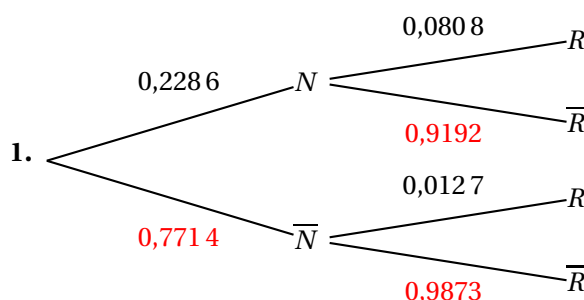


Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

1 Exercice 1

5 points



2. On calcule $p(N \cap R) = p(N) \times p_N(R) = 0,2286 \times 0,0808 = 0,018471$ soit 0,0185 à 10^{-4} près.

3. On a de même $p(\overline{N} \cap R) = p(\overline{N}) \times p_{\overline{N}}(R) = 0,7714 \times 0,0127 = 0,009797$ soit 0,0098 à 10^{-4} près.

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(R) = p(N \cap R) + p(\overline{N} \cap R) \approx 0,0185 + 0,0098$$

$$p(R) \approx 0,0283.$$

4. On a $p_R(N) = \frac{p(R \cap N)}{p(R)} = \frac{p(N \cap R)}{p(R)} \approx \frac{0,0185}{0,0283} \approx 0,65371$ soit 0,6537 à 10^{-4} près.

Partie I

1. X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 500, p = 0,65)$.

2. On calcule $\binom{500}{325} \times 0,65^{325} \times 0,35^{175} \approx 0,037384$ soit 0,0374 à 10^{-4} près. (Utiliser la fonction binomiale de la calculatrice si les capacités de calcul de celle-ci sont dépassées).

3. On a $p(X \geq 325) = 1 - p(X \leq 324)$ soit d'après la calculatrice 0,47944, donc $p(X \geq 325) \approx 1 - 0,4794 = 0,5206$ à 10^{-4} près.

Partie II

1. On a $p_n = (1 - 0,65)^n = 0,35^n$.

2. On a $q_n = 1 - p_n$.

On cherche donc n tel que $1 - p_n \geq 0,9999 \iff p_n \leq 0,0001$, soit par croissance de la fonction logarithme népérien :

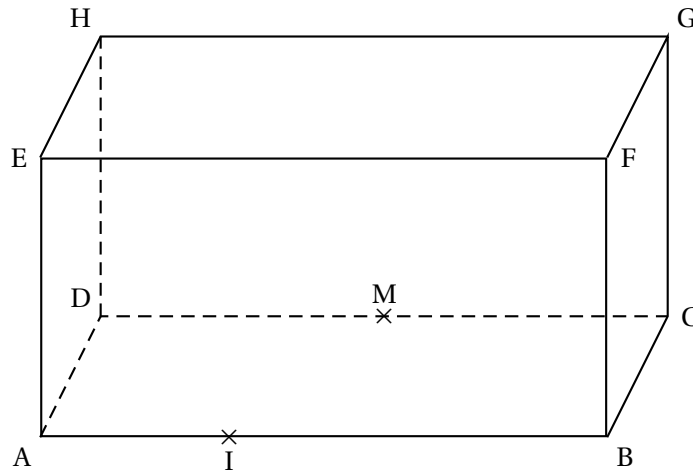
$$n \ln 0,35 \leq \ln 0,0001 \iff n \geq \frac{\ln 0,0001}{\ln 0,35} \text{ car } \frac{1}{\ln 0,35} < 0.$$

$$\text{D'après la calculatrice } \frac{\ln 0,0001}{\ln 0,35} \approx 8,8.$$

Il faut prendre au minimum $n = 9$.

2 Exercice 2**5 points**

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que $AB = 3$ et $AD = AE = 1$ représenté ci-dessous.



1. $F(3; 0; 1)$, $H(0; 1; 1)$, $M(1,5; 1; 0)$.

2. a. Soit $\overrightarrow{HF} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MF} \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires.

On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{HF} = 6 - 6 + 0 = 0$

On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MF} = 3 - 6 + 3 = 0$.

Conclusion : le vecteur \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMF), il est donc normal à ce plan.

b. On sait qu'alors :

$$X(x; y; z) \in (\text{MHF}) \iff 2x + 6y + 3z + d = 0. \text{ Ainsi par exemple :}$$

$$H(x; y; z) \in (\text{MHF}) \iff 0 + 6 + 3 + d = 0 \iff d = -9, \text{ donc finalement :}$$

$$X(x; y; z) \in (\text{MHF}) \iff 2x + 6y + 3z - 9 = 0.$$

c. Le plan \mathcal{P} a par exemple pour vecteur normal $\vec{p} \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$ et ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur \vec{n} , (on a bien $2 \times \frac{5}{2} = 5$, $6 \times \frac{5}{2} = 15$, mais $3 \times \frac{5}{2} \neq -3$) donc les deux plans ne sont pas parallèles.

