∽ Corrigé du baccalauréat Métropole 20 juin 2024 ∾

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

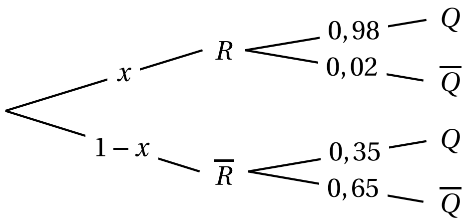
EXERCICE 1 **5 points**

Puisque l'on interroge un étudiant au hasard, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions sont assimilables à des probabilités.

1. Comme 91,7 % des étudiants ont répondu oui, on a donc $P(Q) = 0,917$.

Et $P_{\overline{R}}\left(\overline{Q}\right) = 0,65$, cela correspond à la probabilité que le candidat interrogé ait répondu « non », sachant qu'il a échoué à l'examen.

2. **a.** L'arbre pondéré complété est :



b. On sait que $P(Q) = 0,917$, or, comme R et $\overline{R}$ partitionnent l'univers, en vertu de la loi des probabilités totales, on a également :

$$\begin{aligned} P(Q) &= P\left(Q \cap R\right) + P\left(Q \cap \overline{R}\right) \\ &= x \times 0,98 + (1-x) \times 0,35 \\ &= 0,98x + 0,35 - 0,35x \\ &= 0,63x + 0,35 \end{aligned}$$

Puisque la probabilité de Q est unique, on peut donc écrire, puis résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} 0,63x + 0,35 = 0,917 &\iff 0,63x = 0,567 \\ &\iff x = \frac{0,567}{0,63} \\ &\iff x = 0,9 \end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc 0,9 : la probabilité que l'étudiant ait réussi son examen est donc de 0,9 (ou bien : 90 % des étudiants ont réussi leur examen).

3. Pour cette question, on doit calculer $P_Q(R)$.

On a : $P_Q(R) = \dfrac{P(Q \cap R)}{P(Q)} = \dfrac{0,9 \times 0,98}{0,917} = \dfrac{0,882}{0,917} = \dfrac{126}{131} \approx 0,962$

Si l'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question, la probabilité qu'il ait réussi l'examen est d'environ 0,962 (à 10^{-3} près).

C'est-à-dire qu'environ 96,2 % des étudiants ayant répondu « oui » ont effectivement réussi l'examen.

4. Par exploration à la calculatrice, avec une loi binomiale de paramètres $(20\,;\,0,615)$, on a : $P(N \geqslant 11) \approx 0,797$, et $P(N \geqslant 12) \approx 0,649$.

En choisissant de récompenser les candidats dont la note est supérieure ou égale à 11, la directrice récompensera environ 80 % d'eux.

5. Comme les dix variables aléatoires suivent la même loi binomiale de paramètres 20 et 0,615, chacune de ces variables aléatoires a

- pour espérance : $E(N_i) = n \times p = 20 \times 0,615 = 12,3$;
- et pour variance : $V(N_i) = n \times p \times (1-p) = 20 \times 0,615 \times 0,385 = 4,7355$.

S étant la somme de ces dix variables aléatoires, on a :

- $E(S) = E(N_1) + E(N_2) + \cdots + E(N_{10}) = 12,3 + 12,3 + ... + 12,3 = 123$;
- comme les variables aléatoires sont indépendantes,
  $V(S) = V(N_1) + V(N_2) + \cdots + V(N_{10}) = 10 \times 4,7355 = 47,355$.

6. **a.** La variable aléatoire M donne la moyenne des notes obtenues par un groupe (un échantillon) de 10 étudiants choisis au hasard.

b. On a bien

- $E(M) = \dfrac{1}{10} \times E(S) = \dfrac{1}{10} \times 123 = 12,3$;
- $V(M) = \left(\dfrac{1}{10}\right)^2 \times V(S) = \dfrac{1}{100} \times 47,355 = 0,47355$.

