
   - $\overrightarrow{\text{AF}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AE}}$ donc le point F a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.
   - $\overrightarrow{\text{AH}} = \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AE}}$ donc le point H a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

     $\overrightarrow{\text{AG}} = \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AE}}$ donc le point G a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

     K est le milieu de [HG] donc il a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{x_{\text{H}}+x_{\text{G}}}{2}\\\frac{y_{\text{H}}+y_{\text{G}}}{2}\\\frac{z_{\text{H}}+z_{\text{G}}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1+1}{2}\\\frac{0+1}{2}\\\frac{1+1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{\text{CF}}$ et $\overrightarrow{\text{CK}}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}x_{\text{F}}-x_{\text{C}}\\y_{\text{F}}-y_{\text{C}}\\z_{\text{F}}-z_{\text{C}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x_{\text{K}}-x_{\text{C}}\\y_{\text{K}}-y_{\text{C}}\\z_{\text{K}}-z_{\text{C}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$.

   Donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{CF}}$ et $\overrightarrow{\text{CK}}$ ne sont pas colinéaires donc les points C, F et K ne sont pas alignés, et donc ces trois points définissent un plan.

2. **a.** $\text{KG} = \frac{1}{2}$, GF = 1 et GC = 1.

   b. Le triangle FGC est rectangle en G donc son aire vaut en unités d'aire :
   $\mathscr{A} = \dfrac{\text{GF} \times \text{GC}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

c. Le tétraèdre FGCK a pour base le triangle FGC et pour hauteur KG donc son volume vaut, en unité de volume : $\dfrac{1}{3} \times \mathscr{A} \times \text{KG} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$.

3. **a.** On note $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{CF}} = 1 \times (-1) + 2 \times 0 + 1 \times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\text{CF}}$.
- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{CK}} = 1 \times 0 + 2 \times (-\frac{1}{2}) + 1 \times 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\text{CK}}$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (CFK) donc c'est un vecteur normal au plan (CFK).

b. Le plan (CFK) est l'ensemble des points M de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{\text{CM}}$ et $\overrightarrow{n}$ soient orthogonaux, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\text{CM}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

$\overrightarrow{\text{CM}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{CM}} \cdot \overrightarrow{n} = 0 &\iff (x-1) \times 1 + (y-1) \times 2 + z \times 1 = 0\\ &\iff x - 1 + 2y - 2 + z = 0 \iff x + 2y + z - 3 = 0\end{aligned}$$

Le plan (CFK) a donc pour équation cartésienne $x + 2y + z - 3 = 0$.

4. On note Δ la droite passant par le point G et orthogonale au plan (CFK).

La droite Δ est orthogonale au plan (CFK) donc elle a $\overrightarrow{n}$ pour vecteur directeur. De plus, elle passe par le point G de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Donc la droite Δ est l'ensemble des points M de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{\text{GM}}$ et $\overrightarrow{n}$ soient colinéaires, autrement dit tels que $\overrightarrow{\text{GM}} = t \cdot \overrightarrow{n}$ où $t \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{\text{GM}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{\text{GM}} = t \cdot \overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& t \times 1\\ y-1 &=& t \times 2\\ z-1 &=& t \times 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1+2t\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$$

Donc la droite Δ a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1+2t\\ z &=& 1+t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.

5. Soit L le point d'intersection entre la droite Δ et le plan (CFK).

a. Les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ du point L sont solutions du système $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1+2t\\ z &=& 1+t\\ x+2y+z-3 &=& 0\end{array}\right.$.

On a donc : $(1+t)+2(1+2t)+(1+t)-3=0$ soit $1+t+2+4t+1+t-3=0$, ou encore $6t+1=0$, soit $t=-\frac{1}{6}$.

