∽ Baccalauréat Amérique du Nord 22 mai 2025 ∾

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. L'épreuve est effectuée 15 fois de façon indépendante et à chaque lancer la probabilité de marquer est égale à $0,32$. N suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(15\,;\,0,32)$.
2. La probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers est :
   $P(N=4) = \binom{15}{4} \times 0,32^4 \times (1-0,32)^{15-4} \approx 0,206$ au millième près.
3. La probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers est :
   $P(N \leqslant 6) = P(N=0) + P(N=1) + \ldots + P(N=6) \approx 0,828$ (calculatrice).
4. On sait que : $E(N) = n \times p = 15 \times 0,32 = 4,8$.
   Donc en moyenne sur 150 lancers, Victor marque 48 paniers.
5. **a.** Chaque lancer étant à 3 points, on a donc $T = 3N$.
   b. On a $E(T) = E(3N) = 3E(N)$ d'après la linéarité de l'espérance, soit
   $E(T) = 3 \times 4,8 = 14,4$, donc une moyenne de 144 points marqués sur 150 lancers.
   c. On a $P(12 \leqslant T = 3N \leqslant 18) = P(4 \leqslant N \leqslant 6)$.
   Cette probabilité est égale à :
   $P(4 \leqslant N \leqslant 6) = P(N=4) + P(N=5) + P(N=6) \approx 0,206 + 0,213 + 0,167$, soit

$$P(12 \leqslant T \leqslant 18) \approx 0,586.$$

Partie B

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.
   a. M_{50} représente la moyenne empirique, sur 50 matchs, des points marqués par Victor
   b. • Chaque variable $X_1, \ldots, X_{50}$ suit la même loi que X donc on a :
   $E(M_{50}) = E(X) = 22$;
   • Comme les variables X_1, X_2,... X_50 sont indépendantes, on en déduit : $V(M_{50}) = \frac{1}{50}V(X) = \frac{1}{50} \times 65 = \frac{65}{50} = \frac{130}{100} = 1,3$.
   c. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, pour une variable aléatoire X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, pour tout réel $a > 0$:
   $$P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$
   donc ici : $P(|M_{50} - E(M_{50})| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(M_{50})}{3^2}$
   Comme $\frac{V(M_{50})}{3^2} = \frac{1,3}{9} = \frac{13}{90}$, on a bien : $P\left(|M_{50} - 22| \geqslant 3\right) \leqslant \frac{13}{90}$.

d. L'événement « $19 < M_{50} < 25$ » revient à $|M_{50} - 22| < 3$ et
$P\big(|M_{50} - 22| < 3\big) = 1 - P\big(|M_{50} - 22| \geqslant 3\big)$.
Soit $P\big(|M_{50} - 22| \geqslant 3\big) \leqslant \dfrac{13}{90}$ entraîne $P\big(19 < M_{50} < 25\big) \geqslant 1 - \dfrac{13}{90} = \dfrac{77}{90} \approx 0,856$: cette probabilité est bien supérieure à 0,85.

2. D'après la loi faible des grands nombres, $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\Big(|M_n - E(X)| \geqslant t\Big) = 0$,
donc en particulier ici, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\Big(|M_n - 22| \geqslant 3\Big) = 0$.

donc pour tout $r > 0$ il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $P\big(|M_n - 22| \geqslant 3\big) < r$ et c'est vrai en particulier pour $r = 0,01$.

L'affirmation est donc fausse.

Autre méthode :

Pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de concentration, on a :

$P\big(|M_n - E(X)| \geqslant t\big) \leqslant \dfrac{V(X)}{t^2 n}$

Pour $t = 3$ on obtient : $P\big(|M_n - 22| \geqslant 3\big) \leqslant \dfrac{65}{n \times 3^2}$.

On veut donc que : $\dfrac{65}{9n} \leqslant 0,01 \iff \dfrac{6500}{9} \leqslant n$

$\iff 722 + \dfrac{2}{9} \leqslant n$

L'inégalité est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 723$.

EXERCICE 2 — 5 points

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Partie A

1. a. $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{2}$
$u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{\sqrt{2}}$.

b. À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que la suite est décroissante et converge vers 1.

2. a. Posons, pour tout entier naturel n, l'affirmation P_n : « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».
Initialisation : On a calculé $u_1 = \sqrt{2} \approx 1,414$ et $u_0 = 2$
On a donc bien $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.
L'affirmation P_0 est donc vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
Montrons que l'affirmation P_{n+1} est vraie, c'est à dire que $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$
Par hypothèse de récurrence, on a :
$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \implies \sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$
car la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$
$\implies 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

Si, pour n naturel, P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie également.

Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel non nul n, la véracité de l'affirmation est héréditaire : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

b. D'après la question précédente, pour tout entier n, $1 \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 1.

