Corrigé EDS 2023 Nouvelle Calédonie Jour 1

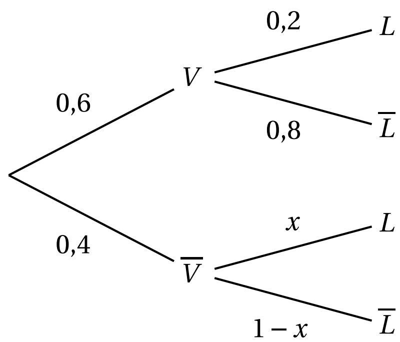
S. DIBOS

28 août 2023

Exercice 1 **5 points**

Partie A

1.



2. La probabilité qu'un client choisisse un bateau à voile et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE est $P\left(V \cap \overline{L}\right)$.

$$P\left(V \cap \overline{L}\right) = P(V) \times P_V\left(\overline{L}\right) = 0{,}6 \times 0{,}8 = \boxed{0{,}48}$$

3. Les évènements V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(L) = P(V \cap L) + P\left(\overline{V} \cap L\right)$$

On a $P(V \cap L) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$.
Posons $P\left(\overline{V} \cap L\right) = p$. On a :

$$P(L) = 0{,}12 + p \iff 0{,}42 = 0{,}12 + p \iff p = 0{,}42 - 0{,}12 = \boxed{0{,}3}$$

On a donc bien $P\left(\overline{V} \cap L\right) = 0{,}3$.

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_{\overline{V}}(L) = \frac{P\left(\overline{V} \cap L\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \boxed{\frac{3}{4} = 0{,}75}$$

5. La probabilité qu'un client ait choisi un voilier, sachant qu'il a pris l'option PILOTE est, d'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_L(V) = \frac{P(V \cap L)}{P(L)} = \frac{0{,}12}{0{,}42} = \boxed{\frac{2}{7} \approx 0{,}29}$$

Partie B

1.

$$P(L \cap A) = P(L) \times P_L(A) = 0{,}42 \times 0{,}005 = \boxed{0{,}002\ 1}$$

$$P\left(\overline{L} \cap A\right) = P\left(\overline{L}\right) \times P_{\overline{V}}(A) = (1 - 0{,}42) \times 0{,}12 = \boxed{0{,}069\ 6}$$

2. Les évènements L et $\overline{L}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = P(L \cap A) + P\left(\overline{L} \cap A\right) = 0{,}002\ 1 + 0{,}069\ 6 = 0{,}071\ 7$$

La probabilité que le bateau loué par un client choisi au hasard subisse une avarie est donc 0,071 7.

Puisque l'entreprise loue 1 000 bateaux, elle peut s'attendre à $1\ 000 \times 0{,}002\ 1 \approx 72$ avaries.

Partie C

1. Les paramètres de la loi binomiale suivie par X sont $\boxed{n = 40}$ et $\boxed{p = 0{,}42}$.

2. À l'aide de la calculatrice, on calcule $P(X \geqslant 15)$:

$$\boxed{P(X \geqslant 15) \approx 0{,}768}$$

Exercice 2 **5 points**

1. **a.**

$$u_1 = 5u_0 - 4 \times 0 - 3 = 5 \times 3 - 0 - 3 = 15 - 3 = \boxed{12}$$

;

b.

$$u_2 = 5u_1 - 4 \times 1 - 3 = 5 \times 12 - 4 - 3 = 60 - 7 = \boxed{53}$$

;

c. Il semble que la suite (u_n) soit croissante et tende vers $+\infty$.

2. **a.** Soit P_n la proposition $u_n \geqslant n + 1$.

Initialisation : $u_0 = 3$ et $0 + 1 = 1$.

$3 \geqslant 1$. La proposition est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : on suppose la proposition vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n+1$ (hypothèse de récurrence). On va vérifier qu'alors elle est vraie au rang suivant.

$$\begin{aligned} u_n \geqslant n+1 &\iff 5u_n \geqslant 5(n+1) \\ &\iff 5u_n - 4n - 3 \geqslant 5n + 5 - 4n - 3 \\ &\iff u_{n+1} \geqslant n+2 = (n+1)+1 \end{aligned}$$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion : la proposition P_n est vérifiée au rang $n = 0$ et est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant n+1$.

b. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$. Puisque $u_n \geqslant n+1$, par comparaison, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