Le point L a donc pour coordonnées : $\left\{\begin{array}{l c l c l c l} x &=& 1+t &=& 1-\frac{1}{6} &=& \frac{5}{6}\\ y &=& 1+2t &=& 1-\frac{2}{6} &=& \frac{2}{3}\\ z &=& 1+t &=& 1-\frac{1}{6} &=& \frac{5}{6}\end{array}\right.$

b. $\text{LG}=\sqrt{(x_{\text{G}}-x_{\text{L}})^2+\left(y_{\text{G}}-y_{\text{L}}\right)^2+(z_{\text{G}}-z_{\text{L}})^2}=\sqrt{\left(1-\dfrac{5}{6}\right)^2+\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{5}{6}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{36}}=\sqrt{\dfrac{6}{36}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

6. Le tétraèdre FGCK a pour base le triangle CFK d'aire $\mathscr{B}$, et pour hauteur LG.

Son volume vaut donc : $\dfrac{1}{3}\times\mathscr{B}\times\text{LG}$. Ce volume vaut $\dfrac{1}{12}$ donc on a :

$\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{B}\times\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ donc $\dfrac{1}{12}=\dfrac{\sqrt{6}}{18}\times\mathscr{B}$ donc $\dfrac{18}{12\sqrt{6}}=\mathscr{B}$ donc $\mathscr{B}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

L'aire du triangle CFK est, en unité d'aire : $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

EXERCICE 2 5 points

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par : $f(x)=x\,\text{e}^{-x}$.

1. $f(x)=x\,\text{e}^{-x}=\dfrac{x}{\text{e}^{x}}$. Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\text{e}^{x}}{x}=+\infty$; donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\text{e}^{x}}=0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.
   On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ d'équation $y=0$; c'est l'axe des abscisses.
2. Pour tout réel x appartenant à $[0~;~+\infty[$: $f'(x)=1\times\,\text{e}^{-x}+x\times(-1)\,\text{e}^{-x}=(1-x)\,\text{e}^{-x}$.
3. Pour tout réel x, $\text{e}^{-x}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(1-x)$ sur $[0~;~+\infty[$.
   On étudie le signe de $f'(x)$ sur $[0~;~+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

$f(0)=0$; $f(1)=\text{e}^{-1}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.
On dresse le tableau de variations de f sur $[0~;~+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

4. $\mathrm{e}^{-1} \approx 0,369 > \frac{367}{1000}$

- Sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, la fonction f est continue et strictement croissante ; elle va de 0 à $\mathrm{e}^{-1} > 0,367$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,367$ admet une solution unique sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante ; elle va de $\mathrm{e}^{-1} > 0,367$ à 0. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,367$ admet une solution unique sur cet intervalle.

L'équation $f(x) = \frac{367}{1000}$ admet donc deux solutions sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

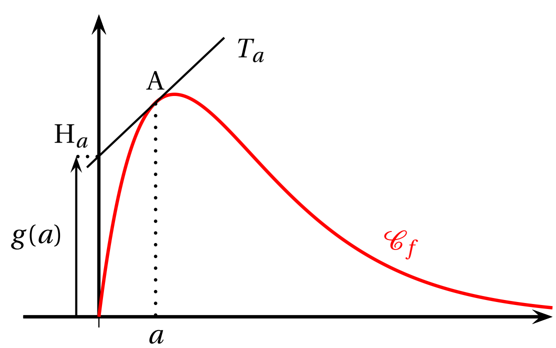
5. On admet que pour tout x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$: $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-2)$.

Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on étudie le signe de $f''(x)$.

x	0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
		f est concave		f est convexe	

On peut même préciser que la courbe admet le point d'abscisse 2 comme point d'inflexion.

6. Soit a un réel appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ et A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
On note T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.
On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.
On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a.
La situation est représentée sur la figure ci-contre.



a. La tangente T_a a pour équation :

$$\begin{aligned} y = f'(a)(x-a) + f(a) &\iff y = (1-a)\,\mathrm{e}^{-a}(x-a) + a\,\mathrm{e}^{-a}\\ &\iff y = [(1-a)\,\mathrm{e}^{-a}]\,x - (1-a)\,\mathrm{e}^{-a}a + a\,\mathrm{e}^{-a}\\ &\iff y = [(1-a)\,\mathrm{e}^{-a}]\,x - a\,\mathrm{e}^{-a} + a^2\,\mathrm{e}^{-a} + a\,\mathrm{e}^{-a}\\ &\iff y = [(1-a)\,\mathrm{e}^{-a}]\,x + a^2\,\mathrm{e}^{-a}\end{aligned}$$

b. $g(a)$ est l'ordonnée du point H_a de la tangente d'abscisse 0 ; donc
$g(a) = [(1-a)\,\mathrm{e}^{-a}] \times 0 + a^2\,\mathrm{e}^{-a} = a^2\,\mathrm{e}^{-a}$.

c. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.
$g'(x) = 2x \times \mathrm{e}^{-x} + x^2 \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = -x(x-2)\,\mathrm{e}^{-x}$

x	0		2		$+\infty$
$-x$	0	$-$	|	$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$	|	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

D'après le tableau de signes de $g'(x)$, la fonction g est croissante puis décroissante; elle admet un maximum pour $x = 2$, ce qui correspond au point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 3 5 points

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{-u_n - 4}{u_n + 3}$.

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. $u_1 = \dfrac{-u_0 - 4}{u_0 + 3} = \dfrac{0-4}{0+3} = -\dfrac{4}{3}$

   $u_2 = \dfrac{-u_1 - 4}{u_1 + 3} = \dfrac{-\left(-\frac{4}{3}\right) - 4}{-\frac{4}{3} + 3} = \dfrac{\frac{4}{3} - \frac{12}{3}}{-\frac{4}{3} + \frac{9}{3}} = \dfrac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{8}{5}$
2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python; on la complète de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n.

```
def terme (n) :
    u = 0
    for i in range(n):
       u = (-u - 4) / (u + 3)
    return(u)
```

3. Soit la fonction f définie sur $]-3\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{-x-4}{x+3}$.

   f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition donc sur $]-3\ ;\ +\infty[$.

   Sur $]-3\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{-1(x+3) - (-x-4) \times 1}{(x+3)^2} = \dfrac{-x-3+x+4}{(x+3)^2} = \dfrac{1}{(x+3)^2} > 0$; donc la fonction f est strictement croissante sur $]-3\ ;\ +\infty[$.
4. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

   - **Initialisation**

     Pour $n = 0$, on a : $u_n = u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_1 = -\frac{4}{3}$; donc on a; $-2 < u_1 \leqslant u_0$.

     La propriété est vraie au rang 0.
   - **Hérédité**

     On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire : $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$; c'est l'hypothèse de récurrence.

Comme $-3 < -2$ et que $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$, on se place ans l'intervalle $]-3\ ;\ +\infty[$.
Sur cet intervalle, la fonction f est strictement croissante donc :

$-2 < u_{n+1} \leqslant u_n \implies f(-2) < f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$

$f(-2) = \dfrac{-(-2)-4}{-2+3} = -2$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$

Donc $f(-2) < f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ équivaut à $-2 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

On a donc démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour $n \geqslant 0$. D'après le principe de récurrence, on peut dire qu'elle est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, on a donc : $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

5. On a vu que :

- pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante ;
- pour tout n, $-2 < u_n$ donc la suite (u_n) est minorée.

D'après le théorème de la convergence monotone, on peut en déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$.

On remarque que, pour tout n, $u_n > -2$ entraîne $u_n + 2 > 0$ donc $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$ existe pour tout n et est strictement positive (donc non nulle).

a. $v_0 = \dfrac{1}{u_0+2} = \dfrac{1}{0+2} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

b. $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}+2} = \dfrac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+2} = \dfrac{1}{\frac{-u_n-4+2u_n+6}{u_n+3}} = \dfrac{u_n+3}{u_n+2}$

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n+3}{u_n+2} - \dfrac{1}{u_n+2} = \dfrac{u_n+2}{u_n+2} = 1$

Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 0,5$.

c. La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $v_0 = 0,5$ donc, pour tout n, $v_n = v_0 + n \times r = 0,5 + n$.

$v_n = \dfrac{1}{u_n+2} \iff \dfrac{1}{v_n} = u_n + 2 \iff u_n = \dfrac{1}{v_n} - 2$ donc $u_n = \dfrac{1}{n+0,5} - 2$, pour tout n.

d. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+0,5) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+0,5} = 0$, et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -2$.