Et pour tout entier n, $u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Or toute suite décroissante et minorée est convergente donc, la suite (u_n) est convergente vers une limite $\ell \geqslant 1$.

c. Soit $x \in [0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} = x &\iff x = x^2 \text{ car } x \geqslant 0\\ &\iff x^2 - x = 0\\ &\iff x(x-1) = 0\\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1\end{aligned}$$

L'équation $\sqrt{x} = x$ admet deux solutions sur $[0\,;\,+\infty[$: 0 et 1.

d. La suite (u_n) est convergente vers ℓ et est définie par récurrence par :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction racine carrée qui est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Nous avons résolu cette équation à la question précédente, les solutions sont 0 et 1, or d'après la question **A. 1. b.**, $\ell \geqslant 1$ donc $\ell = 1$.

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Partie B

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \ln(u_{n+1})\\ &= \ln\left(\sqrt{u_n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln(u_n)\\ &= \frac{1}{2}v_n\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln(u_0) = \ln(2)$.

b. On a donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = \ln(2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{\ln(2)}{2^n}$.

c. Or, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln(u_n)$ donc $\dfrac{\ln(2)}{2^n} = \ln(u_n)$ c'est à dire : $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.

2. a. À l'aide de la calculatrice on trouve que pour tout $k < 7$, $u_k > 1{,}01$ et $u_7 \approx 1{,}005\,43$ donc $k = 7$.

b. On décide de prendre $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0{,}99\,;\,1{,}01[$ donc $\ln(u_7) \approx u_7 - 1 \approx 0{,}005\,43$.

c. D'après les questions **1. c.** et **2. b.** de la **partie B** une approximation de $\ln(2)$ est $2^7 \ln(u_7)$ soit $2^7 \times 0{,}005\,43$ c'est à dire 0,695.

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.

```
from math import*
def Briggs(a):
  n = 0
  while a >= 1.01:
    a = sqrt(a)
    n = n+1
  L =2**n *(a-1)
return L
```

EXERCICE 3 **5 points**

PARTIE A

Affirmation 1 : Vraie

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{JH}} &= \overrightarrow{\text{JF}} + \overrightarrow{\text{FE}} + \overrightarrow{\text{EH}}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BF}} + \overrightarrow{\text{BA}} + \overrightarrow{\text{BC}}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{DH}} + 2\overrightarrow{\text{BI}} - \overrightarrow{\text{CB}}\\ &= \overrightarrow{\text{DM}} + 2\overrightarrow{\text{BI}} + -\overrightarrow{\text{CB}}\end{aligned}$$

Affirmation 2 : Fausse

$\overrightarrow{\text{AG}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{BG}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AH}}$

On peut exprimer $\overrightarrow{\text{AG}}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AH}}$: les trois vecteurs sont coplanaires et donc le triplet de vecteurs $\left(\overrightarrow{\text{AB}}\ ,\ \overrightarrow{\text{AH}}\ ,\ \overrightarrow{\text{AG}}\right)$ n'est pas une base de l'espace.

Affirmation 3 : Vraie

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{IB}}\cdot\overrightarrow{\text{LM}} &= \overrightarrow{\text{IB}}\cdot\overrightarrow{\text{IK}} \quad \text{car } \overrightarrow{\text{LM}} = \overrightarrow{\text{IK}}\\ &= \overrightarrow{\text{IB}}\cdot\overrightarrow{\text{IA}} \quad \text{car A est le projeté orthogonal de K sur la droite (AB)}\\ &= -\text{IB}\times\text{IA} \quad \text{car les vecteurs sont colinéaires de sens contraire}\\ &= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} \quad \text{car l'arête est de longueur 1 et I est le milieu de l'arête [AB]}\\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

PARTIE B

Affirmation 4 : Fausse

$\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}x_{\text{B}}-x_{\text{A}}\\ y_{\text{B}}-y_{\text{A}}\\ z_{\text{B}}-z_{\text{A}}\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}3\\ -3\\ 8\end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$, le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

On est dans un repère orthonormé donc :

$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{n} = 3\times 2 + (-3)\times(-1) + 8\times 3 = 6 + 3 + 24 \neq 0$

Le vecteur normal au plan et le vecteur directeur de la droite ne sont pas orthogonaux donc le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) ne sont pas parallèles.

Affirmation 5 : Vraie

Méthode 1 :

Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles donc le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$.

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}'$ est donc de la forme : $2x - y + 3z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus, le point B appartient au plan $\mathscr{P}'$ donc $2x_B - y_B + 3z_B + d = 0$

D'où $2\times 5 + 3 + 3\times 7 + d = 0$ donc $10 + 3 + 21 + d = 0$ ce qui équivaut à $d = -34$.

