Corrigé du baccalauréat Métropole Antilles-Guyane

12 septembre 2024 – Jour 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 — 5 points

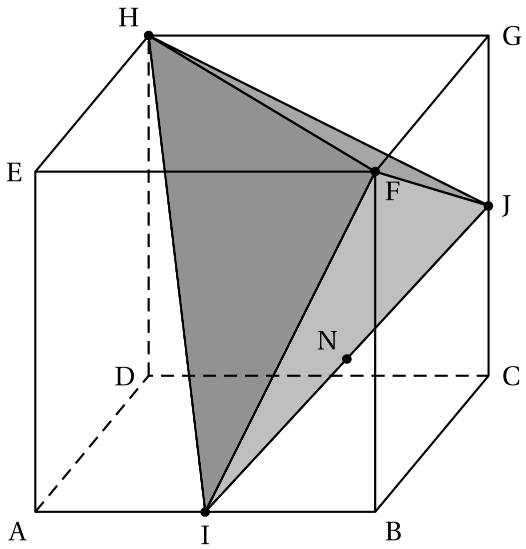
On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CG].

Le point N est le milieu du segment [IJ].

L'objectif de cet exercice est de calculer le volume du tétraèdre HFIJ.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.



1. **a.** A(0 ; 0 ; 0) et B(1 ; 0 ; 0) donc I(0,5 ; 0 ; 0) ;

C(1 ; 1 ; 0) et G(1 ; 1 ; 1) donc J(1 ; 1 ; 0,5).

Donc N(0,75 ; 0,5 ; 0,25).

b. $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1-0,5\\1-0\\0,5-0\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0,5\\1\\0,5\end{pmatrix}$.

De même avec F(1 ; 0 ; 1), $\overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}1-0,5\\0-0,5\\1-0,25\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}0,25\\0-0,5\\0,75\end{pmatrix}$.

c. On calcule le produit scalaire des deux vecteurs précédents :

$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{NF} = 0,125-0,5+0,375 = 0$: le produit scalaire est nul, les deux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{NF}$ sont orthogonaux.

On admet que $NF = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

d. On a $IJ^2 = 0{,}5^2 + 1^2 + 0{,}5^2 = 1{,}5 = \dfrac{3}{2} = \dfrac{6}{4}$, d'où $IJ = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

On a démontré que la droite (NF) est perpendiculaire à la droite (IJ) : la droite (FN) est donc la hauteur issue de N dans le triangle FIJ.

L'aire de ce triangle est donc égale à $\dfrac{IJ \times FN}{2} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{14}}{4}}{2} = \dfrac{\sqrt{21}}{8}$.

2. On considère le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

a. On a $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{IJ} = 2 - 1 - 1 = 0$. D'autre part $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{NF} = 1 + 0{,}5 - 1{,}5 = 0$, donc le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan FIJ (car la droite (NF) est perpendiculaire à la droite (IJ)) : il est donc normal à ce plan.

b. On sait que les coordonnées du vecteur normal au plan sont les coefficients respectifs de x, y et z dans l'équation de celui-ci :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (FIJ) \iff 4x - y - 2z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Ainsi par exemple : $F(1\,;\,0\,;\,1) \in (FIJ) \iff 4 - 0 - 2 + d = 0 \iff d = -2$.

Conclusion : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (FIJ) \iff 4x - y - 2z - 2 = 0$

c. La droite d a donc pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}$ et contient le point H. Ses équations paramétriques s'obtiennent en traduisant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{u}$: avec $H(0;1;\,1)$,

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d) \iff \overrightarrow{HM} = t\,\overrightarrow{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-0 &=& 4t\\ y-1 &=& -t\\ z-1 &=& -2t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4t\\ y &=& 1-t\\ z &=& 1-2t\end{array}\right.$$

d. La droite d est perpendiculaire au plan (FIJ) en un point K dont les coordonnées vérifient les équations de d et celle de (FIJ) soit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4t\\ y &=& 1-t\\ z &=& 1-2t\\ 4x-y-2z-2 &=& 0\end{array}\right.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$4 \times 4t - (1-t) - 2(1-2t) - 2 = 0 \iff 16t - 1 + t - 2 + 4t - 2 = 0 \iff 21t - 5 = 0 \iff t = \dfrac{5}{21}$.

