

∞ Corrigé du baccalauréat Polynésie 20 juin 2024 ∞
 ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Jour 2

A. P. M. E. P.

Exercice 1

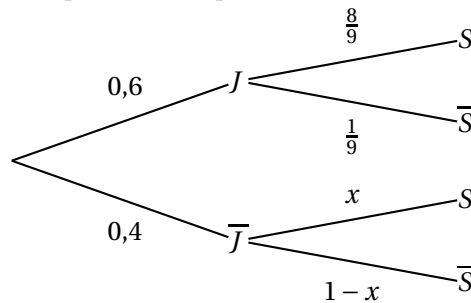
4 points

1. D'après l'énoncé $P(J) = 0,6$ et $P_J(S) = \frac{8}{9}$.

$$\text{On a donc } P(J \cap S) = P(J) \times P_J(S) = 0,6 \times \frac{8}{9} = \frac{4,8}{9} = \frac{3 \times 1,6}{3 \times 3} = \frac{1,6}{3} = \frac{5 \times 1,6}{5 \times 3} = \frac{8}{15}.$$

2. a. On sait que $P(S) = \frac{2}{3}$.

On commence l'arbre de probabilités pondéré suivant :



D'après la loi des probabilités totales :

$$P(S) = P(J \cap S) + P(\bar{J} \cap S), \text{ soit } \frac{2}{3} = \frac{8}{15} + P(\bar{J} \cap S) \iff P(\bar{J} \cap S) = \frac{2}{3} - \frac{8}{15} = \frac{10}{15} - \frac{8}{15} = \frac{2}{15}.$$

La probabilité que la personne choisie n'a pas l'intention de regarder les JO à la télévision et a une activité sportive régulière est égale à $\frac{2}{15}$;

b. On a $P_{\bar{J}}(S) = \frac{P(\bar{J} \cap S)}{P(\bar{J})} = \frac{\frac{2}{15}}{0,4} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{15} \times \frac{5}{2} = \frac{1}{3} = x.$

3. a. Les personnes sont choisies au hasard et chacune d'elles a une pratique sportive régulière avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et

$$p = \frac{2}{3}.$$

- b. On a $P(X = 16) = \binom{30}{16} \left(\frac{2}{3}\right)^{16} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{30-16} = \binom{30}{16} \left(\frac{2}{3}\right)^{16} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{14} \approx 0,0462$ soit 0,046 au millième près à la calculatrice.

c. On a $\frac{10000}{380} \approx 26,3$: on peut donc offrir 26 entrées gratuites au maximum.

La calculatrice donne $P(X \leq 26) \approx 0,9967$ soit environ 0,997. La probabilité que le budget soit insuffisant est donc égale à environ $1 - 0,997$ soit environ 0,003 ou trois millièmes.

Exercice 2

5 points

1. La solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

A. $f(x) = e^{-3x}$

B. $f(x) = -\frac{4}{3}e^{-3x} + \frac{7}{3}$

C. $f(x) = e^{-3x} + \frac{7}{3}$

D. $f(x) = -\frac{10}{3}e^{-3x} - \frac{7}{3}$

L'équation différentielle $y' = -3y$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto f(x) = Ke^{-3x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

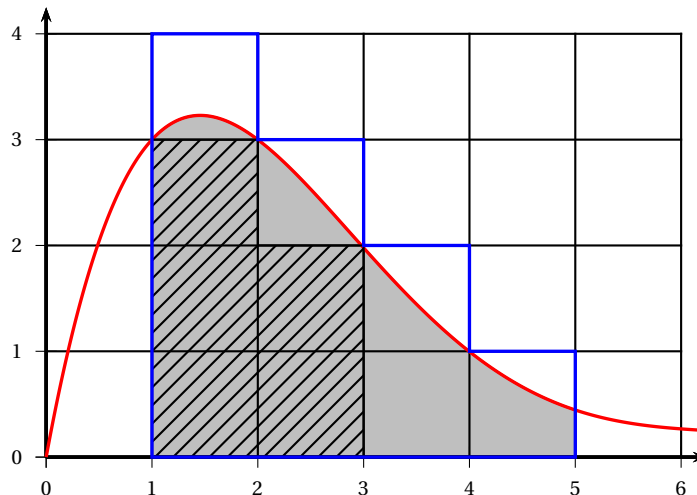
La fonction $x \mapsto \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ si et seulement si $y' = 0 = -3\alpha + 7 \iff 3\alpha = 7 \iff \alpha = \frac{7}{3}$.

On sait qu'alors les solutions de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ sont les fonctions $x \mapsto Ke^{-3x} + \frac{7}{3}$.

En particulier la fonction f solution telle que $f(0) = 1 \iff K + \frac{7}{3} = 1 \iff K = -\frac{4}{3}$.

La seule solution est donc la fonction définie par $f(x) = -\frac{4}{3}e^{-3x} + \frac{7}{3}$: réponse B.

2. La courbe d'une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ est donnée ci-dessous.



Le dessin est clair : la fonction est positive sur l'intervalle $[1; 5]$; l'intégrale est (en unités d'aire) la mesure de la surface limitée par la représentation graphique de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$.

La surface grise contient les 5 carreaux hachurés et est inscrite dans le polygone de 10 unités en bleu. Réponse **C**.

3. On sait que si g' est la dérivée de g , alors g est une primitive de la fonction g' , donc :

$$\int_0^2 g'(x) dx = [x^2 \ln(x^2 + 4)]_0^2 = 2^2 \ln(2^2 + 2) = 4 \ln 4 + 4 = 4 \ln 8 \text{ ou } 4 \ln 2^3 = 3 \times 4 \ln 2 = 12 \ln 2 \approx 8,31 \text{ soit } 8,3 \text{ au dixième près. Réponse } \mathbf{B}.$$

4. Le nombre de groupes de 5 élèves parmi les 31 est $\binom{31}{5}$. Réponse : **D**.

5. Elle choisit 3 élèves parmi les 20 faisant SES : elle a $\binom{20}{3}$ possibilités ; ensuite dans chacun de ces cas elle choisit 2 élèves parmi les $31 - 20 = 11$ élèves qui ne font pas SES, ce qui fait $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$ possibilités. Réponse **A**.