3. a.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - 1 \\ &= 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1 \\ &= 5u_n - 5n - 5 \\ &= 5\left(u_n - n - 1\right) \\ &= 5v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 2$.

b. Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 2$, on a :

$$\boxed{v_n = 2 \times 5^n}$$

c. $v_n = u_n - n - 1 \iff u_n = v_n + n + 1$. Donc :

$$\boxed{u_n = 2 \times 5^n + n + 1}$$

d. Puisque $5 > 1$, la suite de terme général 5^n est strictement croissante, donc $5^{n+1} \geqslant 5^n$.

$$\begin{aligned} 5^{n+1} \geqslant 5^n &\iff 2 \times 5^{n+1} \geqslant 2 \times 5^n \\ &\iff 2 \times 5^{n+1} + (n+1) + 1 \geqslant 2 \times 5^n + (n+1) + 1 \\ &\iff u_{n+1} \geqslant 2 \times 5^n + n + 2 \\ &\iff u_{n+1} \geqslant 2 \times 5^n + n + 1 \\ &\iff u_{n+1} \geqslant u_n \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

4. a.

```
def suite():
    u=3
    n=0
    while u<10**7:
        u= 5*u-4*n-3
        n=n+1
    return n
```

b.

`u`	`n`	`u < 10⁷`
3	0	VRAI
12	1	VRAI
53	2	VRAI
254	3	VRAI
1 255	4	VRAI
6 256	5	VRAI
31 257	6	VRAI
156 258	7	VRAI
781 259	8	VRAI
3 906 260	9	VRAI
19 531 261	10	FAUX

La valeur renvoyée par cette fonction est $n = 10$. C'est le rang à partir duquel $u_n \geqslant 10^7$.

Exercice 3 **5 points**

1. On a $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$. Donc les primitives de f sont de la forme $F(x) = x\,\mathrm{e}^x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Donc $F(x) = 1 + x\,\mathrm{e}^x$ est une primitive de f.

Réponse a.

2. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_1) et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_2).

On a $\dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{1}{1}$, donc $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires. Les droites ne sont donc pas parallèles.

Supposons qu'elle soient sécantes en un point A. Alors les coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ de A vérifient les deux représentations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 2+r \\ b & = & 1+r \\ c & = & -r \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1-s \\ b & = & -1+s \\ c & = & 2-s \end{array}\right. .$$

On a donc $-r = 2-s \iff r = s-2$ et $2+r = 1-s \iff 2+s-2 = 1-s \iff 2s = 1 \iff s = \dfrac{1}{2}$.

Donc : $b = -1 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$, $a = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $c = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Les deux droites sont sécantes en $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Réponse a.

3. Un vecteur normal au plan (P) est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (Δ) est $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{n} \cdot \vec{u} = 2 \times 1 - 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$, donc $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux. Donc (P) et (Δ) sont parallèles.

S'il existe un point commun à (P) et (Δ), alors (Δ) est incluse dans (P).

(Δ) passe par le point de coordonnées $(2\ ;\ 4\ ;\ 1)$. Or $2\times 2-4+1-1=0$, donc ce point est un point du plan (P). La droite (Δ) est donc incluse dans le plan (P).

Réponse b.

4. Un vecteur normal à (P_1) est $\overrightarrow{n_1}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à (P_2) est $\overrightarrow{n_2}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{-2}{1}$, donc $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires. Les plans ne sont donc pas parallèles. Ils sont donc sécants.
De plus $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=1\times 2-2\times 1+1\times 1=1$, donc les vecteurs $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$ ne sont pas orthogonaux. Les plans ne sont donc pas perpendiculaires.

Réponse c.

5. On sait que $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=\left\|\overrightarrow{EF}\right\|\times\left\|\overrightarrow{EG}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}\right)\iff\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}}{\left\|\overrightarrow{EF}\right\|\times\left\|\overrightarrow{EG}\right\|}$

On a : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2-1\\4-2\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-2-1\\2-2\\5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=1\times(-3)+2\times 0+2\times 4=5$

$\left\|\overrightarrow{EF}\right\|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

$\left\|\overrightarrow{EG}\right\|=\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

Donc : $\cos\alpha=\dfrac{5}{3\times 5}=\dfrac{1}{3}$, soit $\alpha\approx 71°$ d'après la calculatrice. **Réponse d.**

Exercice 4 **5 points**

1. **a.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left[5x^2+2x-2x^2\ln(x)\right]$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0}\left(5x^2+2x\right)=0\\ \text{Par croissance comparée }\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x^2\ln(x)=0\end{array}\right\}\overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left[5x^2+2x-2x^2\ln(x)\right]=0$$