Les coordonnées de K sont donc : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4 \times \frac{5}{21}\\ y &=& 1 - \frac{5}{21}\\ z &=& 1 - 2 \times \frac{5}{21}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{20}{21}\\ y &=& \frac{16}{21}\\ z &=& \frac{11}{21}\end{array}\right.$

La distance de H au plan (FIJ) est donc égale à HK et avec $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix}\frac{20}{21}\\-\frac{5}{21}\\-\frac{10}{21}\end{pmatrix}$,

$HK^2 = \left(\frac{20}{21}\right)^2 + \left(-\frac{5}{21}\right)^2 + \left(-\frac{10}{21}\right)^2 = \frac{400+25+100}{21^2} = \frac{525}{21^2} = \frac{25 \times 21}{21^2}$, donc

$HK = \dfrac{5\sqrt{21}}{21}$.

e. D'après la question précédente [HK] est la hauteur relative à la base (FIJ) du tétraèdre HFIJ, donc le volume de celui-ci est :

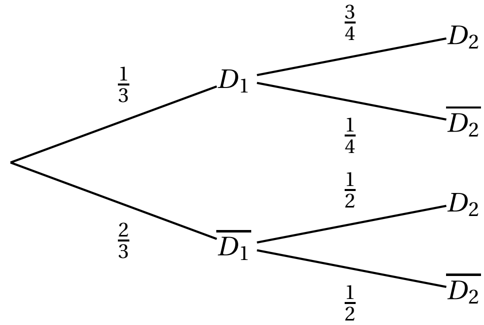
$$V = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}(FIJ) \times HK = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{8} \times \frac{5\sqrt{21}}{21} = \frac{5 \times 3 \times 7}{3 \times 8 \times 21} = \frac{5}{24}.$$

Exercice 2 — 5 points

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. On complète l'arbre pondéré suivant :



2. On a $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$.

3. De la même façon $P\left(\overline{D_1} \cap D_2\right) = P\left(\overline{D_1}\right) \times P_{\overline{D_1}}(D_2) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

   D'après la loi des probabilités totales :

   $p_2 = P(D_2) = P(D_1 \cap D_2) + P\left(\overline{D_1} \cap D_2\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3+4}{3 \times 4} = \dfrac{7}{12}$.

4. On a d'abord $p\left(\overline{D_2}\right) = 1 - p(D_2) = 1 - \dfrac{7}{12} = \dfrac{5}{12}$.

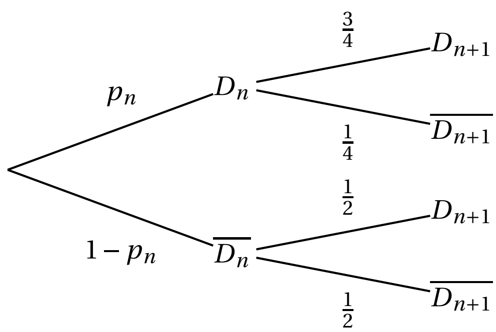
   Il faut calculer la probabilité conditionnelle :

   $$p_{\overline{D_2}}(D_1) = \frac{p\left(\overline{D_2} \cap D_1\right)}{p\left(\overline{D_2}\right)} = \frac{p\left(D_1 \cap \overline{D_2}\right)}{p\left(\overline{D_2}\right)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Partie B : étude de la suite (p_n).

1. $$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

   On reprend l'arbre initial en partant de la branche D_n pondérée par le nombre p_n et la branche $\overline{D_n}$ pondérée par $1 - p_n$, soit :



   Toujours d'après la loi des probabilités totales :

   $$p_{n+1} = P(D_{n+1}) = P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) + P(\overline{D_n}) \times P_{\overline{D_n}}(D_{n+1}) = p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2}$$
   $$= \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

2. **a.** On montre par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}.$$

Initialisation : on a $p_1 = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $p_2 = \frac{7}{12}$ et $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$.

On a $\frac{4}{12} < \frac{7}{12} < \frac{8}{12}$, soit $p_1 < p_2 < \frac{2}{3}$: l'encadrement est vrai au rang 1.