Exercice 3

6 points

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. a.

- $u_1 = 8 - \ln 2 \approx 7,31$;
- $u_2 = 8 - \ln 2 \ln 8 - \ln 24 - \approx 6,70$.

- b. mystere(10) donne la somme des premiers termes de la suite de u_0 à u_9 , soit

$$u_0 + u_1 + \dots + u_9 = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- c. Il suffit en ligne 7 de remplacer S par (S /k)

- 2.

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

La fonction f somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle en posant $u(x) = \frac{x}{4}$, d'où $u'(x) = \frac{1}{4}$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{x}{4}} = 1 - \frac{1}{4} \times 4 \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$:

- si $0 < x < 1$, alors $x - 1 < 0$: la fonction f est décroissante sur $]0; 1[$;
- si $x > 1$, alors $x - 1 > 0$: la fonction f est croissante sur $]1; +\infty[$;
- si $x = 1$, alors $f'(1) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln \frac{1}{4} = 1 - (-\ln 4) = 1 + \ln 4$ est le minimum de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. a. *Initialisation* : on a vu que $u_1 \approx 7,3$ et comme $u_0 = 8$, on a donc :

$$1 \leq u_1 \leq u_0$$

l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

On sait que sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ la fonction f est croissante, donc on a

$$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n).$$

Or $f(1) = 1 - \ln \frac{1}{4} \approx 2,39$, donc $f(1) \geq 1$ et on a

$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$ il l'est encore au rang suivant : d'après le principe de récurrence :

pour tout entier naturel n , on a : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

- b. L'encadrement précédent montre que : pour tout naturel n

- $u_{n+1} \leq u_n$: la suite (u_n) est décroissante;
- $1 \leq u_n$: la suite (u_n) est minorée par 1.

On sait qu'alors la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \geq 1$

- c. $f(x) = x \iff x - \ln\left(\frac{x}{4}\right) = x \iff 0 = \ln\left(\frac{x}{4}\right) \iff \frac{x}{4} = 1 \iff x = 4$.

- d. Par continuité de la fonction f (car elle est dérivable sur $]0 ; +\infty[$), la relation

$$u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right), \text{ donne puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell :$$

$$\ell = \ell - \ln\left(\frac{\ell}{4}\right) : \text{ d'après la question précédente } \ell = 4.$$

Exercice 4

5 points

1. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C sont distincts et non alignés : ils définissent le plan $\mathcal{P} = (ABC)$.

Dans la suite, on considère le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. a. On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 10 + 3 - 13 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 6 - 10 = 0$.

Le vecteur \vec{n} orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est normal à ce plan

- b. On sait qu'alors :

$$M(x ; y ; z) \in (ABC) \iff 2x - 3y + 1z + d = 0, d \in \mathbb{R}.$$

Par exemple $A(-1; -1; 17) \in (ABC) \iff -2 + 3 + 17 + d = 0 \iff d = -18$, donc
 $M(x; y; z) \in (ABC) \iff 2x - 3y + z - 18 = 0$.

3.

$$d : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t + 5 \\ z = 4t + 1 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

a. On sait que les coordonnées d'un vecteur directeur \vec{d} de d sont les coefficients de t , soit $\vec{d} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. Les coordonnées de E commun à d et au plan (ABC) vérifient les équations paramétriques de d et l'équation cartésienne de (ABC) soit le système

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t + 5 \\ z = 4t + 1 \\ 2x - 3y + z - 18 = 0 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$$2(3t + 2) - 3(t + 5) + 4t + 1 - 18 = 0 \iff 6t + 4 - 3t - 15 + 4t + 1 - 18 = 0 \iff 7t - 28 = 0 \iff 7t = 28 \iff t = 4.$$

D'où les coordonnées de E en remplaçant t par dans les équations de d : $E(14; 9; 17)$

4. La droite Δ contient D et a pour vecteur directeur un vecteur normal au plan (ABC) soit le vecteur \vec{n} .

$$\text{Une équation de } \Delta \text{ est donc } \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -3t + 5 \\ z = t + 1 \\ 2x - 3y + z - 18 = 0 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

En résolvant le système obtenu en rajoutant l'équation de \mathcal{P} permet d'obtenir $t = 2$, d'où $F(6; -1; 3)$.

Puisque la droite (DF) est perpendiculaire au plan \mathcal{P} , la distance DF est la (plus courte) distance du point au plan \mathcal{P} .

$$\text{Or } \overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \|\overrightarrow{DF}\|^2 = DF^2 = 4^2 + (-6)^2 + 2^2 = 16 + 36 + 4 = 56 = 4 \times 14.$$

On a donc $DF = \sqrt{4 \times 14} = \sqrt{4} \times \sqrt{14} = 2\sqrt{14}$ (en centaines de mètres).

5. La plus petite distance du point de lancer au plan (ABC) est égale à $2\sqrt{14}$ centaines de mètres : il faut donc calculer le temps mis à la vitesse de $18,6 \text{ m.s}^{-1}$ par un drone pour effectuer ce parcours de D à F .

$$\text{On sait que } v = \frac{d}{t}, \text{ ou } t = \frac{d}{v} = \frac{DF}{v} = \frac{2\sqrt{14} \times 100}{18,6} \approx 40,23 \text{ (secondes).}$$

Conclusion : le drone n'arrivera pas à temps.