c. On remarque que l'intervalle de notes considéré : $]10,3\ ;\ 14,3[$ est un intervalle centré sur l'espérance de M, autrement dit, la probabilité qui nous intéresse est celle de l'évènement : $A = \{|M - E(M)| < 2\}$.
L'évènement contraire de cet évènement est : $\overline{A} = \{|M - E(M)| \geqslant 2\}$.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev affirme que :

$$\begin{aligned}
P\big(|M - E(M)| \geqslant 2\big) \leqslant \frac{V(M)}{2^2} &\iff P\big(|M - 12,3| \geqslant 2\big) \leqslant \frac{0,47355}{4} \\
&\iff P\big(|M - 12,3| \geqslant 2\big) \leqslant 0,1183875 \\
&\iff P\big(|M - 12,3| < 2\big) \geqslant 1 - 0,1183875 \\
&\iff P\big(|M - 12,3| < 2\big) \geqslant 0,8816125
\end{aligned}$$

L'affirmation « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % » est donc bien correcte, la probabilité que cet évènement soit réalisé étant supérieure à 0,88, elle est aussi supérieure à 0,8 qui correspond à 80 %.

EXERCICE 2 — 5 points

Partie A : étude d'un modèle discret.

1. Ajouter 15 g, soit 15 000 mg, de chlore, dans une piscine de $50\,\text{m}^3$, soit 50 000 L, c'est donc faire augmenter la concentration de : $\dfrac{15000}{50000} = \dfrac{15}{50} = \dfrac{3}{10} = 0,3\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$.

2. *Remarque :* la relation de récurrence peut s'interpréter, en disant que sous l'action du milieu ambiant, 8 % du chlore présent dans la piscine disparaît chaque jour (et donc 92 % du chlore présent une journée est encore présent le jour suivant).

a. *Initialisation :* on a $v_0 = 0,7$
d'après la relation de récurrence : $v_1 = 0,92 v_0 + 0,3 = 0,944$.
On a donc bien : $v_0 \leqslant v_1 \leqslant 4$.
L'inégalité souhaitée est donc vérifiée au rang 0.

Hérédité : soit n naturel donné, tel que l'inégalité est vraie au rang n, c'est-à-dire que : $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4 &\implies 0,92v_n \leqslant 0,92v_{n+1} \leqslant 0,92\times 4 \qquad \text{car } 0,92>0\\ &\implies 0,92v_n+0,3 \leqslant 0,92v_{n+1}+0,3 \leqslant 3,68+0,3\\ &\implies v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 3,98\\ &\implies v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 4\end{aligned}$$

La véracité de l'inégalité est donc héréditaire.

Conclusion : L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il l'est encore au rang $n+1$, donc en vertu du principe de récurrence, pour tout entier n naturel, on a : $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

b. De la question précédente, on retient :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leqslant v_{n+1}$ donc la suite (v_n) est croissante;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leqslant 4$ donc la suite (v_n) est majorée par 4.

D'après le théorème de croissance monotone la suite (v_n) est donc convergente, vers une limite ℓ inférieure ou égale à 4.

De plus, la suite (v_n) est définie par récurrence, et la fonction de récurrence : $x \longmapsto 0,92x+0,3$ est continue sur $\mathbb{R}$, puisque c'est une fonction affine, donc la suite ne peut converger que vers un point fixe de la fonction de récurrence

ℓ est donc une solution de l'équation :

$$\begin{aligned} x = 0,92x+0,3 &\iff 0,08x = 0,3\\ &\iff x = \frac{0,3}{0,08}\\ &\iff x = 3,75\end{aligned}$$

L'équation n'a qu'une solution, donc la suite (v_n) converge vers $3,75$.

3. À long terme, le taux de chlore ne sera pas conforme à la préconisation des piscinistes, car si la limite est $3,75$ alors tout intervalle ouvert contenant $3,75$ contiendra tous les termes à partir d'un certain rang. Notamment l'intervalle $]3\ ;\ 5[$.

Il existe donc un rang à partir duquel les termes de la suite seront dans l'intervalle $]3\ ;\ 5[$, et donc la concentration en chlore dépassera strictement la limite supérieure de $3\,\text{mg}\cdot\text{L}^{-1}$ recommandée par les piscinistes.

4. C'est un algorithme de seuil classique, on va calculer les termes de la suite, les uns après les autres. Pour s'arrêter dès qu'un terme est strictement supérieur au seuil s, il faut continuer tant que (while) les termes ne sont pas strictement supérieurs, donc tant que les termes sont inférieurs ou égaux au seuil s.