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}'$ est donc : $2x - y + 3z - 34 = 0$.

En multipliant par -1 on obtient l'équation donnée.

Méthode 2 :

Le plan $\mathscr{P}'$ a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$, le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$.

$\overrightarrow{n'} = -\overrightarrow{n}$ donc les vecteurs normaux aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont colinéaires et donc les deux plans sont parallèles.

Vérifions si le point B appartient au plan $\mathscr{P}'$.

$-2x_B + y_B - 3z_B + 34 = -2\times 5 - 3 - 3\times 7 + 34 = -10 - 3 - 21 + 34 = 0$

Donc le point B appartient au plan $\mathscr{P}'$.

Donc le plan $\mathscr{P}'$ parallèle à $\mathscr{P}$ passant par B a bien pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$.

Affirmation 6 : Vraie

La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à la distance AH avec H projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$.

Déterminons les coordonnées du point H.

H est le projeté orthogonal du point A sur la plan $\mathscr{P}$, c'est donc l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite Δ orthogonale au plan $\mathscr{P}$ passant par le point A.

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, c'est donc un vecteur directeur de la droite Δ.

De plus le point A$(2~;~0~;~-1)$ appartient à la droite Δ, une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+2t\\ y &=& 0-t\\ z &=& -1+3t\end{array}\right. \quad \text{, où } t\in\mathbb{R}$$

L'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ donne l'équation en la variable t :

$$\begin{aligned} 2(2+2t)-(-t)+3(-1+3t)+6=0 &\iff 4+4t+t-3+9t+6=0\\ &\iff 14t=-7\\ &\iff t=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Le point H d'intersection entre la droite Δ et $\mathscr{P}$ est le point de paramètre $t = -\dfrac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de la droite Δ.

Il a comme coordonnées : $\quad \text{H}\left(2-2\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{1}{2}~;~-1-3\times\dfrac{1}{2}\right)$ soit $\text{H}\left(1~;~\dfrac{1}{2}~;~-\dfrac{5}{2}\right)$.

On a donc :

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\begin{pmatrix}-1\\ \dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{3}{2}\end{pmatrix}$

d'où : $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right\|^2 = 1^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{4} = \dfrac{14}{4}$, donc $\left\|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right\| = \sqrt{\dfrac{14}{4}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Affirmation 7 : Fausse

(d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix}$ et la droite (AB) par $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}$.

Les deux droites ont des vecteurs directeurs non colinéaires donc les droites ne sont ni parallèles, ni confondues.

La droite (AB) passe par le point A et est dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 2+3t \\ y & = & 0-3t \\ z & = & -1+8t \end{array}\right. \text{, où } t \in \mathbb{R}$$

(d) et (AB) seront donc coplanaires si et seulement si ces deux droites sont sécantes, c'est-à-dire si et seulement si le système suivant a une solution :

$$\left\{\begin{array}{l} 2+3t=-12+2k \\ -3t=6 \\ -1+8t=3-5k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -4=-12+2k \\ t=-2 \\ -17=3-5k \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} k=4 \\ t=-2 \\ k=4 \end{array}\right.$$

Le système admet une solution, donc les droites ont un point commun : le point de paramètre $t=-2$ de la droite (AB) ou le point de paramètre $k=4$ de (d) c'est à dire le point C$(-4\,;\,6\,;\,-17)$.

Les droites (AB) et (d) sont donc sécantes et par conséquent coplanaires.

EXERCICE 4 — 5 points

PARTIE A

1. **a.** Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$:
   $f'(x) = \mathrm{e}^x \times \sin(x) + \mathrm{e}^x \times \cos(x) = \mathrm{e}^x\big(\sin(x)+\cos(x)\big)$.

   b. Par connaissance des fonctions trigonométriques, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geqslant 0$ et $\sin(x) \geqslant 0$

   On précise que d'une part, $\sin(x)=0$ seulement pour $x=0$, et $cos(0)=1$, et d'autre part, $\cos(x)=0$ seulement pour $x=\dfrac{\pi}{2}$, et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, donc les fonctions sinus et cosinus ne s'annulent pas en même temps.

   La somme de deux réels positifs, dont l'un au moins est strictement positif est strictement positive, donc :

   pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x)+\sin(x)>0$.