Hérédité : soit n un naturel avec $n \geqslant 1$ et supposons que $p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}$; comme $\frac{1}{4} > 0$, on a donc par produit :

$\frac{1}{4}p_n \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$, soit $\frac{1}{4}p_n \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{6}$ et, en ajoutant à chaque membre $\frac{1}{2}$:

$\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$, soit d'après la relation de récurrence démontrée à la question **1.** : $p_{n+1} < p_{n+2} < \frac{2}{3}$.

La relation est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie au rang n au moins égal à 1, elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_n < p_{n+1} < \frac{2}{3}$.

b. Le résultat précédent montre que la suite est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$: d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge donc vers un nombre réel inférieur ou égal à $\frac{2}{3}$.

3. **a.** Quel que soit $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n + \frac{3}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6}$

$$= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{4}{6}\right) = \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}u_n.$$

La relation $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n$, avec $n \geqslant 1$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

b. On sait que pour $n \geqslant 1$, $\quad u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = p_n - \frac{2}{3} = 0$ et finalement : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{3}$.

Conclusion : sur un grand nombre de déplacements du robot celui-ci se dirigera en moyenne deux fois sur trois à droite et donc une fois sur trois à gauche.

Partie C

La variable aléatoire X égale au nombre de déplacements vers la droite suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$.

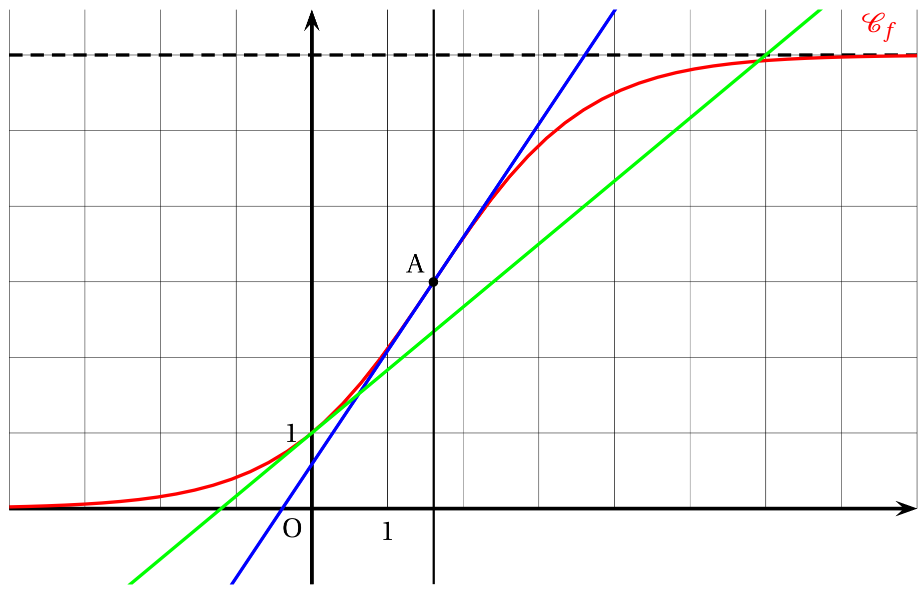
La seule possibilité de revenir au point de départ est de faire (globalement) 5 déplacements à droite et donc 5 déplacements à gauche, soit :

$P(X=5)=\binom{10}{5}\times\left(\frac{3}{4}\right)^5\times\left(\frac{1}{4}\right)^5\approx 0{,}0583$, soit 0,058 au millième près.

Exercice 3 5 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}}$.



1. On a $f(\ln 5) = \dfrac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-\ln 5}}$.

Or $\mathrm{e}^{-\ln 5} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 5}} = \dfrac{1}{5}$, donc $f(\ln 5) = \dfrac{6}{1+5\times\frac{1}{5}} = \dfrac{6}{2} = 3$. Donc A $(\ln 5\,;\,3) \in \mathscr{C}_f$.

2. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+5\,\mathrm{e}^{-x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 6$.