Le programme complété est donc :

```
def alerte_chlore(s) :
    n = 0
    u = 0.7
    while u <= s :
        n = n + 1
        u = 0.92*u + 0.3
    return n
```

5. En saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)`, le programme renvoie 17 (en effet, $v_{16} \approx 2,95 \leqslant 3$ et $v_{17} \approx 3,01 > 3$).

Dans le contexte de l'exercice, cela veut dire que si Alain applique cette méthode, 17 jours après le 19 juin, le taux de chlore dans sa piscine serait trop élevé, par rapport aux recommandations des piscinistes.

Partie B : étude d'un modèle continu.

1. Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$, où a et b sont des réels (a non nul), ont pour solutions les équations de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

Ici, avec $a = -0,08$ et $b = \dfrac{q}{50}$, cela conduit à :

$$x \longmapsto C\mathrm{e}^{-0,08x} - \frac{\frac{q}{50}}{-0,08} = C\mathrm{e}^{-0,08x} + \frac{q}{50 \times 0,08}.$$

On arrive donc bien à une solution f de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{-0,08x} + \dfrac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

2. **a.** Puisque $-0,08 < 0$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} -0,08x = -\infty$

donc, par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,08x} = \lim\limits_{y \to -\infty} \mathrm{e}^{y} = 0$

puis, par limite du produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} C\mathrm{e}^{-0,08x} = 0$

enfin, par limite de la somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{q}{4}$.

b. Si on veut que le taux de chlore se stabilise autour de $2\,\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$, il faut que la limite de la fonction f soit 2, donc on veut :

$\dfrac{q}{4} = 2 \iff q = 8$.

Pour cet objectif à long terme, Alain devra donc ajouter 8 grammes de chlore par jour dans sa piscine.

À l'instant $t = 0$, on avait donc un taux de $0,7\,\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$, donc $f(0) = 0,7$.

$$\begin{aligned} f(0) = 0,7 &\iff C\mathrm{e}^{-0,08 \times 0} + \frac{8}{4} = 0,7 \\ &\iff C + 2 = 0,7 \\ &\iff C = -1,3 \end{aligned}$$

La fonction f donnant l'évolution du taux de chlore dans la piscine d'Alain est donc : $f : x \longmapsto -1,3\mathrm{e}^{-0,08x} + 2$.

EXERCICE 3 — 6 points

Partie A : exploitation du graphique.

1. On lit que B a pour coordonnées $(-1\ ;\ -2)$, or la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par B, donc $f(-1) = f(x_{\mathrm{B}}) = y_{\mathrm{B}} = -2$.

On nous dit que la tangente T, tangente à $\mathscr{C}_f$ en B, d'abscisse -1, est aussi la droite (AB), dont le coefficient directeur est 1, donc $f'(-1) = 1$.

2. La fonction f n'est manifestement pas convexe sur son ensemble de définition, car la courbe $\mathscr{C}_f$ passe en dessous de sa tangente T pour les valeurs x inférieures à $-1,7$, environ. Si la fonction était convexe sur tout son ensemble de définition, elle serait au-dessus de n'importe quelle tangente, sur tout son ensemble de définition.

Ici, on a l'impression que la fonction est d'abord concave, puis convexe, avec un point d'inflexion dont l'abscisse est aux alentours de $-1,4$.

3. De ce que l'on peut voir de $\mathscr{C}_f$, on ne voit qu'une seule solution à l'équation, qui est environ 0,1 (à 10^{-1} près).

Partie B : étude de la fonction f.

1. On a : $\lim_{x\to -2} x^2+2x-1 = (-2)^2+2\times(-2)-1 = -1$, car $x \longmapsto x^2+2x-1$ est une fonction polynôme, continue sur $\mathbb{R}$ et donc notamment continue en -2.

   de plus : $\lim_{x\to -2}(x+2) = 0$

   et donc, par composition : $\lim_{x\to -2}\ln(x+2) = \lim_{y\to 0}\ln(y) = -\infty$

   finalement, par limite de la somme : $\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$.

   Graphiquement, cela signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale, d'équation $x = -2$.