3. On a $D(0; 1; 0)$ et $G(3; 1; 1)$, d'où $\overrightarrow{DG} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On sait que :

$$X(x; y; z) \in (\text{DG}) \iff \overrightarrow{DX} = t\overrightarrow{DG}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x-0 = 3t \\ y-1 = 0 \\ z-0 = 1t \end{cases} t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

4. Si la droite coupe le plan en un point N, les coordonnées de ce point vérifient les équations de la droite et celle du plan soit le système :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 2x + 6y + 3z - 9 = 0 \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$$6t + 6 + 3t - 9 = 0 \iff 9t - 3 = 0 \iff 3t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{3}. \text{ Les coordonnées de N sont donc } (3 \times \frac{1}{3}; 1; \frac{1}{3}), \text{ soit } N(1; 1; \frac{1}{3}).$$

5. • On vérifie d'abord que R appartient au plan (HMF) :

$$R(3; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}) \in (\text{HMF}) \iff 6 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 9 = 0 \iff 6 + 3 - 9 = 0 \text{ ce qui est vrai.}$$

- On vérifie maintenant que le vecteur \overrightarrow{GR} est bien un vecteur normal au plan (HMF) :

$$\text{On a } \overrightarrow{GR} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ \frac{1}{4}-1 \\ \frac{1}{2}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ Or ce vecteur n'est manifestement pas colinéaire au vec-}$$

teur connu $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$: pour que \vec{n} soit colinéaire au vecteur \overrightarrow{GR} il faudrait que sa première coordonnée soit égale à 0, ce qui n'est pas le cas.

Conclusion : le point R n'est pas le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF).

3 Exercice 3

6 points

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. Le trinôme $g(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} , donc sur $[0; 1]$ et sur cet intervalle :

$$g'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x).$$

Or on sait que $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -x \leq 0 \leq 1 - x$ ou en lisant de droite à gauche

$1 - x \geq 0 \Rightarrow 2(1 - x) \geq 0 \iff g'(x) \geq 0$: la dérivée étant positive sur $[0; 1]$ et ne s'annulant qu'en $x = 1$, la fonction g est strictement croissante de $g(0) = 0$ à $g(1) = 2 - 1^2 = 1$.

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= g(u_n) \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

2. • $u_1 = 2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75;$
 • $u_2 = 2 \times \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} - \frac{9}{16} = \frac{24}{16} - \frac{9}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375.$

3. Démonstration par récurrence :

• *Initialisation* :

On a $0 < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$, soit $0 < u_0 < u_1 < 1$: l'encadrement est vrai au rang zéro.

• *Hérédité* : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

Alors par stricte croissance sur $[0; 1]$ de la fonction g , on a :

$g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1)$, soit d'après les résultats précédents :

$0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$: l'encadrement est encore vrai au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang $n=0$ et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est encore au rang $n+1$: par le principe de récurrence, on a donc

Pour tout entier naturel n , $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

4. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est majorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \leq 1$.

5. La relation $g(u_n) = u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$ donne à la limite car g est continue car dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$: $\ell = 2\ell - \ell^2 \iff$

$\ell - \ell^2 = 0 \iff \ell(1 - \ell) = 0$ soit

$$\begin{cases} \ell &= 0 \text{ ou} \\ 1 - \ell &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ell &= 0 \text{ ou} \\ 1 &= \ell \end{cases}$$

La solution $\ell = 0$ n'est pas possible (la suite est croissante) ; il reste $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(1 - u_{n+1}) = \ln[1 - (2u_n - u_n^2)] = \ln(1 - 2u_n + u_n^2) = \ln(1 - u_n)^2 = 2\ln(1 - u_n)$ (car $1 - u_n > 0$ voir la récurrence ci-dessus, donc $\ln(1 - u_n)$ existe). Or $\ln(1 - u_n) = v_n$.

Finalement : $v_{n+1} = 2v_n$ ce qui montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \ln(1 - u_0) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$.

7. On sait qu'alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n$, soit $v_n = -\ln 2 \times 2^n$.

8. La relation $v_n = \ln(1 - u_n)$ donne donc :

$-\ln 2 \times 2^n = \ln(1 - u_n) \iff e^{-\ln 2 \times 2^n} = e^{\ln(1 - u_n)}$, (par croissance de la fonction exponentielle), soit encore :

$$e^{-\ln 2 \times 2^n} = 1 - u_n \iff u_n = 1 - e^{-\ln 2 \times 2^n}.$$

Or on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln 2 \times 2^n = -\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\ln 2 \times 2^n} = 0$ et par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

9.

```

def seuil() :
    n=0
    u=0.5
    while u < 0.95 :
        n=n + 1
        u=2*u - u**2
    return n

```

4 Exercice 4

4 points

$$f(x) = a \ln(x).$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. On a $f(x) = 0 \iff a \ln x = 0 \iff \ln x = 0$ (car $a \neq 0$) et par croissance de la fonction exponentielle $e^{\ln x} = e^0 \iff x = 1$.