Donc la droite d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

3. **a.** Pour tout réel : $f'(x) = -6\times\dfrac{\left(1+5\,\mathrm{e}^{-x}\right)'}{\left(1+5\,\mathrm{e}^{-x}\right)^2} = -\dfrac{6\times5\times(-1)\,\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+5\,\mathrm{e}^{-}x\right)^2} = \dfrac{30\,\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+5\,\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$

b. On sait que quel que soit $x\in\mathbb{R}$, $30\,\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $\left(1+5\,\mathrm{e}^{-x}\right)^2 > 0$; donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$: la fonction f est croissante (strictement) sur $\mathbb{R}$..

D'autre part $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1+5\,\mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

Enfin $f(0) = \dfrac{6}{1+5\times1} = \dfrac{6}{6} = 1$: d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$\ln 5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	6

4. **a.** Comme $30\,\mathrm{e}^{-x} > 0, 1+5\,\mathrm{e}^{-x} > 0$ et donc $\left(1+5\,\mathrm{e}^{-x}\right)^3 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $5\,\mathrm{e}^{-x} - 1$:

- $5\,\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0 \iff 5\,\mathrm{e}^{-x} = 1 \iff \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow -x = \ln\dfrac{1}{5} \iff -x = -\ln 5 \iff x = \ln 5$;

- $5\,\mathrm{e}^{-x}-1>0 \Rightarrow x>\ln 5$;
- $5\,\mathrm{e}^{-x}-1<0 \Rightarrow x<\ln 5$.

Conclusion : f est convexe sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln 5[$, concave sur $]\ln 5\,;\,+\infty[$ et a en $\ln 5$ un point d'inflexion car la dérivée seconde change de signe en ce point : il s'agit du point A.

b. Une équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$M(x\,;\,y)\in T_0 \iff y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

On a vu que $f(0)=1$ et $f'(0)=\dfrac{30\,\mathrm{e}^0}{\left(1+5\,\mathrm{e}^0\right)^2}=\dfrac{30}{36}=\dfrac{5}{6}$.

Donc $M(x\,;\,y)\in T_0 \iff y-1=\dfrac{5}{6}(x-0) \iff y=\dfrac{5}{6}x+1$.

Or on a vu que sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln 5[$, la fonction f est convexe et par conséquent que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est au dessus de toutes ses tangentes menées en un point de l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln 5[$, donc en particulier au dessus de la tangente T_0 en $x=0$, donc numériquement :

$$f(x)\geqslant \frac{5}{6}x+1 \quad \text{sur }]-\infty\,;\,\ln 5[.$$

5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x)=k\ln\left(\mathrm{e}^x+5\right)$, où k est une constante réelle.

a. F_k est une fonction composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (car $\mathrm{e}^x+5>0$), elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$: elle est une primitive de f si :

$F_k'(x)=f(x) \iff k\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+5}=\dfrac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}}$,

soit en multipliant chaque terme de $F_k'(x)$ par e^{-x} :

$k\dfrac{1}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}}=\dfrac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}} \iff k=6$.

Donc $F_6(x)=6\ln\left(\mathrm{e}^x+5\right)$.

b. On a vu que $f(0)=1>0$ et la fonction est croissante ; elle est donc positive sur l'intervalle $[0\,;\,\ln 5]$.

L'aire demandée $\mathscr{A}$ est donc égale (en unités d'aire) à :

$$\mathscr{A}=\int_0^{\ln 5} f(x)\,\mathrm{d}x=\left[F_6(x)\right]_0^{\ln 5}=F_6(\ln 5)-F_6(0)=6\ln\left(\mathrm{e}^{\ln 5}+5\right)-6\ln\left(\mathrm{e}^0+5\right)$$
$$=6\ln 10-6\ln 6=6[\ln 10-\ln 6]=6\ln\frac{10}{6}=6\ln\frac{5}{3}.$$

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle : $(E)\qquad y'=y-\dfrac{1}{6}y^2$.

1. On a $f(x)-\dfrac{1}{6}[f(x)]^2=\dfrac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{6}\times\dfrac{36}{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^2}$

$$=\frac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}}-\frac{6}{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^2}=\frac{6\left(1+5\,\mathrm{e}^{-x}\right)-6}{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^2}=\frac{30\,\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^2}=f'(x)$$

Donc f est bien une solution de l'équation (E).