2. *Remarque :* la justification de la dérivabilité de f, donnée ci-après, n'est généralement pas attendue.

   La fonction $x \longmapsto \ln(x+2)$ est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$, en tant que composée de $x \longmapsto x+2$ définie et dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$, où la fonction ln est définie et dérivable.

   f est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$, en tant que somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (une fonction polynôme et une fonction composée).

   $$\forall x \in]-2\,;\,+\infty[,\quad f'(x) = 2x+2+0+\frac{1}{x+2} = \frac{(2x+2)(x+2)+1}{x+2} = \frac{2x^2+4x+2x+4+1}{x+2} = \frac{2x^2+6x+5}{x+2}.$$

   On arrive bien à l'expression attendue pour la fonction dérivée f'.

3. Pour tout x réel strictement supérieur à -2, $x+2$ est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le signe de son numérateur. Ledit numérateur étant une expression polynomiale de degré 2 ayant un coefficient dominant (2) positif, cela signifie que les images seront positives, sauf entre d'éventuelles racines.

   Déterminons le discriminant du numérateur : $\Delta = 6^2-4\times2\times5 = 36-40 = -4 < 0$.

   Le trinôme n'a donc pas de racines réelles, et a donc des images strictement positives pour tout x réel.

   f' est donc une fonction à valeurs strictement positives sur $]-2\,;\,+\infty[$, et f est donc strictement croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$.

   On peut donc établir le tableau de variations suivant :

x	-2	$+\infty$
signe de $f'(x)$	||	$+$
variations de f	|| $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

4. La fonction f est continue (car dérivable) sur $]-2\,;\,+\infty[$, de plus, elle est strictement croissante sur cet intervalle et enfin, 0 est une valeur intermédiaire entre $\lim_{-2} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-2\,;\,+\infty[$, que l'on notera α.

Avec une exploration à la calculatrice (éclairée par notre lecture graphique de la partie A), on trouve $0,115 < \alpha < 0,12$, donc une valeur approchée à 10^{-2} de α est $0,12$.

5. Puisque f est strictement croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$, on a :

$$-2 < x < \alpha \implies f(x) < f(\alpha) \implies f(x) < 0 \qquad\qquad \alpha < x \implies f(\alpha) < f(x) \implies 0 < f(x)$$

f est donc à valeurs strictement négatives sur $]-2\,;\,\alpha[$, nulle pour $x = \alpha$ et à valeurs strictement positives sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

6. Pour étudier la présence d'un point d'inflexion, on va étudier le signe de la dérivée seconde de f, notée f''.

f est deux fois dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$, car sa dérivée première est une fraction rationnelle, et donc f' est dérivable partout où elle est définie.

$$\forall x \in]-2\,;\,+\infty[, \quad f''(x) = \frac{(4x+6)\times(x+2)-(2x^2+6x+5)\times 1}{(x+2)^2} = \frac{4x^2+8x+6x+12-2x^2-6x-5}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}$$

Pour tout x réel strictement supérieur à -2, $(x+2)^2$ est une quantité strictement positive, donc le signe de $f''(x)$ est le signe de son numérateur, un polynôme de degré 2, dont le coefficient dominant est strictement positif, dont les images sont strictement positives, sauf entre ses deux éventuelles racines.

Le discriminant est : $\Delta = 8^2 - 4\times 2\times 7 = 8\times 8 - 8\times 7 = 8 > 0$.

Le trinôme a exactement deux racines réelles distinctes, et donc s'annule en changeant de signe deux fois, pour :

$$x_1 = \frac{-8-\sqrt{8}}{2\times 2} = \frac{-8-2\sqrt{2}}{4} = -2-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$x_2 = \frac{-8+\sqrt{8}}{2\times 2} = \frac{-8+2\sqrt{2}}{4} = -2+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La valeur x_1 est manifestement strictement inférieure à -2, et donc :

Sur $\left]-2\,;\,-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, f'' est à valeurs strictement négatives, on a $f''\left(-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ et sur $\left]-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,+\infty\right[$, f'' est à valeurs strictement positives.

Ainsi, f est concave sur $\left]-2\,;\,-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et convexe sur $\left]-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,+\infty\right[$ et donc son unique point d'inflexion est le point d'abscisse $-2+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque : On a : $-2+\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -1,29$, ce qui n'est pas incohérent avec l'estimation graphique formulée en partie A dans ce corrigé.