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=0}$$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[5x^2+2x-2x^2\ln(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[5+\dfrac{2}{x}-2\ln(x)\right]$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0\Longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{2}{x}\right)=5\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty\Longrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}-2\ln(x)=-\infty\end{array}\right\}\overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[5+\dfrac{2}{x}-2\ln(x)\right]=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[5+\dfrac{2}{x}-2\ln(x)\right]=-\infty\end{array}\right\}\overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[5+\dfrac{2}{x}-2\ln(x)\right]=-\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$$

2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times 2x + 2 - 2\left[2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right] = 10x + 2 - 2\left[2x\ln(x) + x\right] = 10x + 2 - 4x\ln(x) - 2x \\ &= \boxed{8x + 2 - 4x\ln(x)} \end{aligned}$$

3. **a.**

$$f''(x) = 8 - 4\left[1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right] = 8 - 4\ln(x) - 4 = 4 - 4\ln(x) = \boxed{4\left[1 - \ln(x)\right]}$$

b. La courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes si, et seulement si, f est convexe, ce qui équivaut à $f''(x)$ est positif.

$f''(x) \geqslant 0 \iff 4\left[1 - \ln(x)\right] \geqslant 0 \iff 1 - \ln(x) \geqslant 0 \iff -\ln(x) \geqslant -1 \iff \ln(x) \leqslant 1 \iff x \leqslant \mathrm{e}$ (car la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$).

La courbe $\mathscr{C}_f$ est donc au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}]$.

c.

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f'	‖ 2	↗	$4\mathrm{e}+2$	↘	$-\infty$

$$f'(\mathrm{e}) = 8\mathrm{e} + 2 - 4\mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) = 8\mathrm{e} + 2 - 4\mathrm{e} = 4\mathrm{e} + 2$$

4. **a.** Sur $]0\,;\,\mathrm{e}]$, la fonction f' est strictement croissante avec $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = 2$, donc pour tout $x \in]0\,;\,\mathrm{e}]$,on a $f'(x) > 0$.

Sur $\left[\mathrm{e}\,;\,+_{i}nfty\right[$, la fonction f' est continue (puisque dérivable) et strictement décroissante. De plus, $f(_{t}exte) = 4\mathrm{e} + 2 > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = -\infty$. $0 \in]-\infty\,;\,4\mathrm{e}+2[$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

Au final, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0\,;\,+\infty[$.

On a :

$$\boxed{7{,}87 < \alpha < 7{,}88}$$

b. On sait que sur $]0\,;\,\mathrm{e}]$ on a $f'(x) > 0$. Puisque f' est décroissante sur $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$ et qu'elle s'annule en α, $f'(x) \geqslant 0$ sur $[\mathrm{e}\,;\,\alpha]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$. Donc $f'(x)$ est positif sur $]0\,;\,\alpha]$ et négatif sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
Variations de f	$\Vert$ 0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

5. On a $f''(\alpha) = 8\alpha + 2 - 4\alpha\ln(\alpha)$, donc :

$$\begin{aligned}
f'(\alpha) = 0 &\iff 8\alpha + 2 - 4\alpha\ln(\alpha) = 0\\
&\iff 4\alpha\ln(\alpha) = 8\alpha + 2\\
&\iff \ln(\alpha) = \frac{2(4\alpha+1)}{4\alpha} \qquad (\alpha \neq 0)\\
&\iff \boxed{\ln(\alpha) = \frac{4\alpha+1}{2\alpha}}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2\ln(\alpha)\\
&= 5\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 \times \frac{4\alpha+1}{2\alpha}\\
&= 5\alpha^2 + 2\alpha - \alpha(4\alpha+1)\\
&= 5\alpha^2 + 2\alpha - 4\alpha^2 - \alpha\\
&= \boxed{\alpha^2 + \alpha}
\end{aligned}$$

6. D'après la question **4.a.**, on a :

$$\begin{aligned}
7{,}87 < \alpha < 7{,}88 &\iff 61{,}936\,9 < \alpha^2 < 62{,}094\,4\\
&\iff 69{,}806\,9 < \alpha^2 + \alpha < 69{,}974\,4\\
&\iff \boxed{69{,}806\,9 < f(\alpha) < 69{,}974\,4}
\end{aligned}$$