2.
- Les solutions de l'équation $y'=-y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x\longmapsto K\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $K\in\mathbb{R}$;
- La fonction constante $x\longmapsto\dfrac{1}{6}$ est la seule fonction constante solution de l'équation à résoudre ;

- Les fonctions solutions de l'équation différentielle proposée sont les fonctions définies par :

$$x \longmapsto \frac{1}{6} + K\,\mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

3. **a.** On a donc : $h'(x) = -h(x) + \dfrac{1}{6}$

Or si $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, alors $h'(x) = -\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$.

L'équation précédente devient :

$-\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\dfrac{1}{g(x)} + \dfrac{1}{6}$ soit en multipliant par $[g(x)]^2$

$-g'(x) = -g(x) + \dfrac{1}{6}[g(x)]^2 \iff g'(x) = g(x) - \dfrac{1}{6}[g(x)]^2$ ce qui signifie que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.

b.

$$g_m(x) = \frac{6}{1+6m\,\mathrm{e}^{-x}}.$$

Puisque m est positif, alors $6m\,\mathrm{e}^{-x}$ l'est aussi et $1 + m\,\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 > 0$, donc finalement $g_m(x) > 0$ quel que soit le réel x. La fonction h_m définie par $h_m(x) = \dfrac{1}{g_m(x)}$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

Or $h_m(x) = \dfrac{1}{g_m(x)} = \dfrac{1+6m\,\mathrm{e}^{-x}}{6} = \dfrac{1}{6} + m\,\mathrm{e}^{-x}$ et on reconnait une solution de l'équation différentielle de la question **2.**.

On a ensuite vu à la question **3. a.** que si la fonction h_m était une solution de $y' = -y + \dfrac{1}{6}$, alors g_m était elle solution de l'équation $y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.

Exercice 4 — 5 points

1. On considère le script écrit en langage Python ci-dessous.

```
def seuil(S) :
  n=0
  u=7
  while u < S :
      n=n+1
      u=1.05*u+3
  return(n)
```

Affirmation 1 : l'instruction `seuil(100)` renvoie la valeur 18. **Vraie**

En partant de 7 l'algorithme multiplie le nombre précédent par 1,05 et ajoute 3.

On peut simuler ceci avec une simple calculatrice et on obtient en arrondissant au centième :

n	0	1	2	$\cdots$	17	18
u	7	10,35	13,87	$\cdots$	93,57	101,24

10,35 est le premier résultat et 101,24 le 18e l'algorithme s'arrête au 19e passage.

2. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n}.$$

Affirmation 2 : la suite (S_n) converge vers $\frac{5}{4}$.**Vraie**

On a la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{5}$.

En écrivant sous la somme S la somme $\frac{1}{5}S$ décalée d'un rang vers la droite et en calculant la différence des deux lignes, on obtient :

$S - \frac{1}{5}S = 1 - \frac{1}{5^{n+1}} \iff \frac{4}{5}S = 1 - \frac{1}{5^{n+1}} \iff S = \frac{5}{4}\left[1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right]$.

Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{5^{n+1}} = 1$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} S = \frac{5}{4} = 1,25$.

3. **Affirmation 3** : dans une classe composée de 30 élèves, on peut former 870 binômes de délégués différents. **Fausse**

Le nombre de binômes différents est $\binom{30}{2} = \frac{30 \times 29}{2} = 435$.

4. On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.

Affirmation 4 : **Vraie** l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = (\ln x)^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = (\ln x)^2 + 2\ln x = \ln x(\ln x + 2)$.

On sait que la fonction logarithme népérien est croissante et comme $\ln 1 = 0$ et $\ln 1 + 2 > 0$, $f'(x) \geqslant 0$.

La fonction est donc croissante de $f(1) = 0$ à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires f ne peut prendre la valeur 1 qu'une seule fois.

5. **Affirmation 5** : **Vraie**

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}.$$

Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ étant dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;\,1]$, on fait une intégration par parties :

avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, on obtient : $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \left[-\mathrm{e}^{-x}(1+x)\right]_0^1\\ &= -2\,\mathrm{e}^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$