Partie C : une distance minimale.

1. Le point J a pour coordonnées $(0\ ;\ 1)$ et M a pour coordonnées $\big(x\ ;\ g(x)\big)$.

Comme on est dans un repère orthonormé, on a : $\quad \mathrm{J}M = \sqrt{(x_M - x_\mathrm{J})^2 + (y_M - y_\mathrm{J})^2}$

Donc, $\quad \forall x \in]-2\ ;\ +\infty[, \quad h(x) = \mathrm{J}M^2$

$$\begin{aligned} &= (x_M - x_\mathrm{J})^2 + (y_M - y_\mathrm{J})^2 \\ &= (x-0)^2 + \big(g(x) - 1\big)^2 \\ &= x^2 + \big[\ln(x+2) - 1\big]^2. \end{aligned}$$

On arrive bien à l'expression attendue.

2. **a.** La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et la distance $\mathrm{J}M$ est nécessairement positive, en tant que distance.

Donc $\mathrm{J}M_{x_1} \leqslant \mathrm{J}M_{x_2} \iff \mathrm{J}M_{x_1}^2 \leqslant \mathrm{J}M_{x_2}^2$.

La distance $\mathrm{J}M$ sera donc minimale pour la valeur x qui rend minimale le carré de cette distance, c'est-à-dire $h(x)$.

On sait que, pour tout x dans $]-2\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{2}{x+2}$ est strictement positif, donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$.

On peut donc établir le tableau suivant :

x	-2		α		$+\infty$
signe de $f(x)$	||	$-$	0	$+$	
signe de $h'(x)$	||	$-$	0	$+$	
variations de h	||	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	

b. Comme h est décroissante sur $]-2\ ;\ \alpha[$ et croissante sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, la valeur de x pour laquelle la distance $\mathrm{J}M$ est minimale est donc bien le nombre α, solution de l'équation $f(x) = 0$, défini à la question **4.** de la **partie B**.

3. **a.** On sait que α est la solution de l'équation $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2) = 0 \\ &\iff \ln(x+2) = 1 - 2x - x^2 \end{aligned}$$

Comme α est solution de cette équation, on en déduit bien :

$\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

b. La tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α a pour coefficient directeur : $\quad g'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+2}$.

La droite $(\mathrm{J}M_\alpha)$ a pour coefficient directeur :

$$\frac{y_{M_\alpha} - y_\mathrm{J}}{x_{M_\alpha} - x_\mathrm{J}} = \frac{g(\alpha) - 1}{\alpha - 0} = \frac{\ln(\alpha+2) - 1}{\alpha} = \frac{1 - 2\alpha - \alpha^2 - 1}{\alpha} = \frac{\alpha(-2-\alpha)}{\alpha} = -2 - \alpha.$$

Le produit de ces deux coefficients directeurs est donc : $\quad \dfrac{1}{\alpha+2} \times (-2-\alpha) = -1$.

On en déduit dont que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite $(\mathrm{J}M_\alpha)$ sont perpendiculaires.

Remarque : on aurait aussi pu mobiliser des connaissances du programme de première et utiliser des vecteurs normaux ou des vecteurs directeurs de ces deux droites, et en calculer le produit scalaire (entre les deux vecteurs directeurs, ou entre les deux vecteurs normaux) ou vérifier la colinéarité (entre le vecteur directeur de l'une et le vecteur normal de l'autre), pour arriver à la même conclusion.

EXERCICE 4 **4 points**

Affirmation 1 : Vraie

Ici, il y a deux éléments à justifier : d'une part A, C et D définissent un plan et d'autre part, ce plan a bien l'équation annoncée.

- On a : $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}4-2\\4-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$.

  Avec $x_{\overrightarrow{\mathrm{AD}}} = -x_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$ mais $y_{\overrightarrow{\mathrm{AD}}} \neq -y_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$, il est évident que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ ne sont pas colinéaires, donc que les points A, C et D ne sont pas alignés, et donc :

  A, C et D définissent un plan ;

- le plan d'équation $8x-5y+4z-16=0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$, de coordonnées $\begin{pmatrix}8\\-5\\4\end{pmatrix}$.