2. F est une différence de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, donc sur cet intervalle :

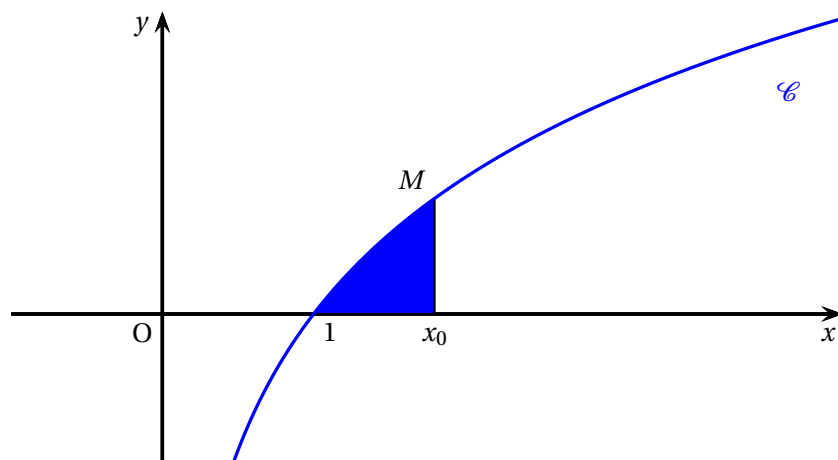
$$F'(x) = a \left[\ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \right] = a[\ln(x) + 1 - 1] = a \ln(x) = f(x), \text{ ce qui montre que } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur }]0; +\infty[.$$

3. On a vu que \mathcal{C} coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ donc la surface bleue correspond à des points où $x \geq 1$, soit $\ln(x) \geq 0 \Rightarrow a \ln(x) \geq 0$.

Autrement dit pour $x \geq 1$, la fonction f est positive et on sait que sur un intervalle $[1; x_0]$ avec $x_0 \geq 1$, l'aire de la surface limitée par sa courbe représentative, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$ est égale à l'intégrale :

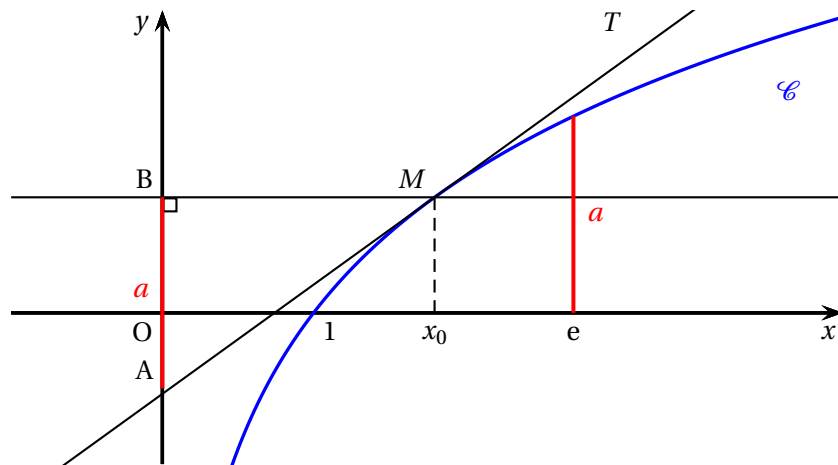
$$\int_1^{x_0} f(x) dx = [F(x)]_1^{x_0} = F(x_0) - F(1) = a[x_0 \ln(x_0) - x_0] - a[1 \ln(1) - 1] = .$$

l'aire bleutée est en unités d'aire : $a[x_0 \ln(x_0) - x_0] + a = a[x_0 \ln(x_0) - x_0 + 1]$.



On note T la tangente à la courbe \mathcal{C} au point M d'abscisse x_0 .

On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. On sait (équation de la tangente au point d'abscisse x_0) que :

$$M(x; y) \in T \iff y - f(x_0) = f'(x - x_0).$$

- $f(x_0) = a \ln x_0$;
- f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sur cet intervalle $f'(x) = \frac{a}{x}$, donc $f'(x_0) = \frac{a}{x_0}$.

On obtient donc :

$$M(x; y) \in T \iff y - a \ln x_0 = \frac{a}{x_0} \times (x - x_0) \iff y = a \ln x_0 + \frac{ax}{x_0} - a.$$

En particulier T coupe l'axe des ordonnées si $x = 0$, d'où $y = a \ln x_0 - a$ (ordonnée de A).

L'ordonnée de B est égale à $f(x_0) = a \ln(x_0)$.

On a $AB = |y_B - y_A| = |a \ln(x_0) - (a \ln x_0 - a)| = |a| = a$ (car $a > 0$).

Remarque : On a $f(e) = a \ln e = a \times 1 = a$.

$f(e) = a$: on a mis en évidence ceci sur le dessin ; le corollaire est que la tangente à la courbe au point d'abscisse e contient l'origine O !