EXERCICE 4 5 points

L'énoncé ci-dessous est commun aux questions 1. et 2.

Les 200 adhérents d'un club sont des filles ou des garçons. Ces adhérents pratiquent l'aviron ou le basket selon la répartition figurant dans le tableau ci-dessous.

	Aviron	**Basket**	**Total**
Filles	25	80	105
Garçons	50	45	95
Total	75	125	200

On choisit un adhérent au hasard et on considère les évènements suivants :

F : l'adhérent est une fille ;
A : l'adhérent pratique l'aviron.

1. La probabilité de F sachant A est égale à :

a. $\dfrac{25}{100}$ **b.** $\dfrac{25}{75}$ **c.** $\dfrac{25}{105}$ **d.** $\dfrac{75}{105}$

Il y a 75 adhérents pratiquant l'aviron dont 25 filles ; la probabilité de F sachant A est donc $\dfrac{25}{75} = \dfrac{1}{3}$!

Réponse b.

2. La probabilité de l'évènement $A \cup F$ est égale à :

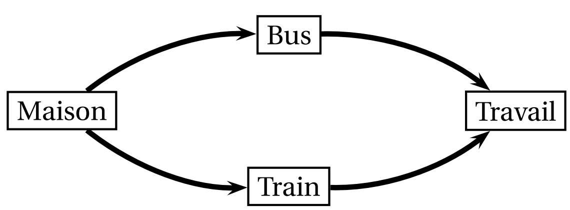
a. $\dfrac{9}{10}$ **b.** $\dfrac{1}{8}$ **c.** $\dfrac{31}{40}$ **d.** $\dfrac{5}{36}$

Sur 200 adhérents, il y en a $80+25+50 = 155$ qui sont des filles ou qui pratiquent l'aviron. La probabilité de $A \cup F$ est donc $\dfrac{155}{200} = \dfrac{31}{40}$.

Réponse c.

L'énoncé ci-dessous est commun aux questions 3. et 4.

Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train.



La probabilité que le bus soit en panne est égale à b. La probabilité que le train soit en panne est égale à t. Les pannes de bus et de train surviennent de façon indépendante.

3. La probabilité p_1 que le bus ou le train soient en panne est égale à :

a. $p_1 = bt$ **b.** $p_1 = 1 - bt$ **c.** $p_1 = b + t$ **d.** $p_1 = b + t - bt$

On appelle B l'événement : « le bus est en panne » et T l'événement « le train est en panne » .
Les pannes de bus et de train surviennent de façon indépendante donc
$P(B \cap T) = P(B) \times P(T) = bt$.
$p_1 = P(B \cup T) = P(B) + P(T) - P(B \cap T) = b + t - bt$.

Réponse d.

4. La probabilité p_2 que Albert puisse se rendre à son travail est égale à :

a. $p_2 = bt$ **b.** $p_2 = 1 - bt$ **c.** $p_2 = b + t$ **d.** $p_2 = b + t - bt$

Pour que Albert puisse se rendre à son travail, il ne faut pas que le bus et le train soient en panne en même temps. Autrement dit, on cherche la probabilité du contraire de $B \cap T$ donc la probabilité de $\overline{B \cap T}$.
$p_2 = P\left(\overline{B \cap T}\right) = 1 - P(B \cap T) = 1 - bt$

Réponse b.

5. On considère une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir FACE est égale à x. On lance la pièce n fois. Les lancers sont indépendants.

La probabilité p d'obtenir au moins une fois FACE sur les n lancers est égale à

a. $p = x^n$ **b.** $p = (1 - x)^n$ **c.** $p = 1 - x^n$ **d.** $p = 1 - (1 - x)^n$

La probabilité d'obtenir zéro fois FACE est la probabilité de n'obtenir que des PILE, soit $(1 - x)^n$. Donc la probabilité d'obtenir au moins une fois FACE est $1 - (1 - x)^n$.

Réponse d.