  On a : $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 8\times2-5\times4+4\times1 = 16-20+4=0$

  et $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 8\times(-2)-5\times0+4\times4 = -16-0+16=0$

  $\overrightarrow{n_1}$ est donc bien orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ACD), donc $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal au plan (ACD).

  Le plan dont on a l'équation partage un vecteur normal avec (ACD) : ces deux plans sont parallèles.

  Comme, de plus, $8x_{\mathrm{A}}-5y_{\mathrm{A}}+4z_{\mathrm{A}}-16 = 8\times2-5\times0+4\times0-16 = 16-16=0$

  on en déduit que les coordonnées de A vérifient l'équation donnée, et donc que A est dans le plan dont on a l'équation, ce plan est donc confondu avec (ACD).

Finalement, on a bien confirmé que les points A, C et D définissent un plan $\mathscr{P}$ d'équation $8x-5y+4z-16=0$.

Remarque : pour le deuxième point de cette question, on pouvait aussi vérifier que A, C et D avaient des coordonnées vérifiant l'équation donnée, cela revenait au même.

Affirmation 2 : Fausse

Puisque l'on sait que A, C et D définissent le plan $\mathscr{P}$ d'équation $8x-5y+4z-16=0$, alors on a : les points A, B, C et D sont coplanaires

$$\begin{aligned}&\iff \mathrm{B}\in\mathscr{P}\\&\iff 8x_{\mathrm{B}}-5y_{\mathrm{B}}+4z_{\mathrm{B}}-16=0\\&\iff 8\times0-5\times4+4\times3-16=0\\&\iff 0-20+12-16=0\\&\iff -24=0\end{aligned}$$

Comme $-24\neq0$, on en déduit que B n'appartient pas à $\mathscr{P}$, et donc que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Affirmation 3 : Vraie

les droites (AC) et (BH) sont dirigées par $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ respectivement. Comme ces vecteurs sont visiblement non colinéaires, les droites sont soit sécantes, soit non coplanaires.

Pour chercher un éventuel point d'intersection, on a donné des représentations paramétriques des deux droites :

$$(AC)\begin{cases} x = 2+2s \\ y = 4s \\ z = s \end{cases} \quad \text{où } s \in \mathbb{R} \qquad (BH)\begin{cases} x = -t \\ y = 4-3t \\ z = 3-t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Si on considère M_s le point de paramètre s sur la droite (AC) et N_t le point de paramètre t sur (BH), alors :

$$\begin{aligned} M_s = N_t &\iff \begin{cases} 2+2s = -t \\ 4s = 4-3t \\ s = 3-t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2+2(3-t) = -t \\ 4(3-t) = 4-3t \\ s = 3-t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2+6-2t = -t \\ 12-4t = 4-3t \\ s = 3-t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 8 = -t+2t \\ 12-4 = -3t+4t \\ s = 3-t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t = 8 \\ t = 8 \\ s = 3-8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t = 8 \\ t = 8 \\ s = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système a une unique solution, donc les deux droites ont un unique point commun, c'est M_{-5}, qui est confondu avec N_8, autrement dit, le point de coordonnées : $(-8\,;\,-20\,;\,-5)$. Les droites sont bien sécantes.

Affirmation 4 : Vraie

Il y a deux éléments à vérifier ici pour répondre positivement : le point H est-il un point du plan (ABC), et le vecteur $\overrightarrow{DH}$ est-il normal au plan ?

- On a : $x_H - y_H + 2z_H - 2 = -1 - 1 + 2 \times 2 - 2 = -2 + 4 - 2 = 0$

  Les coordonnées de H vérifient l'équation donnée pour (ABC), donc H est bien un point du plan (ABC) ;

- On a : $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. D'après l'équation donnée pour (ABC), un vecteur normal à (ABC) est : $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  Comme on a : $\overrightarrow{n_2} = -\overrightarrow{DH}$, on en déduit que les vecteurs sont colinéaires, donc que $\overrightarrow{DH}$ est normal au plan (ABC).

En conclusion, H est un point de (ABC) tel que (DH) est orthogonale à (ABC) : H est bien le projeté orthogonal de D sur (ABC).