   D'autre part, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$

donc pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) > 0$ en tant que produit de deux facteurs strictement positifs,

donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. **a.** L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est :
$y = f'(0)(x-0) + f(0) = f'(0)x + f(0)$.
$f(0) = \mathrm{e}^0\sin(0) = 1\times 0 = 0$; (donné dans l'énoncé)
$f'(0) = \mathrm{e}^0(\sin(0)+\cos(0)) = 1\times(0+1) = 1$ (donné dans l'énoncé)
L'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donc $y = 1x+0$ soit $y = x$.

b. En anticipant la question **3.**, on va étudier la convexité de la fonction sur $[0\,;\,\pi]$.
Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\pi]$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{e}^x(\sin(x)+\cos(x)) + \mathrm{e}^x(\cos(x)-\sin(x)) \\ &= \mathrm{e}^x(\sin(x)+\cos(x)+\cos(x)-\sin(x)) \quad . \\ &= 2\mathrm{e}^x\cos(x) \end{aligned}$$

On a le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	

donc pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f''(x) > 0$

d'où la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c. La courbe représentative d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier ici, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, d'équation $y = x$ (d'après la question précédente).
On a donc, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^x\sin(x) \geqslant x$.

3. On a vu précédemment que la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en $x = \dfrac{\pi}{2}$ donc le point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. $x \longmapsto \mathrm{e}^x\sin(x)$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^x & \text{et} \quad u'(x) = \mathrm{e}^x \\ v'(x) = \sin(x) & \text{et} \quad v(x) = -\cos(x) \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}
\text{d'où } I &= \Big[-\cos(x)\mathrm{e}^x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x(-\cos(x))\,\mathrm{d}x\\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + \cos(0)\mathrm{e}^0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x\\
&= 0 + 1 + J\\
&= 1 + J
\end{aligned}$$

$x \longmapsto \mathrm{e}^x\sin(x)$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad u'(x) = \cos(x)\\ v'(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad v(x) = \mathrm{e}^x\end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues et dérivables sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}
\text{d'où } I &= \Big[\sin(x)\mathrm{e}^x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x\\
&= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + \sin(0)\mathrm{e}^0 - J\\
&= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$I = 1 + J \qquad \text{et} \qquad I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En ajoutant les deux équations précédentes on obtient : $2I = 1 + J + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J$.

d'où $I = \dfrac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

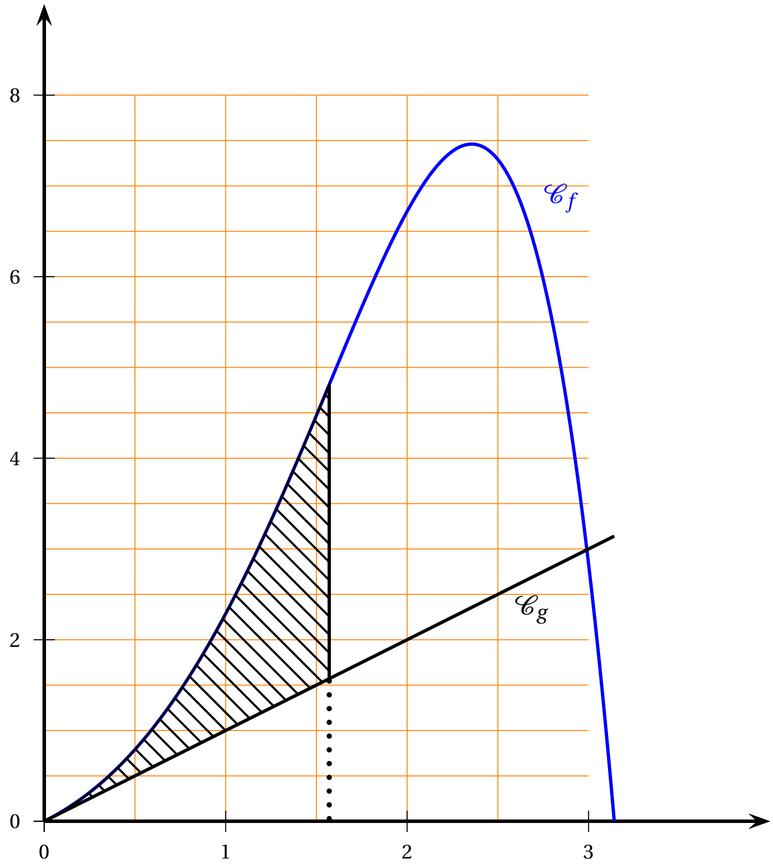
3. D'après la question **Partie A 2.c.** pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$,

$\mathrm{e}^x\sin(x) \geqslant x$ c'est à dire $f(x) \geqslant g(x)$.

L'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$ est donc égale à l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{e}^x\sin(x) - x\right)\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{e}^x\sin(x) - x\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= I - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 0\\
&= \frac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

L'aire cherchée est donc $\dfrac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \dfrac{\pi^2}{8}$ u.a. ($\approx 1{,}67$ u. a.)


8
6
4
2
0
0
1
2
3
$\mathscr{C}_f$
$\mathscr{C}_g$